

دانشگاه شهید باهنر کرمان  
دانشکده فنی و مهندسی  
بخش عمران

سعید شجاعی  
علیرضا قربی

وب سایت :

[www.ghorbi.com](http://www.ghorbi.com)



# تحلیل سازه‌ها ۲

شبکه

## ماتریس سختی و بردار نیرو شبکه در سیستم مختصات محلی و کلی

با داشتن ماتریس سختی در سیستم مختصات محلی و ماتریس انتقال به صورت زیر:

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6L & -12 & 0 & 6L \\ 0 & \frac{GJL^2}{EI} & 0 & 0 & -\frac{GJL^2}{EI} & 0 \\ 6L & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & -6L & 12 & 0 & -6L \\ 0 & -\frac{GJL^2}{EI} & 0 & 0 & \frac{GJL^2}{EI} & 0 \\ 6L & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی و بردار نیرو در سیستم مختصات کلی برابر است با:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6Ls & 6Lc & -12 & -6Ls & 6Lc \\ -6Ls & \frac{L^2(GJc^2 + 4EIs^2)}{EI} & -\frac{L^2cs(4EI - GJ)}{EI} & 6Ls & -\frac{L^2(GJc^2 - 2EIs^2)}{EI} & -\frac{L^2cs(2EI + GJ)}{EI} \\ 6Lc & -\frac{L^2cs(4EI - GJ)}{EI} & \frac{L^2(4EIc^2 + GJs^2)}{EI} & -6Lc & -\frac{L^2cs(2EI + GJ)}{EI} & \frac{L^2(2EIc^2 - GJs^2)}{EI} \\ -12 & 6Ls & -6Lc & 12 & 6Ls & -6Lc \\ -6Ls & -\frac{L^2(GJc^2 - 2EIs^2)}{EI} & -\frac{L^2cs(2EI + GJ)}{EI} & 6Ls & \frac{L^2(GJc^2 + 4EIs^2)}{EI} & -\frac{L^2cs(4EI - GJ)}{EI} \\ 6Lc & -\frac{L^2cs(2EI + GJ)}{EI} & \frac{L^2(2EIc^2 - GJs^2)}{EI} & -6Lc & -\frac{L^2cs(4EI - GJ)}{EI} & \frac{L^2(4EIc^2 + GJs^2)}{EI} \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{bmatrix} FS_b \\ FT_b c - FM_b s \\ FM_b c + FT_b s \\ FS_e \\ FT_e c - FM_e s \\ FM_e c + FT_e s \end{bmatrix}$$

## ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده شبکه در سیستم مختصات محلی

ابتدا مفصل:

$$k = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & -L & 0 & L^2 \end{bmatrix}$$

$$f^f = \begin{bmatrix} FS_b - \frac{3FM_b}{2L} \\ 0 \\ 0 \\ FS_e + \frac{3FM_b}{2L} \\ FT_b + FT_e \\ FM_e - \frac{FM_b}{2} \end{bmatrix}$$

انتها مفصل:

$$k = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & L & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & L^2 & -L & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -L & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^f = \begin{bmatrix} FS_b - \frac{3FM_e}{2L} \\ FT_b + FT_e \\ FM_b - \frac{FM_e}{2} \\ FS_e + \frac{3FM_e}{2L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دو سر مفصل:

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^f = \begin{bmatrix} FS_b - \frac{FM_b}{L} - \frac{FM_e}{L} \\ 0 \\ 0 \\ FS_e + \frac{FM_b}{L} + \frac{FM_e}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مفصل در طول عضو:

$$k = \frac{3EI}{L_1^3 + L_2^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 & -1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 & 0 & L_1^2 & -L_1 & 0 & L_1 L_2 \\ -1 & 0 & -L_1 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & L_1 L_2 & -L_2 & 0 & L_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \frac{1}{2(L_1^3 + L_2^3)} \times \dots \begin{bmatrix} 2FS_{b1} L_1^3 - 3FM_{e1} L_1^2 - 3FM_{b2} L_2^2 + 2FS_{b1} L_2^3 + 2FS_{b2} L_2^3 + 2FS_{e1} L_2^3 - 2F_{hy} L_2^3 \\ (2L_1^3 + 2L_2^3)(FT_{b1} + FT_{e1}) \\ 2FM_{b1} L_1^3 + 2FM_{b1} L_2^3 - FM_{e1} L_1^3 + 2FM_{e1} L_2^3 - 3FM_{b2} L_1 L_2^2 + 2FS_{b2} L_1 L_2^3 + 2FS_{e1} L_1 L_2^3 - 2F_{hy} L_1 L_2^3 \\ 3FM_{b2} L_2^2 + 3FM_{e1} L_1^2 + 2FS_{b2} L_1^3 + 2FS_{e1} L_1^3 + 2FS_{e2} L_1^3 + 2FS_{e2} L_2^3 - 2F_{hy} L_1^3 \\ (2L_1^3 + 2L_2^3)(FT_{b2} + FT_{e2}) \\ 2FM_{b2} L_1^3 - FM_{b2} L_2^3 + 2FM_{e2} L_1^3 + 2FM_{e2} L_2^3 - 3FM_{e1} L_1^2 L_2 - 2FS_{b2} L_1^3 L_2 - 2FS_{e1} L_1^3 L_2 + 2F_{hy} L_1^3 L_2 \end{bmatrix}$$

## ماتریس سختی اصلاح شده شبکه در سیستم مختصات کلی

ابتدا مفصل:

$$K = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -Ls & Lc \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & Ls & -Lc \\ -Ls & 0 & 0 & Ls & L^2 s^2 & -L^2 cs \\ Lc & 0 & 0 & -Lc & -L^2 cs & L^2 c^2 \end{bmatrix} \quad F^f = \begin{bmatrix} FS_b - \frac{3FM_b}{2L} \\ 0 \\ 0 \\ FS_e + \frac{3FM_b}{2L} \\ s\left(\frac{FM_b}{2} - FM_e\right) + c(FT_b + FT_e) \\ s(FT_b + FT_e) - c\left(\frac{FM_b}{2} - FM_e\right) \end{bmatrix}$$

انتهای مفصل:

$$K = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & -Ls & Lc & -1 & 0 & 0 \\ -Ls & L^2 s^2 & -L^2 cs & Ls & 0 & 0 \\ Lc & -L^2 cs & L^2 c^2 & -Lc & 0 & 0 \\ -1 & Ls & -Lc & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F^f = \begin{bmatrix} FS_b - \frac{3FM_e}{2L} \\ c(FT_b + FT_e) - s\left(FM_b - \frac{FM_e}{2}\right) \\ c\left(FM_b - \frac{FM_e}{2}\right) + s(FT_b + FT_e) \\ FS_e + \frac{3FM_e}{2L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دو سر مفصل:

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F^f = \begin{bmatrix} FS_b - \frac{FM_b}{L} - \frac{FM_e}{L} \\ 0 \\ 0 \\ FS_e + \frac{FM_b}{L} + \frac{FM_e}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مفصل در طول عضو:

$$K = \frac{3EI}{L_1^3 + L_2^3} \begin{bmatrix} 1 & -L_1 s & L_1 c & -1 & -L_2 s & L_2 c \\ -L_1 s & L_1^2 s^2 & -L_1^2 cs & L_1 s & L_1 L_2 s^2 & -L_1 L_2 cs \\ L_1 c & -L_1^2 cs & L_1^2 c^2 & -L_1 c & -L_1 L_2 cs & L_1 L_2 c^2 \\ -1 & L_1 s & -L_1 c & 1 & L_2 s & -L_2 c \\ -L_2 s & L_1 L_2 s^2 & -L_1 L_2 cs & L_2 s & L_2^2 s^2 & -L_2^2 cs \\ L_2 c & -L_1 L_2 cs & L_1 L_2 c^2 & -L_2 c & -L_2^2 cs & L_2^2 c^2 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{bmatrix} FS_b^* \\ FM_{xb}^* \\ FM_{zb}^* \\ FS_e^* \\ FM_{xe}^* \\ FM_{ze}^* \end{bmatrix}$$

$$FS_b^* = \frac{2FS_{b1} L_1^3 - 3FM_{e1} L_1^2 - 3FM_{b2} L_2^2 + 2FS_{b1} L_2^3 + 2FS_{b2} L_2^3 + 2FS_{e1} L_2^3 - 2F_{hy} L_2^3}{2(L_1^3 + L_2^3)}$$

$$FM_{xb}^* = c(FT_{b1} + FT_{e1}) - \dots$$

$$\frac{s(2FM_{b1} L_1^3 + 2FM_{b1} L_2^3 - FM_{e1} L_1^3 + 2FM_{e1} L_2^3 - 3FM_{b2} L_1 L_2^2 + 2FS_{b2} L_1 L_2^3 + 2FS_{e1} L_1 L_2^3 - 2F_{hy} L_1 L_2^3)}{2(L_1^3 + L_2^3)}$$

$$FM_{zb}^* = s(FT_{b1} + FT_{e1}) + \dots$$

$$\frac{c(2FM_{b1} L_1^3 + 2FM_{b1} L_2^3 - FM_{e1} L_1^3 + 2FM_{e1} L_2^3 - 3FM_{b2} L_1 L_2^2 + 2FS_{b2} L_1 L_2^3 + 2FS_{e1} L_1 L_2^3 - 2F_{hy} L_1 L_2^3)}{2(L_1^3 + L_2^3)}$$

$$FS_e^* = \frac{3FM_{b2} L_2^2 + 3FM_{e1} L_1^2 + 2FS_{b2} L_1^3 + 2FS_{e1} L_1^3 + 2FS_{e2} L_1^3 + 2FS_{e2} L_2^3 - 2F_{hy} L_1^3}{2(L_1^3 + L_2^3)}$$

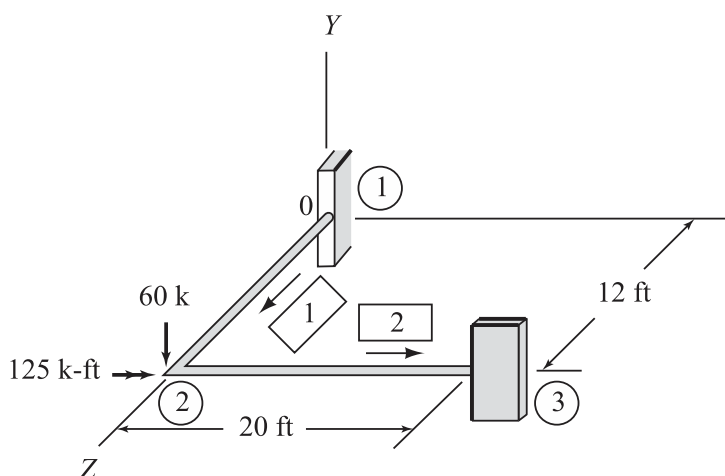
$$FM_{xe}^* = c(FT_{b2} + FT_{e2}) - \dots$$

$$\frac{s(2FM_{b2} L_1^3 - FM_{b2} L_2^3 + 2FM_{e2} L_1^3 + 2FM_{e2} L_2^3 - 3FM_{e1} L_1^2 L_2 - 2FS_{b2} L_1^3 L_2 - 2FS_{e1} L_1^3 L_2 + 2F_{hy} L_1^3 L_2)}{2(L_1^3 + L_2^3)}$$

$$FM_{ze}^* = s(FT_{b2} + FT_{e2}) + \dots$$

$$\frac{c(2FM_{b2} L_1^3 - FM_{b2} L_2^3 + 2FM_{e2} L_1^3 + 2FM_{e2} L_2^3 - 3FM_{e1} L_1^2 L_2 - 2FS_{b2} L_1^3 L_2 - 2FS_{e1} L_1^3 L_2 + 2F_{hy} L_1^3 L_2)}{2(L_1^3 + L_2^3)}$$

## شبکه با بارگذاری گره‌ای



$E, G, I, J = \text{constant}$

در شبکه نشان داده شده، مطلوبست :

الف) تعیین تغییر مکان هر گره

ب) تعیین عکس العمل های تکیه گاهی

ج) تعیین نیروی داخلی هر عضو

$$E = 29000 \text{ ksi}$$

$$G = 11500 \text{ ksi}$$

$$I = 623 \text{ in}^4$$

$$J = 10.9 \text{ in}^4$$

در محاسبات تمامی واحدها به کیپس و اینچ تبدیل شده‌اند.

قسمت الف:

عضو ۱: گره ۱ به ۲

$$L = 144 \text{ in}$$

$$\cos(\theta) = 0$$

$$\sin(\theta) = 1$$

$$k_{\text{local}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 72.607 & 0.000 & 5227.720 & -72.607 & 0.000 & 5227.720 \\ 0.000 & 870.486 & 0.000 & 0.000 & -870.486 & 0.000 \\ 5227.720 & 0.000 & 501861.111 & -5227.720 & 0.000 & 250930.556 \\ -72.607 & 0.000 & -5227.720 & 72.607 & 0.000 & -5227.720 \\ 0.000 & -870.486 & 0.000 & 0.000 & 870.486 & 0.000 \\ 5227.720 & 0.000 & 250930.556 & -5227.720 & 0.000 & 501861.111 \end{bmatrix}$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k_{\text{local}} \times T \Rightarrow$$

$$K_{\text{global}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 72.607 & -5227.720 & 0.000 & -72.607 & -5227.720 & 0.000 \\ -5227.720 & 501861.111 & 0.000 & 5227.720 & 250930.556 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 870.486 & 0.000 & 0.000 & -870.486 \\ -72.607 & 5227.720 & 0.000 & 72.607 & 5227.720 & 0.000 \\ -5227.720 & 250930.556 & 0.000 & 5227.720 & 501861.111 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -870.486 & 0.000 & 0.000 & 870.486 \end{bmatrix}$$

عضو ۲: گره ۲ به ۳

$$L = 20 \times 12 = 240 \text{ in}$$

$$\cos(\theta) = 1$$

$$\sin(\theta) = 0$$

$$k_{\text{local}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 15.683 & 0.000 & 1881.979 & -15.683 & 0.000 & 1881.979 \\ 0.000 & 522.292 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 301116.667 & -1881.979 & 0.000 & 150558.333 \\ -15.683 & 0.000 & -1881.979 & 15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & -522.292 & 0.000 & 0.000 & 522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 150558.333 & -1881.979 & 0.000 & 301116.667 \end{bmatrix}$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k_{\text{local}} \times T \Rightarrow$$

$$K_{\text{global}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 15.683 & 0.000 & 1881.979 & -15.683 & 0.000 & 1881.979 \\ 0.000 & 522.292 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 301116.667 & -1881.979 & 0.000 & 150558.333 \\ -15.683 & 0.000 & -1881.979 & 15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & -522.292 & 0.000 & 0.000 & 522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 150558.333 & -1881.979 & 0.000 & 301116.667 \end{bmatrix}$$



ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 72.607 & -5227.720 & 0.000 & -72.607 & -5227.720 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -5227.720 & 501861.111 & 0.000 & 5227.720 & 250930.556 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 870.486 & 0.000 & 0.000 & -870.486 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -72.607 & 5227.720 & 0.000 & 88.290 & 5227.720 & 1881.979 & -15.683 & 0.000 & 1881.979 \\ -5227.720 & 250930.556 & 0.000 & 5227.720 & 502383.403 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -870.486 & 1881.979 & 0.000 & 301987.153 & -1881.979 & 0.000 & 150558.333 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -15.683 & 0.000 & -1881.979 & 15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 & 0.000 & 522.292 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1881.979 & 0.000 & 150558.333 & -1881.979 & 0.000 & 301116.667 \end{bmatrix}$$

دستگاه زیر باید حل شود :

$$\begin{bmatrix} FS_1 \\ Mx_1 \\ Mz_1 \\ FS_2 = -60k \\ Mx_2 = 1500 \text{ k-in} \\ Mz_2 = 0k \\ FS_3 \\ Mx_3 \\ Mz_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72.607 & -5227.720 & 0.000 & -72.607 & -5227.720 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -5227.720 & 501861.111 & 0.000 & 5227.720 & 250930.556 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 870.486 & 0.000 & 0.000 & -870.486 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -72.607 & 5227.720 & 0.000 & 88.290 & 5227.720 & 1881.979 & -15.683 & 0.000 & 1881.979 \\ -5227.720 & 250930.556 & 0.000 & 5227.720 & 502383.403 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -870.486 & 1881.979 & 0.000 & 301987.153 & -1881.979 & 0.000 & 150558.333 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -15.683 & 0.000 & -1881.979 & 15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 & 0.000 & 522.292 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1881.979 & 0.000 & 150558.333 & -1881.979 & 0.000 & 301116.667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta y_1 = 0 \\ \theta x_1 = 0 \\ \theta z_1 = 0 \\ \Delta y_2 \\ \theta x_2 \\ \theta z_2 \\ \Delta y_3 = 0 \\ \theta x_3 = 0 \\ \theta z_3 = 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه :

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 88.290 & 5227.720 & 1881.979 \\ 5227.720 & 502383.403 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 301987.153 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -72.607 & 5227.720 & 0.000 & -15.683 & 0.000 & 1881.979 \\ -5227.720 & 250930.556 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -870.486 & -1881.979 & 0.000 & 150558.333 \end{bmatrix}$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -72.607 & -5227.720 & 0.000 \\ 5227.720 & 250930.556 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -870.486 \\ -15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 150558.333 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 72.607 & -5227.720 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -5227.720 & 501861.111 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 870.486 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 522.292 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1881.979 & 0.000 & 301116.667 \end{bmatrix}$$

$$P_f = \begin{Bmatrix} -60 \\ 1500 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$P_f = (K_{ff} \times \Delta_f) + (K_{fs} \times \Delta_s) + P_f^f$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

تعیین جابجایی‌ها :

$$\Delta_f = \left( \begin{bmatrix} 88.290 & 5227.720 & 1881.979 \\ 5227.720 & 502383.403 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 301987.153 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} -60 \\ 1500 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.41147 \\ 0.038485 \\ 0.02126 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{in} \\ \text{rad} \\ \text{rad} \end{matrix}$$

قسمت ب :

تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی :

$$P_s = (K_{sf} \times \Delta_f) + (K_{ss} \times \Delta_s) + P_s^f$$

$$P_s = \begin{bmatrix} -72.607 & -5227.720 & 0.000 \\ 5227.720 & 250930.556 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -870.486 \\ -15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 150558.333 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -3.41147 \\ 0.038485 \\ 0.02126 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46.50868 \\ -8177.15 \\ -18.5067 \\ 13.49132 \\ -20.1004 \\ -3219.41 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{k} \\ \text{k-in} \\ \text{k-in} \\ \text{k} \\ \text{k-in} \\ \text{k-in} \end{matrix}$$

قسمت ج :

تعیین نیروهای داخلی اعضا :

$$\mathbf{f}_{6 \times 1}^{(e)} = \left( \mathbf{T}_{6 \times 6} \times \left( \mathbf{K}_{6 \times 6}^{\text{Global}} \times \Delta_{6 \times 1} \right) \right) + \{ \mathbf{f}_{6 \times 1}^f \}$$

عضو ۱ :

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 72.607 & -5227.720 & 0.000 & -72.607 & -5227.720 & 0.000 \\ -5227.720 & 501861.111 & 0.000 & 5227.720 & 250930.556 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 870.486 & 0.000 & 0.000 & -870.486 \\ -72.607 & 5227.720 & 0.000 & 72.607 & 5227.720 & 0.000 \\ -5227.720 & 250930.556 & 0.000 & 5227.720 & 501861.111 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -870.486 & 0.000 & 0.000 & 870.486 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.41147 \\ 0.038485 \\ 0.02126 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

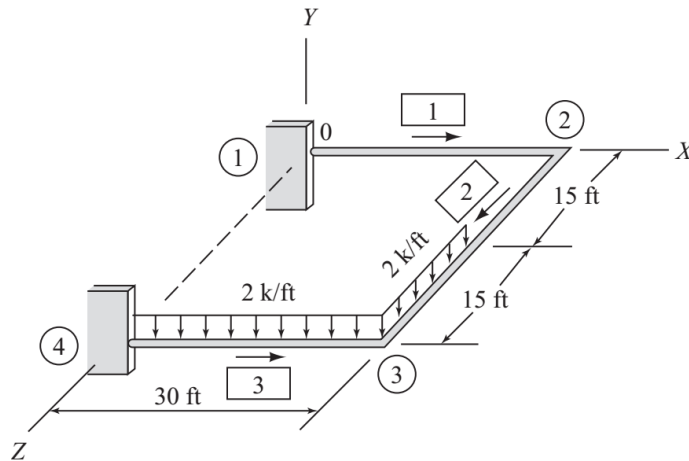
$$= \begin{bmatrix} 46.5087 \\ -18.5067 \\ 8177.1500 \\ -46.5087 \\ 18.5067 \\ -1479.8996 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{k} \\ \text{k-in} \\ \text{k-in} \\ \text{k} \\ \text{k-in} \\ \text{k-in} \end{matrix}$$

عضو ۲ :

$$f^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 15.683 & 0.000 & 1881.979 & -15.683 & 0.000 & 1881.979 \\ 0.000 & 522.292 & 0.000 & 0.000 & -522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 301116.667 & -1881.979 & 0.000 & 150558.333 \\ -15.683 & 0.000 & -1881.979 & 15.683 & 0.000 & -1881.979 \\ 0.000 & -522.292 & 0.000 & 0.000 & 522.292 & 0.000 \\ 1881.979 & 0.000 & 150558.333 & -1881.979 & 0.000 & 301116.667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3.41147 \\ 0.038485 \\ 0.02126 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{cases} -13.4913 & k \\ 20.1004 & k - in \\ -18.5067 & k - in \\ 13.4913 & k \\ -20.1004 & k - in \\ -3219.4093 & k - in \end{cases}$$

## شبکه با بارگذاری روی عضو



$$\begin{aligned} E, G, I, J &= \text{constant} \\ E &= 29,000 \text{ ksi} \\ G &= 11,500 \text{ ksi} \\ I &= 5,310 \text{ in.}^4 \\ J &= 41.3 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

- در شبکه نشان داده شده، مطلوبست :
- الف) تعیین تغییر مکان هر گره
- ب) تعیین عکس العمل های تکیه گاهی
- ج) تعیین نیروی داخلی هر عضو

در محاسبات تمامی واحدها به کیپس و اینچ تبدیل شده‌اند.

قسمت الف:

از آنجا که عضو ۱ و ۲ و ۳ هم طول و هم مصالح می باشند در نتیجه ماتریس سختی محلی عضو ۱ و ۲ و ۳ با هم برابر می باشد :

$$L = 30 \times 12 = 360 \text{ in}$$

$$k_{\text{local}}^{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 39.606 & 0.000 & 7129.167 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 \\ -39.606 & 0.000 & -7129.167 & 39.606 & 0.000 & -7129.167 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 855500.000 & -7129.167 & 0.000 & 1711000.000 \end{bmatrix}$$

عضو ۱ و ۳ هم جهت می باشند در نتیجه ماتریس انتقال و ماتریس سختی کلی آن ها برابر می باشند :

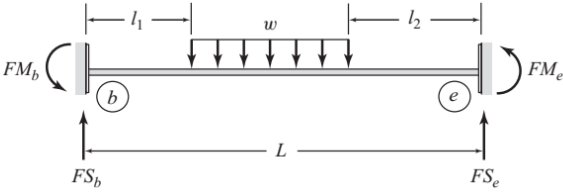
$$\cos(\theta) = 1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k_{\text{local}} \times T \Rightarrow$$

$$K_{\text{global}}^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 39.606 & 0.000 & 7129.167 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 \\ -39.606 & 0.000 & -7129.167 & 39.606 & 0.000 & -7129.167 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 855500.000 & -7129.167 & 0.000 & 1711000.000 \end{bmatrix}$$

تبدیل بار گسترده به گرهی در عضو ۳ :

3.		$FS_b = \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1}{L^4} (2L^3 - 2l_1^2 L + l_1^3) - \frac{l_2^3}{L^4} (2L - l_2) \right]$ $FM_b = \frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^2}{L^4} (6L^2 - 8l_1 L + 3l_1^2) - \frac{l_2^3}{L^4} (4L - 3l_2) \right]$ $FS_e = \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4} (2L - l_1) - \frac{l_2}{L^4} (2L^3 - 2l_2^2 L + l_2^3) \right]$ $FM_e = -\frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4} (4L - 3l_1) - \frac{l_2^2}{L^4} (6L^2 - 8l_2 L + 3l_2^2) \right]$
----	---	--

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = 0 \\ L = 360\text{in} \\ w = 2/12 = 0.16667 \frac{\text{k}}{\text{in}} \end{cases} \rightarrow f_3^f = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 1800 \\ 30 \\ 0 \\ -1800 \end{bmatrix} \xrightarrow{T' \times f^f} F_3^f = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 1800 \\ 30 \\ 0 \\ -1800 \end{bmatrix}$$

و برای عضو ۲ ماتریس انتقال و ماتریس سختی کلی را بدین صورت داریم :

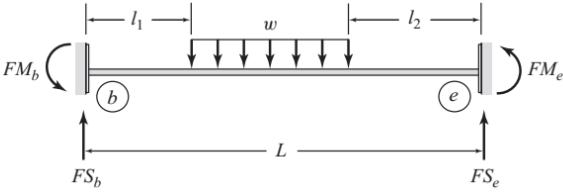
$$\cos(\theta) = 0 \quad \sin(\theta) = 1$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k_{\text{local}} \times T \Rightarrow$$

$$K_{\text{global}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 39.606 & -7129.167 & 0.000 & -39.606 & -7129.167 & 0.000 \\ -7129.167 & 1711000.000 & 0.000 & 7129.167 & 855500.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 \\ -39.606 & 7129.167 & 0.000 & 39.606 & 7129.167 & 0.000 \\ -7129.167 & 855500.000 & 0.000 & 7129.167 & 1711000.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 \end{bmatrix}$$

تبدیل بار گسترده به گرهی در عضو ۲ :

3.		$FS_b = \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1}{L^4} (2L^3 - 2l_1^2 L + l_1^3) - \frac{l_2^3}{L^4} (2L - l_2) \right]$ $FM_b = \frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^2}{L^4} (6L^2 - 8l_1 L + 3l_1^2) - \frac{l_2^3}{L^4} (4L - 3l_2) \right]$ $FS_e = \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4} (2L - l_1) - \frac{l_2}{L^4} (2L^3 - 2l_2^2 L + l_2^3) \right]$ $FM_e = -\frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4} (4L - 3l_1) - \frac{l_2^2}{L^4} (6L^2 - 8l_2 L + 3l_2^2) \right]$
----	---	--

$$\begin{cases} L_1 = 15 \times 12 = 180 \\ L_2 = 0 \\ L = 360 \text{ in} \\ w = 2/12 = 0.16667 \frac{\text{k}}{\text{in}} \end{cases} \rightarrow f_2^f = \begin{bmatrix} 5.625 \\ 0 \\ 562.5 \\ 24.375 \\ 0 \\ -1237.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{T' \times f^f} F_2^f = \begin{bmatrix} 5.625 \\ -562.5 \\ 0 \\ 24.375 \\ 1237.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 39.606 & 0.000 & 7129.167 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -39.606 & 0.000 & -7129.167 & 79.213 & -7129.167 & -7129.167 & -39.606 & -7129.167 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & -7129.167 & 1712319.306 & 0.000 & 7129.167 & 855500.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 855500.000 & -7129.167 & 0.000 & 1712319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -39.606 & 7129.167 & 0.000 & 79.213 & 7129.167 & -7129.167 & -39.606 & 0.000 & -7129.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -7129.167 & 855500.000 & 0.000 & 7129.167 & 1712319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & -7129.167 & 0.000 & 1712319.306 & 7129.167 & 0.000 & 855500.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 & 39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 & 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 \end{bmatrix}$$

جمع بندی اطلاعات و بدست آوردن تغییر شکل ها :

$$P_f^f = \begin{Bmatrix} 5.625 \\ -562.5 \\ 0 \\ 54.375 \\ 1237.5 \\ -1800 \end{Bmatrix} \quad P_s^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 1800 \end{Bmatrix} \quad P_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (P_f - P_f^f) = \begin{Bmatrix} -5.625 \\ 562.5 \\ 0 \\ -54.375 \\ -1237.5 \\ 1800 \end{Bmatrix}$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 79.213 & -7129.167 & -7129.167 & -39.606 & -7129.167 & 0.000 \\ -7129.167 & 1712319.306 & 0.000 & 7129.167 & 855500.000 & 0.000 \\ -7129.167 & 0.000 & 1712319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 \\ -39.606 & 7129.167 & 0.000 & 79.213 & 7129.167 & -7129.167 \\ -7129.167 & 855500.000 & 0.000 & 7129.167 & 1712319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1319.306 & -7129.167 & 0.000 & 1712319.306 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -39.606 & 0.000 & -7129.167 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 855500.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -39.606 & 0.000 & -7129.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 7129.167 & 0.000 & 855500.000 \end{bmatrix}$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -39.606 & 0.000 & 7129.167 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -7129.167 & 0.000 & 855500.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 39.606 & 0.000 & 7129.167 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 \end{bmatrix}$$

در نتیجه :

$$P_f = (K_{ff} \times \Delta_f) + (K_{fs} \times \Delta_s) + P_f^f$$



$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$\Rightarrow (P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s)) = \begin{Bmatrix} -5.625 \\ 562.5 \\ 0 \\ -54.375 \\ -1237.5 \\ 1800 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 79.213 & -7129.167 & -7129.167 & -39.606 & -7129.167 & 0.000 \\ -7129.167 & 1712319.306 & 0.000 & 7129.167 & 855500.000 & 0.000 \\ -7129.167 & 0.000 & 1712319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 \\ -39.606 & 7129.167 & 0.000 & 79.213 & 7129.167 & -7129.167 \\ -7129.167 & 855500.000 & 0.000 & 7129.167 & 1712319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1319.306 & -7129.167 & 0.000 & 1712319.306 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} -5.625 \\ 562.5 \\ 0 \\ -54.375 \\ -1237.5 \\ 1800 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_f = \begin{Bmatrix} -0.77316478 \text{ in} \\ 0.01134647 \text{ rad} \\ -0.00323276 \text{ rad} \\ -4.5289977 \text{ in} \\ 0.00924568 \text{ rad} \\ -0.01780757 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

قسمت ب :

$$P_s = (K_{sf} \times \Delta_f) + (K_{ss} \times \Delta_s) + P_s^f$$

$$P_s = \begin{bmatrix} -39.606 & 0.000 & 7129.167 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -7129.167 & 0.000 & 855500.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.77316478 \\ 0.01134647 \\ -0.00323276 \\ -4.5289977 \\ 0.00924568 \\ -0.01780757 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 1800 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.57546 \text{ k} \\ -14.96946 \text{ k-in} \\ 2746.3959 \text{ k-in} \\ 82.42454 \text{ k} \\ -12.19787 \text{ k-in} \\ 18853.604 \text{ k-in} \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :

تعیین نیروهای داخلی اعضا :

$$f_{6 \times 1}^{(e)} = \left( T_{6 \times 6} \times \left( K_{6 \times 6}^{Global} \times \Delta_{6 \times 1} \right)_{6 \times 1} \right) + \{ f_{6 \times 1}^f \}$$

عضو ۱ :

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 39.606 & 0.000 & 7129.167 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 \\ -39.606 & 0.000 & -7129.167 & 39.606 & 0.000 & -7129.167 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 855500.000 & -7129.167 & 0.000 & 1711000.000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.77316478 \\ 0.01134647 \\ -0.00323276 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f^{(1)} = \begin{Bmatrix} 7.5755 \text{ k} \\ -14.9695 \text{ k-in} \\ 2746.3960 \text{ k-in} \\ -7.5755 \text{ k} \\ 14.9695 \text{ k-in} \\ -19.2286 \text{ k-in} \end{Bmatrix}$$

عضو ۲ :

$$f^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 39.606 & -7129.167 & 0.000 & -39.606 & -7129.167 & 0.000 \\ -7129.167 & 1711000.000 & 0.000 & 7129.167 & 855500.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 \\ -39.606 & 7129.167 & 0.000 & 39.606 & 7129.167 & 0.000 \\ -7129.167 & 855500.000 & 0.000 & 7129.167 & 1711000.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.77316478 \\ 0.01134647 \\ -0.00323276 \\ -4.5289977 \\ 0.00924568 \\ -0.01780757 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.625 \\ 0 \\ 562.5 \\ 24.375 \\ 0 \\ -1237.5 \end{bmatrix}$$

$$f^{(2)} = \begin{Bmatrix} 7.5755 \text{ k} \\ 19.2286 \text{ k-in} \\ 14.9695 \text{ k-in} \\ 22.4245 \text{ k} \\ -19.2286 \text{ k-in} \\ 12.1979 \text{ k-in} \end{Bmatrix}$$

عضو ۳ :

$$f^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 39.606 & 0.000 & 7129.167 & -39.606 & 0.000 & 7129.167 \\ 0.000 & 1319.306 & 0.000 & 0.000 & -1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 1711000.000 & -7129.167 & 0.000 & 855500.000 \\ -39.606 & 0.000 & -7129.167 & 39.606 & 0.000 & -7129.167 \\ 0.000 & -1319.306 & 0.000 & 0.000 & 1319.306 & 0.000 \\ 7129.167 & 0.000 & 855500.000 & -7129.167 & 0.000 & 1711000.000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.5289977 \\ 0.009245678 \\ -0.01780757 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 1800 \\ 30 \\ 0 \\ -1800 \end{bmatrix}$$

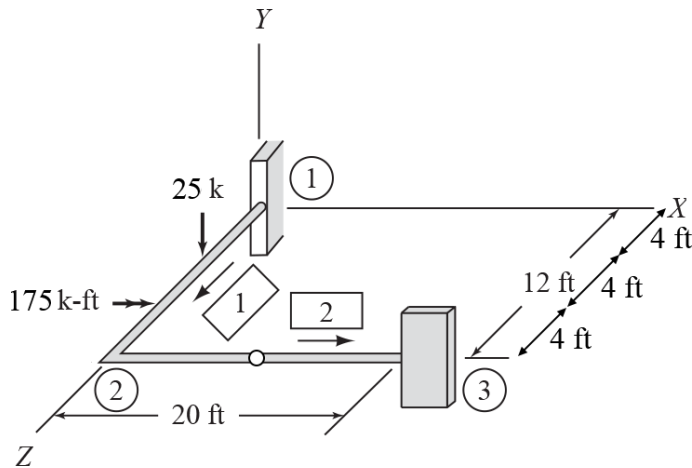
$$f^{(3)} = \begin{bmatrix} 82.4245 \\ -12.1979 \\ 18853.6040 \\ -22.4245 \\ 12.1979 \\ 19.2286 \end{bmatrix} \begin{matrix} k \\ k - in \\ k - in \\ k \\ k - in \\ k - in \end{matrix}$$

## شبکه با بارگذاری روی عضو و مفصل در طول عضو

در شبکه نشان داده شده وسط عضو ۲ یک مفصل خمشی قرار دارد. مطلوب است:

الف) تعیین جابجایی‌های گره ۲ در حالتی که برای محاسبات دو عضو در نظر گرفته شود.

ب) تعیین نیروهای داخلی اعضا



$$E=29000 \text{ ksi}$$

$$G=11500 \text{ ksi}$$

$$I=5310 \text{ in}^4$$

$$J=41.3 \text{ in}^4$$

در محاسبات تمامی واحدها به کیپس و اینچ تبدیل شده‌اند.

قسمت الف:

عضو ۱: گره ۱ به ۲

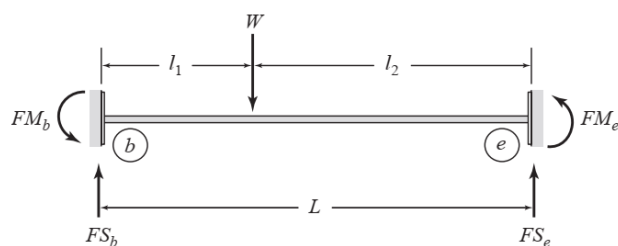
$$L = 144 \text{ in} \quad \cos(\theta) = 0 \quad \sin(\theta) = 1$$

$$^{(1)}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{(1)}K = \begin{bmatrix} 618.851 & -44557.292 & 0.000 & -618.851 & -44557.292 & 0.000 \\ -44557.292 & 427750.000 & 0.000 & 44557.292 & 2138750.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 3298.264 & 0.000 & 0.000 & -3298.264 \\ -618.851 & 44557.292 & 0.000 & 618.851 & 44557.292 & 0.000 \\ -44557.292 & 2138750.000 & 0.000 & 44557.292 & 427750.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -3298.264 & 0.000 & 0.000 & 3298.264 \end{bmatrix}$$

نیروهای انتهایی عضو حاصل از بار متمرکز روی عضو:

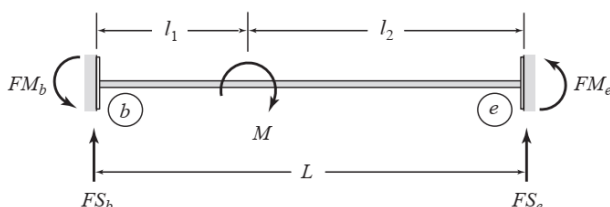
$$f^f = \begin{Bmatrix} 18.5185 \\ 0 \\ 533.3333 \\ 6.4815 \\ 0 \\ -266.6667 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned} FS_b &= \frac{Wl_2^2}{L^3}(3l_1 + l_2) \\ FM_b &= \frac{Wl_1l_2^2}{L^2} \\ FSe &= \frac{Wl_1^2}{L^3}(l_1 + 3l_2) \\ FMe &= -\frac{Wl_1^2l_2}{L^2} \end{aligned}$$

نیروهای انتهایی عضو حاصل از لنگر متمرکز روی عضو:

$$f^f = \begin{Bmatrix} -19.4444 \\ 0 \\ -700 \\ 19.4444 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned} FS_b &= -\frac{6Ml_1l_2}{L^3} \\ FM_b &= \frac{Ml_2}{L^2}(l_2 - 2l_1) \\ FSe &= \frac{6Ml_1l_2}{L^3} \\ FMe &= \frac{Ml_1}{L^2}(l_1 - 2l_2) \end{aligned}$$

مجموع نیروهای انتهایی عضو حاصل از بارگذاری روی عضو:

$$f^f = \begin{Bmatrix} -0.9259 \\ 0 \\ -166.6667 \\ 25.9259 \\ 0 \\ -266.6667 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T \times f^f} F^f = \begin{Bmatrix} -0.9259 \\ 166.6667 \\ 0 \\ 25.9259 \\ 266.6667 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

عضو ۲: گره ۲ به ۳

$$L = 240 \text{ in} \quad \cos(\theta) = 1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}K = \begin{bmatrix} 133.672 & 0.000 & 16040.625 & -133.672 & 0.000 & 16040.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 16040.625 & 0.000 & 1924875.000 & -16040.625 & 0.000 & 1924875.000 \\ -133.672 & 0.000 & -16040.625 & 133.672 & 0.000 & -16040.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 16040.625 & 0.000 & 1924875.000 & -16040.625 & 0.000 & 1924875.000 \end{bmatrix}$$

دستگاه به فرم زیر می‌باشد:

$$\Delta_f = \left( K_{ff} \right)^{-1} \left( P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s) \right)$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 752.523 & 44557.292 & 16040.625 \\ 44557.292 & 4277500.000 & 0.000 \\ 16040.625 & 0.000 & 1928173.264 \end{bmatrix}^{-1} \times \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25.9259 \\ 266.6667 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.149399 \\ 0.001494 \\ 0.001243 \end{bmatrix}$$

قسمت ب:

$$F_{Global}^{(e)} = \left( K \times \Delta \right)^{(e)} + F_f^{(e)}$$

$$f_{Local}^{(e)} = T \times F_{Global}^{(e)}$$

نیروهای عضو ۱:

$$^{(1)}F = \begin{bmatrix} 618.851 & -44557.292 & 0.000 & -618.851 & -44557.292 & 0.000 \\ -44557.292 & 4277500.000 & 0.000 & 44557.292 & 2138750.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 3298.264 & 0.000 & 0.000 & -3298.264 \\ -618.851 & 44557.292 & 0.000 & 618.851 & 44557.292 & 0.000 \\ -44557.292 & 2138750.000 & 0.000 & 44557.292 & 4277500.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -3298.264 & 0.000 & 0.000 & 3298.264 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.149399 \\ 0.001494 \\ 0.001243 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.9259 \\ 166.6667 \\ 0 \\ 25.9259 \\ 266.6667 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.9658 \\ -3295.0808 \\ -4.0993 \\ 0.0342 \\ 0.0000 \\ 4.0993 \end{bmatrix}$$

$$^{(1)}f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 24.9658 \\ -3295.0808 \\ -4.0993 \\ 0.0342 \\ 0.0000 \\ 4.0993 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24.9658 \\ -4.0993 \\ 3295.0808 \\ 0.0342 \\ 4.0993 \\ 0.0000 \end{Bmatrix}$$

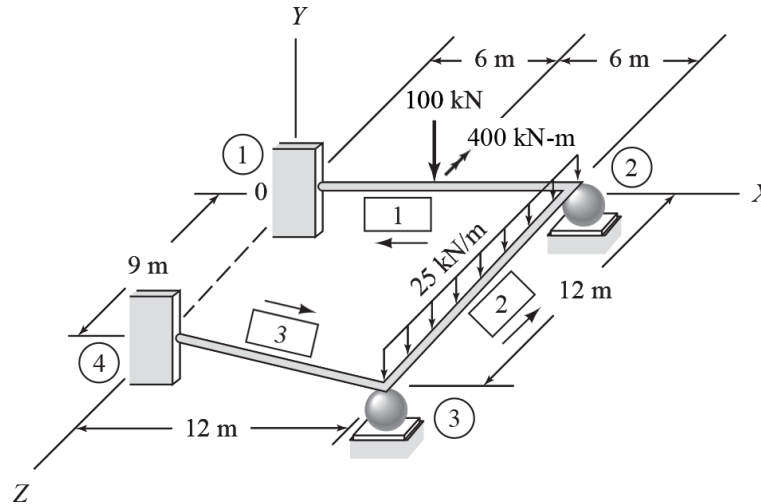
نیروهای عضو ۲:

$$^{(2)}F = \begin{bmatrix} 133.672 & 0.000 & 16040.625 & -133.672 & 0.000 & 16040.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 16040.625 & 0.000 & 1924875.000 & -16040.625 & 0.000 & 1924875.000 \\ -133.672 & 0.000 & -16040.625 & 133.672 & 0.000 & -16040.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 16040.625 & 0.000 & 1924875.000 & -16040.625 & 0.000 & 1924875.000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.149399 \\ 0.001494 \\ 0.001243 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0342 \\ 0.0000 \\ -4.0993 \\ 0.0342 \\ 0.0000 \\ -4.0993 \end{Bmatrix}$$

$$^{(2)}f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.0342 \\ 0.0000 \\ -4.0993 \\ 0.0342 \\ 0.0000 \\ -4.0993 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0342 \\ 0.0000 \\ -4.0993 \\ 0.0342 \\ 0.0000 \\ -4.0993 \end{Bmatrix}$$

## بارهای گره‌ای ناشی از بارگذاری

در شبکه نشان داده شده، نیروهای وارد شده بر گره‌ها ناشی از بارگذاری‌های روی اعضا را در سیستم مختصات کلی محاسبه نمایید. (به جهت دقت شود)



حل :

واحدها تبدیل به کیلونیوتن و متر شده‌اند.

عضو ۱: گره ۲ به ۱

$$L = 12 \text{ m}$$

$$\cos(\theta) = -1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تبدیل بار متمرکز در عضو ۱:

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = 6\text{m} \\ L = 12\text{m} \\ w = 100\text{kN} \end{cases} \rightarrow f_1^f = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 150 \\ 50 \\ 0 \\ -150 \end{bmatrix} \xrightarrow{T' \times f^f} F_1^f = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ -150 \\ 50 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix}$$



تبدیل لنگر متمرکز در عضو ۱:

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = 6\text{m} \\ L = 12\text{m} \\ M = -400\text{kN-m} \end{cases} \rightarrow f_1^f = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ 100 \\ -50 \\ 0 \\ 100 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T' \times f^f} F_1^f = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

عضو ۱: گره ۳ به ۲

$$L = 12\text{ m}$$

$$\cos(\theta) = 0 \quad \sin(\theta) = -1$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تبدیل بار گسترده به گرهی در عضو ۲:

$$\begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ L = 12\text{m} \\ w = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \end{cases} \rightarrow f_2^f = \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 300 \\ 150 \\ 0 \\ -300 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T' \times f^f} F_2^f = \begin{Bmatrix} 150 \\ 300 \\ 0 \\ 150 \\ -300 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

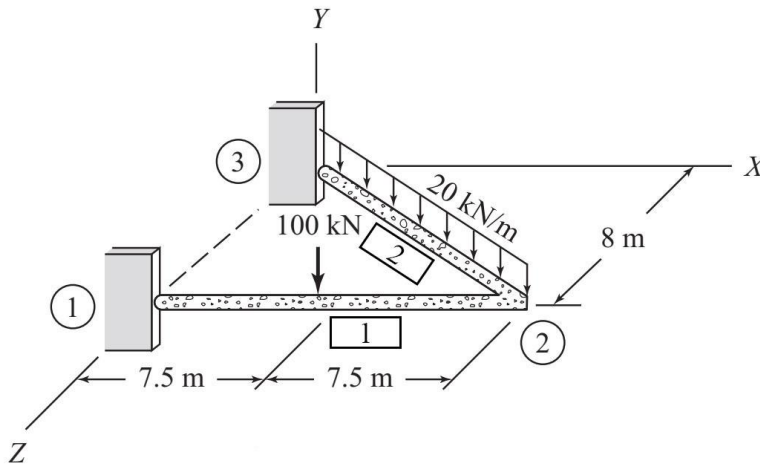
از آنجا که در عضو ۳ بارگذاری عضوی نداریم نیازی به محاسبات عضو ۳ نمی‌باشد.

در نتیجه در کل سازه نیروهای گره‌ای اسمبل شده حاصل از بارگذاری برابر است با:

$$\mathbf{P}^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 250 \\ -300 \\ -250 \\ 150 \\ 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_f^f = \begin{Bmatrix} -300 \\ -250 \\ 300 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_s^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## شبکه با خطای ساخت

مطلوبست تعیین جابجایی گره‌های شبکه زیر به روش جریمه در صورتی که گره ۳ به اندازه ۲ میلی متر نشست کرده باشد و عضو ۱ در طول خود دچار ناصافی و خم شده باشد.



عضو ۱: گره ۱ به ۲

عضو ۲: گره ۲ به ۳

$E, I, J, G = \text{constant}$

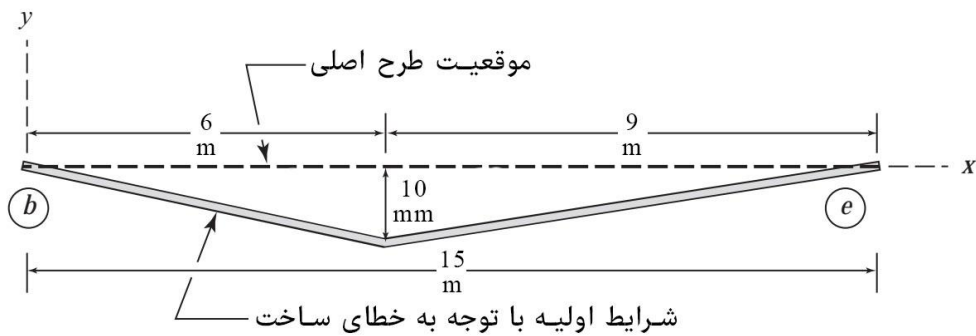
$E = 200 \text{ GPa}$

$G = 70 \text{ GPa}$

$I = 6(10^9) \text{ mm}^4$

$J = 3(10^9) \text{ mm}^4$

اطلاعات مربوط به خطای ساخت عضو ۱ در شکل نشان داده شده اند:



b: گره ابتدا      e: گره انتها