



دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده فنی و مهندسی
بخش عمران

سعید شجاعی
علیرضا قربی

وب سایت :

www.ghorbi.com



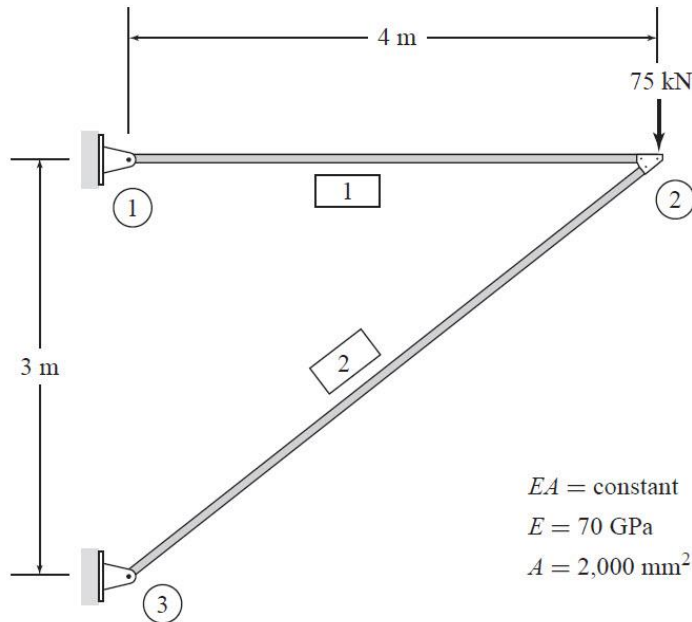
تحلیل سازه‌ها ۲

خرپا صفحه‌ای

خرپای صفحه‌ای ساده (حل سیستم به روش مستقیم)

در خrpای نشان داده شده مطلوبست :

- الف : تعیین تغییر مکان هر گره
ب : تعیین عکس العمل تکیه گاهی
ج : تعیین نیروی داخلی هر عضو



واحدهای حل مسئله همگی بر حسب متر و کیلو نیوتن می باشند.

$$\begin{aligned} EA &= \text{constant} \\ E &= 70 \text{ GPa} \\ A &= 2,000 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

پیش فرض های مسئله و روابط برای هر المان :

$$E = 70 \text{ GPa} = 70 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$$

$$A = 2000 \text{ mm}^2 = 2000 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L = \sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{X_e - X_b}{L}$$

$$\sin(\theta) = \frac{Y_e - Y_b}{L}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = T^T \times k \times T$$

قسمت الف :

عضو ۱: گره ۱ به ۲

$$L = 4$$

$$\cos(\theta) = 1$$

$$\sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{(1)}k = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{(1)}K = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عضو ۲: گره ۲ به ۳

$$L = 5 \quad \cos(\theta) = \frac{0-4}{5} = -0.8 \quad \sin(\theta) = \frac{0-3}{5} = -0.6$$

$$^{(2)}T = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}k = \begin{bmatrix} 28000 & 0 & -28000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -28000 & 0 & 28000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}K = \begin{bmatrix} 17920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر می‌توانیم مجهولات مسئله را بدست آوریم:

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x}=0 \\ P_{2y}=-75 \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1x}=0 \\ \Delta_{1y}=0 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x}=0 \\ \Delta_{3y}=0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -35000 & 0 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}^{-1} \times \left\{ \begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -35000 & 0 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0028571 \\ -0.01125 \end{Bmatrix} m$$

قسمت ب :

$$P_s = K_{sf} \Delta_f + K_{ss} \Delta_s$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ -17920 & -13440 \\ -13440 & -10080 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ -17920 & -13440 \\ -13440 & -10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.0028571 \\ -0.01125 \end{Bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :

محاسبه نیروی داخلی اعضا :

$$F_{Global}^{(e)} = K^{(e)} \times \Delta^{(e)}$$

$$f_{Local}^{(e)} = T^{(e)} \times F_{Global}^{(e)}$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۱ :

$$F_{Global}^{(1)} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.002857 \\ -0.01125 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_{Local}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

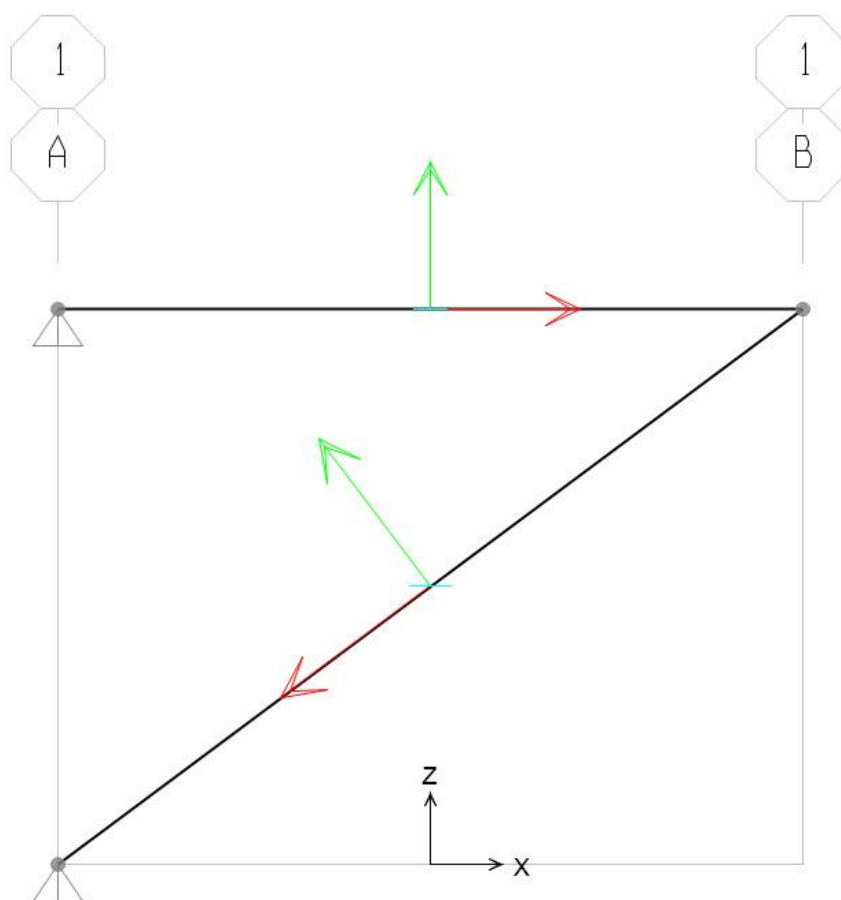
محاسبه نیروی داخلی عضو ۲ :

$$F_{Global}^{(2)} = \begin{bmatrix} 17920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.002857 \\ -0.01125 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

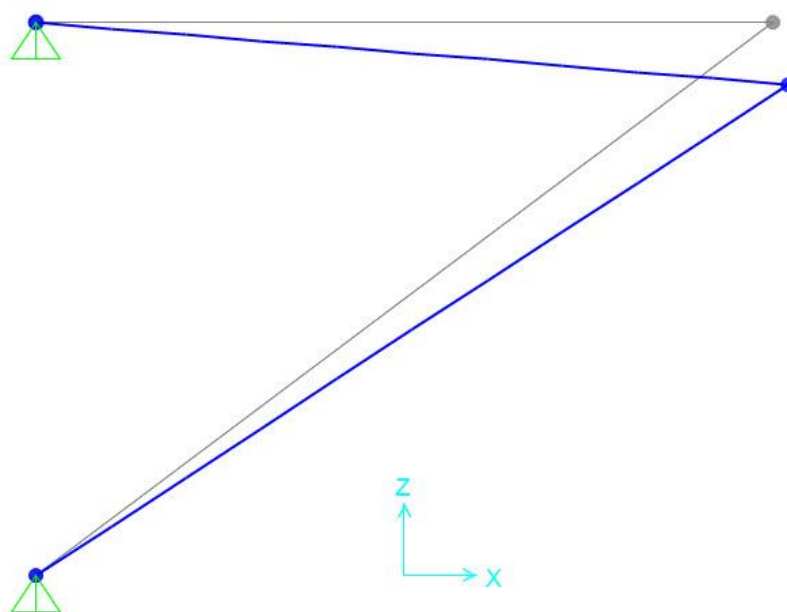
$$f_{Local}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & -0.8 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -100 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 125 \\ 0 \\ -125 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری SAP2000 v17.1.1

مدل سازه و نمایش محورهای محلی و مختصات کلی :



سازه تغییر شکل یافته :



نتایج جا به جایی گره ها :

Joint Text	OutputCase	CaseType Text	U1 m	U3 m
4	DEAD	LinStatic	0	0
5	DEAD	LinStatic	0.002857	-0.01125
6	DEAD	LinStatic	0	0

نتایج عکس العمل تکیه گاه :

Joint Text	OutputCase	CaseType Text	F1 KN	F3 KN
4	DEAD	LinStatic	-100	0
6	DEAD	LinStatic	100	75

نتایج نیروهای داخلی هر عضو :

Element Forces - Frames

File View Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted Element Forces - Frames

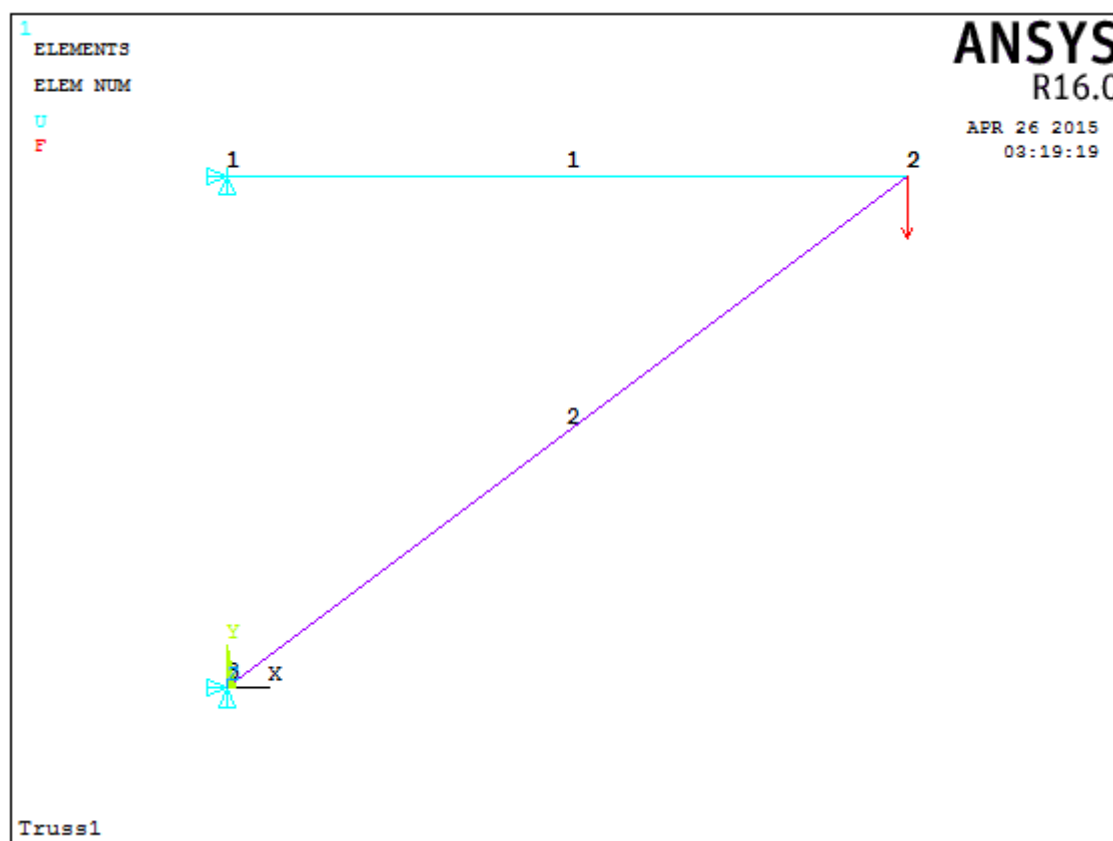
Filter: ElemStation = 0

	FrameElem Text	OutputCase	CaseType Text	P KN
▶	4	DEAD	LinStatic	100
	5	DEAD	LinStatic	-125

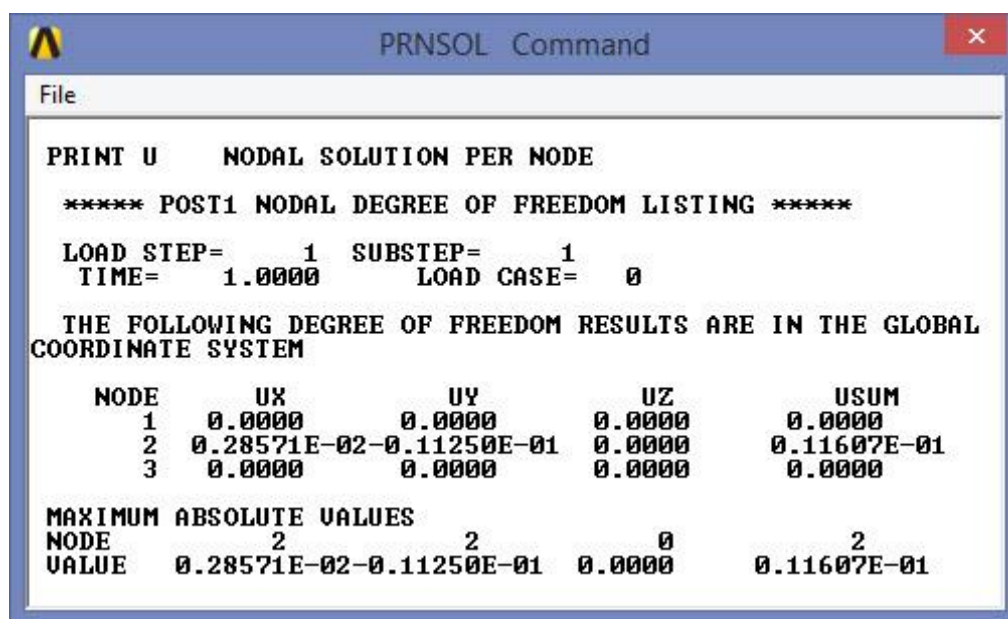
Record: << < 1 > >> of 2 Add Tables... Done

مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری ANSYS v16

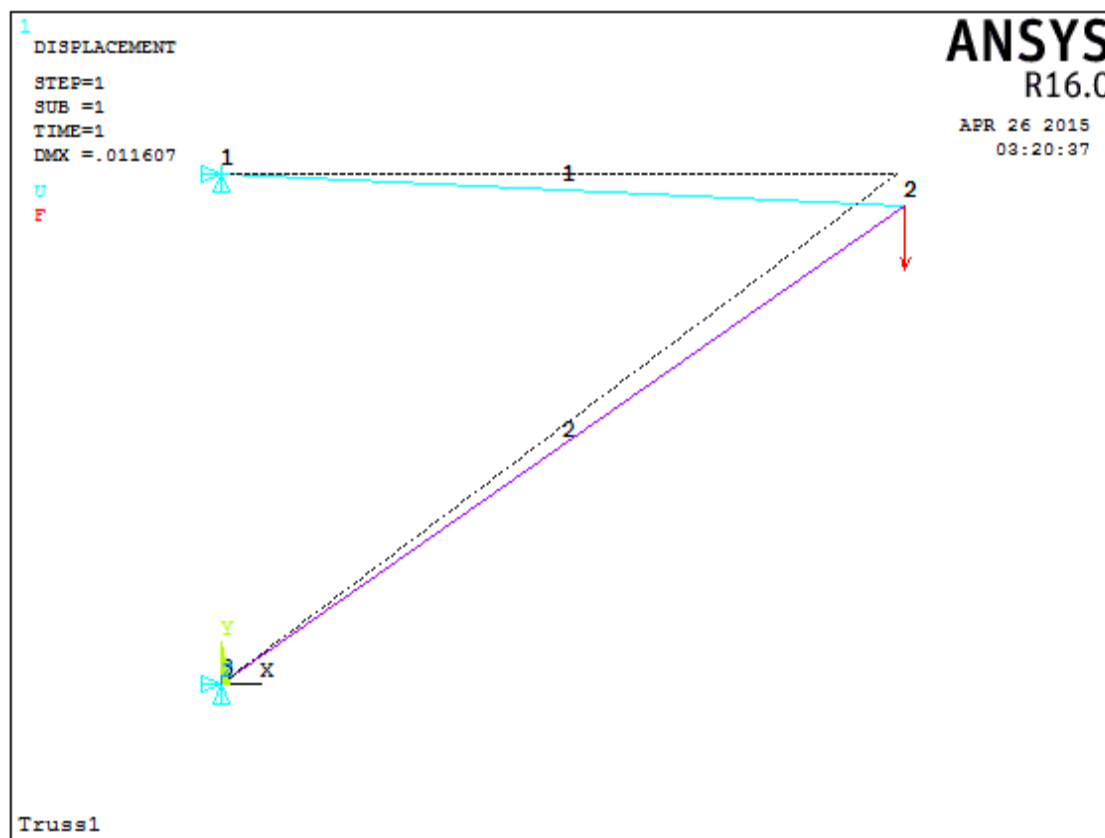
مدل سازه :



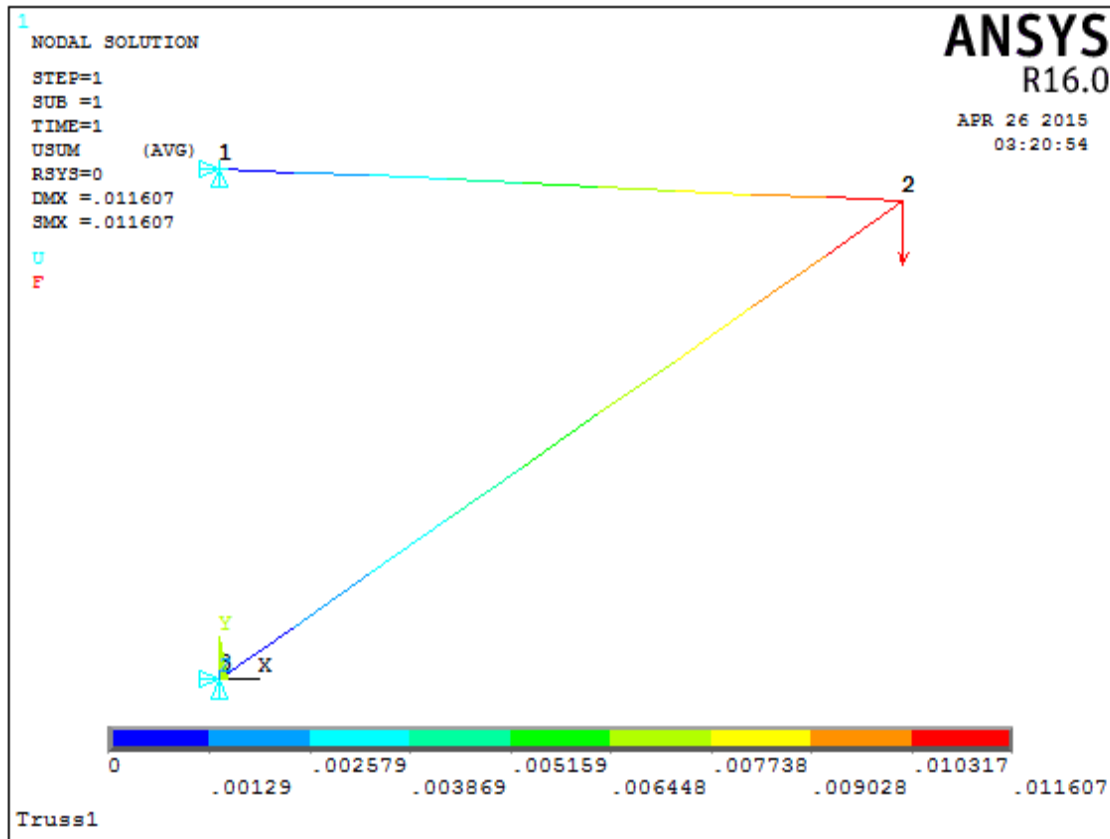
نتایج جا به جایی گره ها :



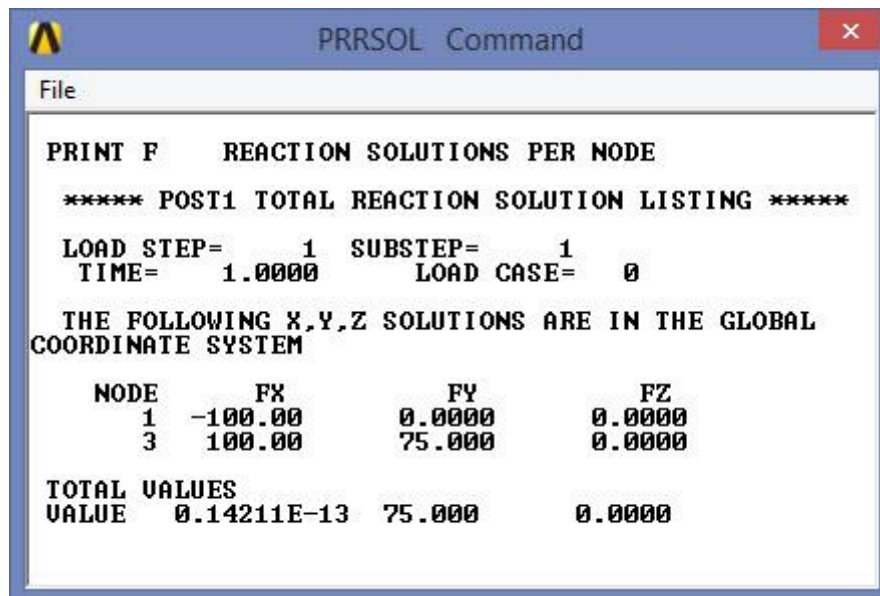
سازه تغییر شکل یافته :



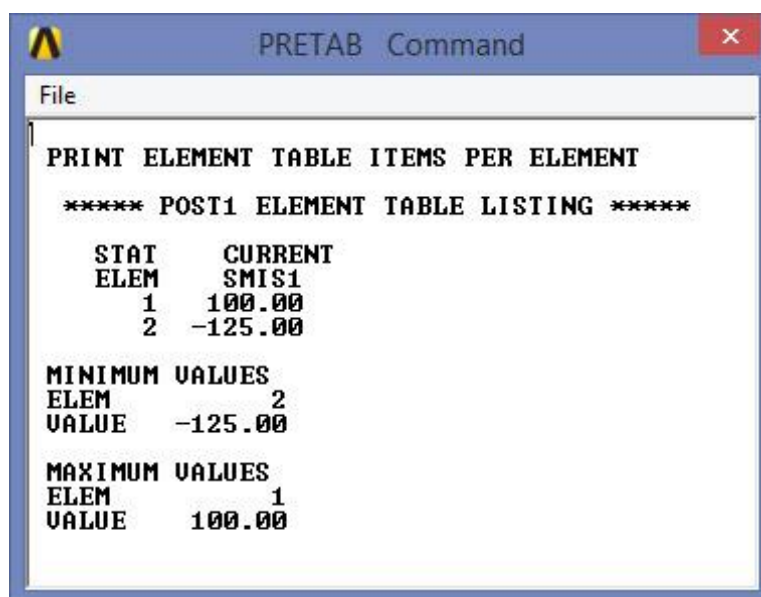
کنتور برآیند جا به جایی :



نتایج عکس العمل تکیه گاه :



نتایج نیروهای داخلی هر عضو :



بردار نیرو کلی محاسبه شده توسط ANSYS :

***** LOAD VECTOR NUMBER 1 *****

ROW NODE DIR VALUE

```

1      2 UX  0.000000
2      2 UY -75.000000
    
```

ماتریس سختی کلی محاسبه شده توسط ANSYS :

***** STIFFNESS MATRIX *****

ROW 1 NODE 2 DEG. OF. FR. = UX

```

1 0.52920000E+05 2 0.13440000E+05
    
```

ROW 2 NODE 2 DEG. OF. FR. = UY

```

1 0.13440000E+05 2 0.10080000E+05
    
```

خرپای صفحه‌ای ساده (ماتریس‌های کاهش یافته، حل سیستم به روش مستقیم)

در مسئله قبل مطلوبست حل مجدد قسمت الف، ب و ج با استفاده از ماتریس‌های کاهش یافته.

پیش فرض های مسئله و روابط برای هر المان :

$$E = 70 \text{ GPa} = 70 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$$

$$A = 2000 \text{ mm}^2 = 2000 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L = \sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{X_e - X_b}{L}$$

$$\sin(\theta) = \frac{Y_e - Y_b}{L}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = T^T \times k \times T$$

قسمت الف :

عضو ۱: گره ۱ به ۲

$$L = 4$$

$$\cos(\theta) = 1$$

$$\sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 35000 & -35000 \\ -35000 & 35000 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

عضو ۲: گره ۲ به ۳

$$L = 5$$

$$\cos(\theta) = \frac{0-4}{5} = -0.8$$

$$\sin(\theta) = \frac{0-3}{5} = -0.6$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 28000 & -28000 \\ -28000 & 28000 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

$$^{(2)}K = \begin{bmatrix} 17920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} kN/m$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} kN/m$$

با حل دستگاه زیر می توانیم مجهولات مسئله را بدست آوریم:

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} = 0 \\ P_{2y} = -75 \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} = 0 \\ \Delta_{1y} = 0 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} = 0 \\ \Delta_{3y} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -35000 & 0 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}^{-1} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -35000 & 0 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0028571 \\ -0.01125 \end{Bmatrix} m$$

قسمت ب :

$$P_s = K_{sf} \Delta_f + K_{ss} \Delta_s$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ -17920 & -13440 \\ -13440 & -10080 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ -17920 & -13440 \\ -13440 & -10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.0028571 \\ -0.01125 \end{Bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :

محاسبه نیروی داخلی اعضا :

$$F_{Global}^{(e)} = K \times \Delta^{(e)}$$

$$f_{Local}^{(e)} = T \times F_{Global}^{(e)}$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۱ :

$$F_{Global}^{(1)} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.002857 \\ -0.01125 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_{Local}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 100 \end{Bmatrix} kN$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۲ :

$$F_{Global}^{(2)} = \begin{bmatrix} 17920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.002857 \\ -0.01125 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

$$f_{Local}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -100 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 125 \\ -125 \end{Bmatrix}$$

خرپای صفحه‌ای ساده (حل سیستم به روش جریمه یا پنالتی)

در مسئله قبل مطلوبست حل مجدد قسمت الف و ب به روش جریمه.

با توجه به حل مسئله قبل ماتریس سختی اسمبل شده برابر است با :

$$K_{Original} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

قسمت الف :

مقدار پنالتی برابر است با حداکثر مقدار قطر اصلی ماتریس سختی اسمبل شده ضربدر 10^5

$$\pi = 52920 \times 10^5$$

درایه‌های قطر اصلی ماتریس مرتبط با درجات قفل و یا با جابجایی مشخص بایستی با عدد پنالتی جایگزین شوند.

$$K_{Penalty} = \begin{bmatrix} 52920 \times 10^5 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52920 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 52920 \times 10^5 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 52920 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

نکته: در روابط زیر هر چیزی که مقدار آن معلوم نیست، جای آن عدد صفر می‌گذاریم.

نیروهای گره‌ای معلوم را بدست می‌آوریم:

$$\{P_{Known}\} = \{P_{KnownExternalForce}\} - ([K_{Original}] \times \{\Delta_{Known}\})$$

$$\{P_{Known}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -75 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -75 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر تمامی جابجایی‌ها بدست می‌آیند:

$$\Delta_{all} = \left([K_{Penalty}]^{-1} \times \{P_{Known}\} \right) + \Delta_{Known}$$

$$\Delta_{all} = \begin{bmatrix} 52920 \times 10^5 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52920 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 52920 \times 10^5 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 52920 \times 10^5 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -75 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_{all} = \begin{Bmatrix} 1.89E-08 \\ 0 \\ 0.0028572 \\ -0.01125 \\ -1.89E-08 \\ -1.42E-08 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0028572 \\ -0.01125 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

قسمت ب :

برای بدست آوردن تمامی نیروها داریم:

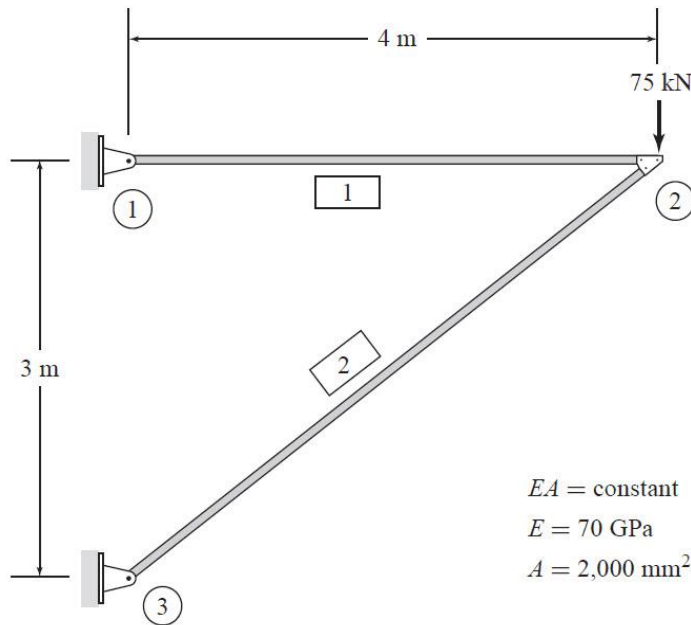
$$P_{all} = [K_{Original}] \times \Delta_{all}$$

$$P_{all} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1.89E-08 \\ 0 \\ 0.0028572 \\ -0.01125 \\ -1.89E-08 \\ -1.42E-08 \end{Bmatrix}$$

$$P_{all} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 3.07E-15 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} kN$$

خرپای صفحه‌ای با اثر نشست تکیه گاهی و جابجایی گره (حل سیستم به روش مستقیم)

در خرپای نشان داده شده تکیه گاه گره ۱ در جهت قائم ۲ میلی متر نشست و در جهت افقی ۱ میلی متر به سمت راست جابجا شده است مطلوبست :



- الف : تعیین تغییر مکان هر گره
ب : تعیین عکس العمل تکیه گاهی
ج : تعیین نیروی داخلی هر عضو

واحدهای حل مسئله همگی بر حسب متر و کیلو نیوتن می باشند.

$$EA = \text{constant}$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

$$A = 2,000 \text{ mm}^2$$

قسمت الف :

با توجه به مسئله قبل ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر می توانیم مجهولات مسئله را بدست آوریم:

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} = 0 \\ P_{2y} = -75 \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} = 0.001 \\ \Delta_{1y} = -0.002 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} = 0 \\ \Delta_{3y} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -35000 & 0 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}^{-1} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -35000 & 0 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 35 \\ -75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0038571 \\ -0.012583 \end{Bmatrix} m$$

قسمت ب :

$$P_s = K_{sf} \Delta_f + K_{ss} \Delta_s$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ -17920 & -13440 \\ -13440 & -10080 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ -17920 & -13440 \\ -13440 & -10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.0038571 \\ -0.012583 \end{Bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :

محاسبه نیروی داخلی اعضا :

$$F_{Global}^{(e)} = K^{(e)} \Delta^{(e)}$$

$$f_{Local}^{(e)} = T^{(e)} F_{Global}^{(e)}$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۱ :

$$F_{Global}^{(1)} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 35000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0.0038571 \\ -0.012583 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_{Local}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۲ :

$$F_{Global}^{(2)} = \begin{bmatrix} 17920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.0038571 \\ -0.012583 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

$$f_{Local}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & -0.8 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -100 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 125 \\ 0 \\ -125 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

خرپای صفحه‌ای ساده (حل سیستم به روش جریمه یا پنالتی)

در مسئله قبل مطلوبست حل مجدد قسمت الف و ب به روش جریمه.

با توجه به حل مسئله قبل ماتریس سختی اسمبل شده برابر است با :

$$K_{Original} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

قسمت الف :

مقدار پنالتی برابر است با حداکثر مقدار قطر اصلی ماتریس سختی اسمبل شده ضربدر 10^5

$$\pi = 52920 \times 10^5$$

درایه‌های قطر اصلی ماتریس مرتبط با درجات قفل و یا با جابجایی مشخص بایستی با عدد پنالتی جایگزین شوند.

$$K_{Penalty} = \begin{bmatrix} 52920 \times 10^5 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52920 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 52920 \times 10^5 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 52920 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

نکته: در روابط زیر هر چیزی که مقدار آن معلوم نیست، جای آن عدد صفر می‌گذاریم.

نیروهای گره‌ای معلوم را بدست می‌آوریم:

$$\{P_{Known}\} = \{P_{KnownExternalForce}\} - ([K_{Original}] \times \{\Delta_{Known}\})$$

$$\{P_{Known}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -75 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -35 \\ 0 \\ 35 \\ -75 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر تمامی جابجایی‌ها بدست می‌آیند:

$$\Delta_{all} = \left([K_{Penalty}]^{-1} \times \{P_{Known}\} \right) + \Delta_{Known}$$

$$\Delta_{all} = \begin{bmatrix} 52920 \times 10^5 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52920 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 52920 \times 10^5 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 52920 \times 10^5 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} -35 \\ 0 \\ 35 \\ -75 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_{all} = \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0.003857 \\ -0.01258 \\ -1.89E-08 \\ -1.42E-08 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0.003857 \\ -0.01258 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

قسمت ب :

برای بدست آوردن تمامی نیروها داریم:

$$P_{all} = [K_{Original}] \times \Delta_{all}$$

$$P_{all} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0.003857 \\ -0.01258 \\ -1.89E-08 \\ -1.42E-08 \end{Bmatrix}$$

$$P_{all} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 5.73E-15 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ -75 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} kN$$

خرپای صفحه‌ای ساده (حل سیستم به روش حذفی)

در مسئله قبل مطلوب‌ست حل مجدد قسمت الف به روش حذفی

با توجه به حل مسئله قبل ماتریس سختی اسمبل شده برابر است با :

$$K_{Original} = \begin{bmatrix} 35000 & 0 & -35000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35000 & 0 & 52920 & 13440 & -17920 & -13440 \\ 0 & 0 & 13440 & 10080 & -13440 & -10080 \\ 0 & 0 & -17920 & -13440 & 17920 & 13440 \\ 0 & 0 & -13440 & -10080 & 13440 & 10080 \end{bmatrix}$$

قسمت الف :

- (۱) سطرهای مربوط به درجات مقید شده را از سختی و نیرو حذف می‌کنیم. ۱، ۲، ۵، ۶
- (۲) درجات مقید شده با جابجایی صفر را از ستون سختی و سطر جابجایی حذف می‌کنیم. ۵ و ۶
- (۳) ستون‌های باقی‌مانده از درجات مقید شده با جابجایی غیر صفر (۱ و ۲) را در بردار جابجایی مربوط به این درجات ضرب می‌کنیم و حاصل را از نیروهای گره‌ای باقی‌مانده کم می‌کنیم.

دستگاه به فرم زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \end{Bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \end{Bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 52920 & 13440 \\ 13440 & 10080 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 35 \\ -75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0038571 \\ -0.012583 \end{Bmatrix} m$$

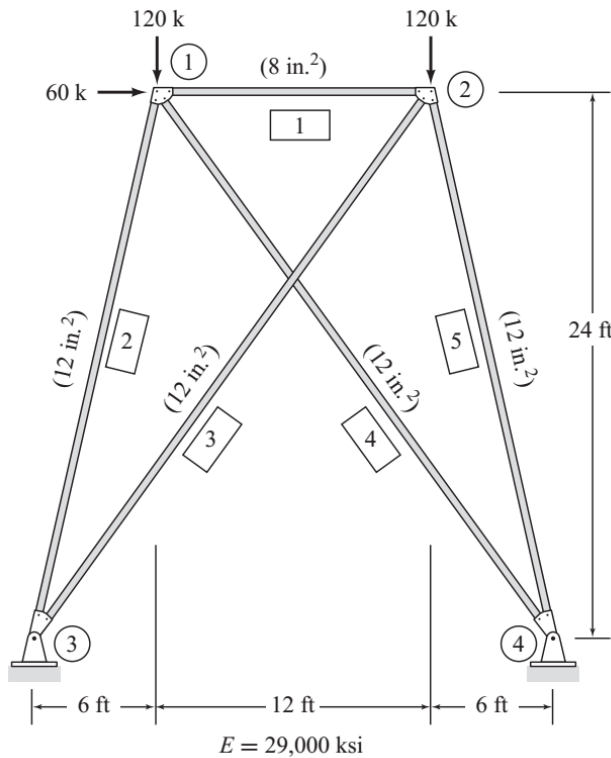
قسمت ب :

برای بدست آوردن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی داریم:

- (۱) سطرهای مربوط به درجات آزاد را حذف می‌کنیم. ۳ و ۴
- (۲) درجات مقید شده با جابجایی صفر را از ستون سختی و سطر جابجایی حذف می‌کنیم. ۵ و ۶

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ -17920 & -13440 \\ -13440 & -10080 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.0038571 \\ -0.012583 \end{Bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 35000 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} kN$$

خرپای صفحه‌ای ساده (حل سیستم به روش مستقیم)



در خرپای نشان داده شده مطلوبست :

الف : تعیین تغییر مکان هر گره

ب : تعیین عکس العمل تکیه گاهی

واحدهای حل مسئله همگی بر حسب اینچ و کیلو پوند (کیپس) می باشند.

روابط برای هر المان :

$$E = 29000 \text{ ksi} = 29000 \frac{\text{Kips}}{\text{in}^2}$$

$$L = \sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{X_e - X_b}{L}$$

$$\sin(\theta) = \frac{Y_e - Y_b}{L}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = T^T \times k \times T$$

المان	گره ابتدا	گره انتها	X_b	X_e	Y_b	Y_e	L	Cos(θ)	Sin(θ)
1	1	2	72	216	288	288	144	1	0
2	1	3	72	0	288	0	296.86361	-0.24254	-0.97014
3	2	3	216	0	288	0	360	-0.6	-0.8
4	1	4	72	288	288	0	360	0.6	-0.8
5	2	4	216	288	288	0	296.86361	0.24254	-0.97014

قسمت الف :

عضو ۱ :

$$^{(1)}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{(1)}k = \begin{bmatrix} 1611.11111 & 0.00000 & -1611.11111 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -1611.11111 & 0.00000 & 1611.11111 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$^{(1)}K = \begin{bmatrix} 1611.11111 & 0.00000 & -1611.11111 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -1611.11111 & 0.00000 & 1611.11111 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

عضو ۲ :

$$^{(2)}T = \begin{bmatrix} -0.24254 & -0.97014 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.97014 & -0.24254 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.24254 & -0.97014 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.97014 & -0.24254 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}k = \begin{bmatrix} 1172.25552 & 0.00000 & -1172.25552 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -1172.25552 & 0.00000 & 1172.25552 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}K = \begin{bmatrix} 68.95621 & 275.82483 & -68.95621 & -275.82483 \\ 275.82483 & 1103.29931 & -275.82483 & -1103.29931 \\ -68.95621 & -275.82483 & 68.95621 & 275.82483 \\ -275.82483 & -1103.29931 & 275.82483 & 1103.29931 \end{bmatrix}$$

عضو ۳ :

$$^{(3)}T = \begin{bmatrix} -0.60000 & -0.80000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.80000 & -0.60000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.60000 & -0.80000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.80000 & -0.60000 \end{bmatrix}$$

$$^{(3)}_k = \begin{bmatrix} 966.66667 & 0.00000 & -966.66667 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -966.66667 & 0.00000 & 966.66667 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$^{(3)}_K = \begin{bmatrix} 348.00000 & 464.00000 & -348.00000 & -464.00000 \\ 464.00000 & 618.66667 & -464.00000 & -618.66667 \\ -348.00000 & -464.00000 & 348.00000 & 464.00000 \\ -464.00000 & -618.66667 & 464.00000 & 618.66667 \end{bmatrix}$$

عضو ۴ :

$$^{(4)}_T = \begin{bmatrix} 0.60000 & -0.80000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.80000 & 0.60000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.60000 & -0.80000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.80000 & 0.60000 \end{bmatrix}$$

$$^{(4)}_k = \begin{bmatrix} 966.66667 & 0.00000 & -966.66667 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -966.66667 & 0.00000 & 966.66667 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$^{(4)}_K = \begin{bmatrix} 348.00000 & -464.00000 & -348.00000 & 464.00000 \\ -464.00000 & 618.66667 & 464.00000 & -618.66667 \\ -348.00000 & 464.00000 & 348.00000 & -464.00000 \\ 464.00000 & -618.66667 & -464.00000 & 618.66667 \end{bmatrix}$$

عضو ۵ :

$$^{(5)}_T = \begin{bmatrix} 0.24254 & -0.97014 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.97014 & 0.24254 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.24254 & -0.97014 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.97014 & 0.24254 \end{bmatrix}$$

$$^{(5)}_k = \begin{bmatrix} 1172.25552 & 0.00000 & -1172.25552 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -1172.25552 & 0.00000 & 1172.25552 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$^{(5)}_K = \begin{bmatrix} 68.95621 & -275.82483 & -68.95621 & 275.82483 \\ -275.82483 & 1103.29931 & 275.82483 & -1103.29931 \\ -68.95621 & 275.82483 & 68.95621 & -275.82483 \\ 275.82483 & -1103.29931 & -275.82483 & 1103.29931 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 2028.0673 & -188.1752 & -1611.1111 & 0.0000 & -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & 464.0000 \\ -188.1752 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 & -275.8248 & -1103.2993 & 464.0000 & -618.6667 \\ -1611.1111 & 0.0000 & 2028.0673 & 188.1752 & -348.0000 & -464.0000 & -68.9562 & 275.8248 \\ 0.0000 & 0.0000 & 188.1752 & 1721.9660 & -464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 \\ -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & -464.0000 & 416.9562 & 739.8248 & 0.0000 & 0.0000 \\ -275.8248 & -1103.2993 & -464.0000 & -618.6667 & 739.8248 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 \\ -348.0000 & 464.0000 & -68.9562 & 275.8248 & 0.0000 & 0.0000 & 416.9562 & -739.8248 \\ 464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 & 0.0000 & 0.0000 & -739.8248 & 1721.9660 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر می‌توانیم مجهولات مسئله را بدست آوریم:

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} = 60 \\ P_{1y} = -120 \\ P_{2x} = 0 \\ P_{2y} = -120 \\ P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{4x} \\ P_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2028.0673 & -188.1752 & -1611.1111 & 0.0000 & -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & 464.0000 \\ -188.1752 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 & -275.8248 & -1103.2993 & 464.0000 & -618.6667 \\ -1611.1111 & 0.0000 & 2028.0673 & 188.1752 & -348.0000 & -464.0000 & -68.9562 & 275.8248 \\ 0.0000 & 0.0000 & 188.1752 & 1721.9660 & -464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 \\ -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & -464.0000 & 416.9562 & 739.8248 & 0.0000 & 0.0000 \\ -275.8248 & -1103.2993 & -464.0000 & -618.6667 & 739.8248 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 \\ -348.0000 & 464.0000 & -68.9562 & 275.8248 & 0.0000 & 0.0000 & 416.9562 & -739.8248 \\ 464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 & 0.0000 & 0.0000 & -739.8248 & 1721.9660 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} = 0 \\ \Delta_{3y} = 0 \\ \Delta_{4x} = 0 \\ \Delta_{4y} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 2028.0673 & -188.1752 & -1611.1111 & 0.0000 \\ -188.1752 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1611.1111 & 0.0000 & 2028.0673 & 188.1752 \\ 0.0000 & 0.0000 & 188.1752 & 1721.9660 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & 464.0000 \\ -275.8248 & -1103.2993 & 464.0000 & -618.6667 \\ -348.0000 & -464.0000 & -68.9562 & 275.8248 \\ -464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 2028.0673 & -188.1752 & -1611.1111 & 0.0000 \\ -188.1752 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1611.1111 & 0.0000 & 2028.0673 & 188.1752 \\ 0.0000 & 0.0000 & 188.1752 & 1721.9660 \end{bmatrix}^{-1} \dots$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} 60 \\ -120 \\ 0 \\ -120 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & 464.0000 \\ -275.8248 & -1103.2993 & 464.0000 & -618.6667 \\ -348.0000 & -464.0000 & -68.9562 & 275.8248 \\ -464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_f = \begin{bmatrix} 2028.0673 & -188.1752 & -1611.1111 & 0.0000 \\ -188.1752 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1611.1111 & 0.0000 & 2028.0673 & 188.1752 \\ 0.0000 & 0.0000 & 188.1752 & 1721.9660 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 60 \\ -120 \\ 0 \\ -120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08035 \\ -0.06091 \\ 0.07102 \\ -0.07745 \end{bmatrix} in$$

قسمت ب :

$$P_s = K_{sf} \Delta_f + K_{ss} \Delta_s$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & -464.0000 \\ -275.8248 & -1103.2993 & -464.0000 & -618.6667 \\ -348.0000 & 464.0000 & -68.9562 & 275.8248 \\ 464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 416.9562 & 739.8248 & 0.0000 & 0.0000 \\ 739.8248 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 416.9562 & -739.8248 \\ 0.0000 & 0.0000 & -739.8248 & 1721.9660 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{4x} \\ P_{4y} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -68.9562 & -275.8248 & -348.0000 & -464.0000 \\ -275.8248 & -1103.2993 & -464.0000 & -618.6667 \\ -348.0000 & 464.0000 & -68.9562 & 275.8248 \\ 464.0000 & -618.6667 & 275.8248 & -1103.2993 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.08035 \\ -0.06091 \\ 0.07102 \\ -0.07745 \end{bmatrix} \right) \dots$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 416.9562 & 739.8248 & 0.0000 & 0.0000 \\ 739.8248 & 1721.9660 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 416.9562 & -739.8248 \\ 0.0000 & 0.0000 & -739.8248 & 1721.9660 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{4x} \\ P_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.4817 \\ 60.0000 \\ -82.4817 \\ 180.0000 \end{Bmatrix}$$

خرپای صفحه‌ای ساده (ماتریس‌های کاهش یافته، حل سیستم به روش مستقیم)

مطلوبست محاسبه ماتریس سختی اعضای مسئله قبل با استفاده از ماتریس‌های کاهش یافته.

روابط برای هر المان :

$$L = \sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2} \quad \cos(\theta) = \frac{X_e - X_b}{L} \quad \sin(\theta) = \frac{Y_e - Y_b}{L}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad K = T^T \times k \times T$$

المان	گره ابتدا	گره انتها	X_b	X_e	Y_b	Y_e	L	Cos(θ)	Sin(θ)
1	1	2	72	216	288	288	144	1	0
2	1	3	72	0	288	0	296.86361	-0.24254	-0.97014
3	2	3	216	0	288	0	360	-0.6	-0.8
4	1	4	72	288	288	0	360	0.6	-0.8
5	2	4	216	288	288	0	296.86361	0.24254	-0.97014

قسمت الف :

عضو ۱ :

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 1611.11111 & -1611.11111 \\ -1611.11111 & 1611.11111 \end{bmatrix}$$

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1611.11111 & 0.00000 & -1611.11111 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -1611.11111 & 0.00000 & 1611.11111 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

عضو ۲ :

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.24254 & -0.97014 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.24254 & -0.97014 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1172.25552 & -1172.25552 \\ -1172.25552 & 1172.25552 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 68.95621 & 275.82483 & -68.95621 & -275.82483 \\ 275.82483 & 1103.29931 & -275.82483 & -1103.29931 \\ -68.95621 & -275.82483 & 68.95621 & 275.82483 \\ -275.82483 & -1103.29931 & 275.82483 & 1103.29931 \end{bmatrix}$$

عضو ۳ :

$$^{(3)}T = \begin{bmatrix} -0.60000 & -0.80000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.60000 & -0.80000 \end{bmatrix} \quad ^{(3)}k = \begin{bmatrix} 966.66667 & -966.66667 \\ -966.66667 & 966.66667 \end{bmatrix}$$

$$^{(3)}K = \begin{bmatrix} 348.00000 & 464.00000 & -348.00000 & -464.00000 \\ 464.00000 & 618.66667 & -464.00000 & -618.66667 \\ -348.00000 & -464.00000 & 348.00000 & 464.00000 \\ -464.00000 & -618.66667 & 464.00000 & 618.66667 \end{bmatrix}$$

عضو ۴ :

$$^{(4)}T = \begin{bmatrix} 0.60000 & -0.80000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.60000 & -0.80000 \end{bmatrix} \quad ^{(4)}k = \begin{bmatrix} 966.66667 & -966.66667 \\ -966.66667 & 966.66667 \end{bmatrix}$$

$$^{(4)}K = \begin{bmatrix} 348.00000 & -464.00000 & -348.00000 & 464.00000 \\ -464.00000 & 618.66667 & 464.00000 & -618.66667 \\ -348.00000 & 464.00000 & 348.00000 & -464.00000 \\ 464.00000 & -618.66667 & -464.00000 & 618.66667 \end{bmatrix}$$

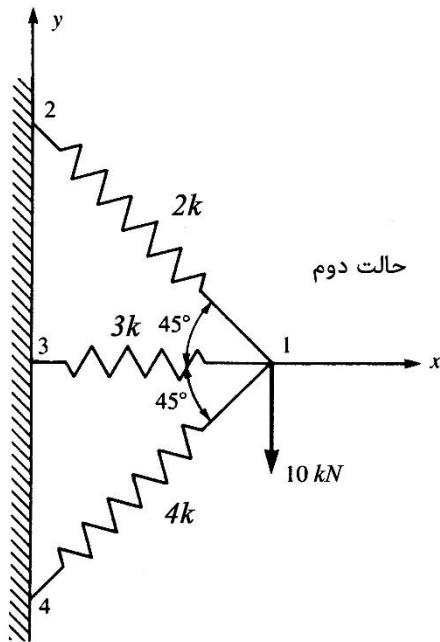
عضو ۵ :

$$^{(5)}T = \begin{bmatrix} 0.24254 & -0.97014 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.24254 & -0.97014 \end{bmatrix} \quad ^{(5)}k = \begin{bmatrix} 1172.25552 & -1172.25552 \\ -1172.25552 & 1172.25552 \end{bmatrix}$$

$$^{(5)}K = \begin{bmatrix} 68.95621 & -275.82483 & -68.95621 & 275.82483 \\ -275.82483 & 1103.29931 & 275.82483 & -1103.29931 \\ -68.95621 & 275.82483 & 68.95621 & -275.82483 \\ 275.82483 & -1103.29931 & -275.82483 & 1103.29931 \end{bmatrix}$$

فنر انتقالی

مطلوبست تعیین جابجایی گره ۱ در سازه نشان داده شده و حل دستگاه به روش Gauss-Jordan :



حل: برای انجام سریع‌تر محاسبات می‌توان اثرات سختی فنر را تنها در گره ۱ محاسبه کنیم و از گره ۲، ۳ و ۴ که مقید می‌باشند صرف‌نظر کنیم (معادل با روش حذفی). ماتریس سختی و ماتریس انتقال برای یک گره فنر به صورت زیر می‌باشند:

$$t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad k_{local} = k_{spring} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_{global} = t^T \times k_{local} \times t$$

نکته: برای محاسبه θ برای هر عضو بایستی زاویه بین محور X کلی و x محلی را پیدا کنیم (پادساعتگرد مثبت، ساعتگرد منفی).

عضو ۱: گره ۲ به ۱

$$\theta = -45^\circ$$

$$t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

عضو ۲: گره ۳ به ۱

$$\theta = 0^\circ$$

$${}^{(2)}t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{(2)}k = \begin{pmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{(2)}K = \begin{pmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عضو ۳: گره ۴ به ۱

$${}^{(3)}\theta = 45^\circ$$

$${}^{(3)}t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad {}^{(3)}k = \begin{pmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{(3)}K = \begin{pmatrix} 2k & 2k \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده:

$$K = {}^{(1)}K + {}^{(2)}K + {}^{(3)}K = \begin{pmatrix} 6k & k \\ k & 3k \end{pmatrix}$$

با حل دستگاه زیر جابجایی‌ها بدست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 6k & k \\ k & 3k \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{Bmatrix}$$

حل دستگاه به روش حذفی Gauss-Jordan:

$$G = \left\{ \begin{array}{c} [K \mid P] \\ \Downarrow \\ [I \mid \Delta] \end{array} \right.$$

ماتریس افزوده برابر است با:

$$G = [K \mid P] = \left[\begin{array}{cc|c} 6k & k & 0 \\ k & 3k & -10 \end{array} \right]$$

سطر اول تقسیم بر $G_{11} = 6k$ می‌کنیم:

$$G = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ k & 3k & -10 \end{array} \right]$$

حال بایستی درایه‌های ستون اول به جز سطر اول صفر شوند، پس سطر اول را در $G_{21} = k$ ضرب می‌کنیم و حاصل را از سطر دوم کم می‌کنیم:

$$G = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{17k}{6} & -10 \end{array} \right]$$

سطر دوم تقسیم بر $G_{22} = \frac{17k}{6}$ می‌کنیم:

$$G = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{60}{17k} \end{array} \right]$$

حال بایستی درایه‌های ستون دوم به جز سطر دوم صفر شوند، پس سطر دوم را در $G_{12} = \frac{1}{6}$ ضرب می‌کنیم و حاصل را از سطر اول کم می‌کنیم:

$$G = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{10}{17k} \\ 0 & 1 & -\frac{60}{17k} \end{array} \right] = [I \mid \Delta]$$

در نتیجه مجهولات دستگاه برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{10}{17k} \\ -\frac{60}{17k} \end{Bmatrix}$$

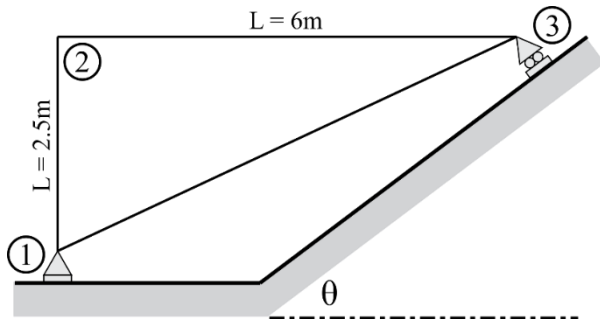
خرپای صفحه ای با تکیه گاه مورب

در خرپای نشان داده شده مطلوبست تعیین زاویه θ از سطح شیبدار با استفاده از اطلاعات داده شده در شکل زیر :

المان ۱ : گره ۱ به ۲ ، المان ۲ : گره ۲ به ۳ ، المان ۳ : گره ۱ به ۳

$$E = 200 \text{ Gpa}$$

$$A = 5000 \text{ mm}^2$$



$${}^{(2)}F_{Global} = \begin{Bmatrix} \frac{16259}{24} \\ 0 \\ -\frac{16259}{24} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad {}^{(3)}F_{Global} = \begin{Bmatrix} \frac{32518}{63} \\ -\frac{26023}{121} \\ \frac{32518}{63} \\ \frac{26023}{121} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_{2x} = \frac{157}{22223}, \quad \Delta_{2y} = -\frac{1}{400}$$

حل:

برای عضو ۲ داریم:

$${}^{(2)}T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^{(2)}k = \begin{pmatrix} 166666.6667 & -166666.6667 \\ -166666.6667 & 166666.6667 \end{pmatrix}$$

$${}^{(2)}K = \begin{pmatrix} 166666.6667 & 0 & -166666.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -166666.6667 & 0 & 166666.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{16259}{24} \\ 0 \\ -\frac{16259}{24} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 166666.6667 & 0 & -166666.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -166666.6667 & 0 & 166666.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{157}{22223} \\ -\frac{1}{400} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{16259}{24} = (166666.6667 \quad -166666.6667) \times \begin{pmatrix} \frac{157}{22223} \\ \Delta_{3x} \end{pmatrix}$$

$$677.45833 = 1177.45879 - 166666.6667\Delta_{3x}$$

$$\Delta_{3x} = 0.00300000273365432 \text{ m}$$

برای عضو ۳ داریم:

$$^{(3)}L = 6.5 \text{ m}$$

$$^{(3)}T = \begin{pmatrix} 0.92308 & 0.38462 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.92308 & 0.38462 \end{pmatrix}$$

$$^{(3)}k = \begin{pmatrix} 153846.1538 & -153846.1538 \\ -153846.1538 & 153846.1538 \end{pmatrix}$$

$$^{(3)}K = \begin{pmatrix} 131087.8471 & 54619.93628 & -131087.8471 & -54619.93628 \\ 54619.93628 & 22758.30678 & -54619.93628 & -22758.30678 \\ -131087.8471 & -54619.93628 & 131087.8471 & 54619.93628 \\ -54619.93628 & -22758.30678 & 54619.93628 & 22758.30678 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{32518}{63} \\ -\frac{26023}{121} \\ \frac{32518}{63} \\ \frac{26023}{121} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 131087.8471 & 54619.93628 & -131087.8471 & -54619.93628 \\ 54619.93628 & 22758.30678 & -54619.93628 & -22758.30678 \\ -131087.8471 & -54619.93628 & 131087.8471 & 54619.93628 \\ -54619.93628 & -22758.30678 & 54619.93628 & 22758.30678 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{32518}{63} = [131087.8471 \quad 54619.93628] \times \begin{pmatrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{pmatrix}$$

$$516.15873 = 54619.9363\Delta_{3y} + 393.2639$$

$$\Delta_{3y} = 0.00224999952388571 \text{ m}$$

بنابراین بردار جابجایی در مختصات کلی برابر است با :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00706475273365432 \\ -0.0025 \\ 0.00300000273365432 \\ 0.00224999952388571 \end{pmatrix} \text{ m}$$

با توجه به مورب بودن تکیه‌گاه گره ۳ در اینجا جابجایی‌ها را برای گره ۳ به اندازه φ می‌چرخانیم.

نکته: با توجه به استفاده از ماتریس انتقال کاهش یافته، در مختصات محلی فقط یک درجه آزادی داریم که در جهت

X محلی می‌باشد. با توجه به نکته، فرض اولیه این است که تکیه‌گاه در جهت X کلی بوده و پس از چرخش به اندازه φ در جهت X محلی قفل شده است و جابجایی آن صفر است.

$$\mathbf{t}_{node}^3 = \{\cos(\varphi) \quad \sin(\varphi)\}$$

$$\mathbf{\delta}_{node}^3 = \mathbf{t}_{node}^3 \times \mathbf{\Delta}_{node}^3$$

$$0 = \{\cos(\varphi) \quad \sin(\varphi)\} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix}$$

$$0 = \Delta_{3x} \cos(\varphi) + \Delta_{3y} \sin(\varphi)$$

$$\varphi = -53.130133$$

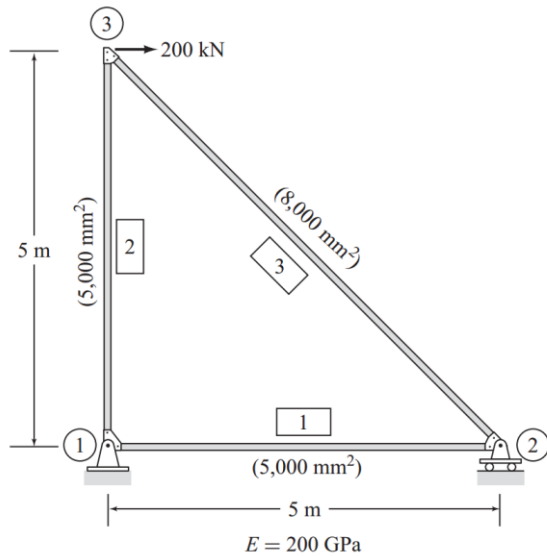
در نتیجه زاویه θ برابر است با:

$$90 = \theta + \varphi$$

$$\theta = 90 - 53.130133 = 36.86986$$

خرپای صفحه‌ای با اثر نشست تکیه‌گاهی (حل دستگاه به روش حذفی و جریمه)

در خریای نشان داده شده اگر گره ۲ در جهت قائم ۲ میلی متر نشست داشته باشد، مطلوبست :



الف) تعیین جابجایی گره‌ها با استفاده از روش حذفی.

ب) تعیین جابجایی گره‌ها با استفاده از روش جریمه.

حل :

عضو	ابتدا	انتهای	L	C	S	C ²	S ²	CS
1	1	2	5	1	0	1	0	0
2	1	3	5	0	1	0	1	0
3	2	3	5√2	- $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

ماتریس سختی اعضا :

$$^{(1)}K = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & -200000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -200000 & 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 & -200000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -200000 & 0 & 200000 \end{bmatrix}$$

$$^{(3)}K = \begin{bmatrix} 113137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 113137.085 \\ -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 113137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 113137.085 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده و حل دستگاه :

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ 0 \\ P_{2y} \\ 200 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 & 0 & 0 & -200000 \\ -200000 & 0 & 313137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & -200000 & 113137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 313137.085 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{2x} \\ -0.002 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix}$$

قسمت الف

- (۱) سطرهای مربوط به درجات مقید شده را از سختی و نیرو حذف می‌کنیم. ۱، ۲، ۴
- (۲) درجات مقید شده با جابجایی صفر را از ستون سختی و سطر جابجایی حذف می‌کنیم. ۱ و ۲
- (۳) ستون‌های سختی باقی‌مانده از درجات مقید شده با جابجایی غیر صفر (۴) را در بردار جابجایی مربوط به این درجات ضرب می‌کنیم و حاصل را از نیروهای گره‌ای باقی‌مانده کم می‌کنیم.

دستگاه به فرم زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{Bmatrix} - \left(-0.002 \times \begin{bmatrix} -113137.085 \\ 113137.085 \\ -113137.085 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 313137.085 & -113137.085 & 113137.085 \\ -113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 113137.085 & -113137.085 & 313137.085 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{3x} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 313137.085 & -113137.085 & 113137.085 \\ -113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 113137.085 & -113137.085 & 313137.085 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} -226.2742 \\ 426.2742 \\ -226.2742 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.001 \\ 0.00576777 \\ 0.001 \end{Bmatrix} m$$

قسمت ب

مقدار پنالتی برابر است با حداکثر مقدار قطر اصلی ماتریس سختی اسمبل شده ضربدر 10^5

$$\pi = 313137.085 \times 10^5$$

درایه‌های قطر اصلی ماتریس مرتبط با درجات قفل و یا با جابجایی مشخص بایستی با عدد پنالتی جایگزین شوند.

$$K_{Penalty} = \begin{bmatrix} 313137.085 \times 10^5 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 313137.085 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & -200000 \\ -200000 & 0 & 313137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 313137.085 \times 10^5 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & -200000 & 113137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 313137.085 \end{bmatrix}$$

نکته: در روابط زیر هر چیزی که مقدار آن معلوم نیست، جای آن عدد صفر می‌گذاریم.

نیروهای گره‌ای معلوم را بدست می آوریم:

$$\{P_{Known}\} = \{P_{KnownExternalForce}\} - ([K_{Original}] \times \{\Delta_{Known}\})$$

$$\{P_{Known}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 200000 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 & 0 & 0 & -200000 \\ -200000 & 0 & 313137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & -200000 & 113137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 313137.085 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -226.2742 \\ 226.2742 \\ 426.2742 \\ -226.2742 \end{Bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر تمامی جابجایی‌ها بدست می‌آیند:

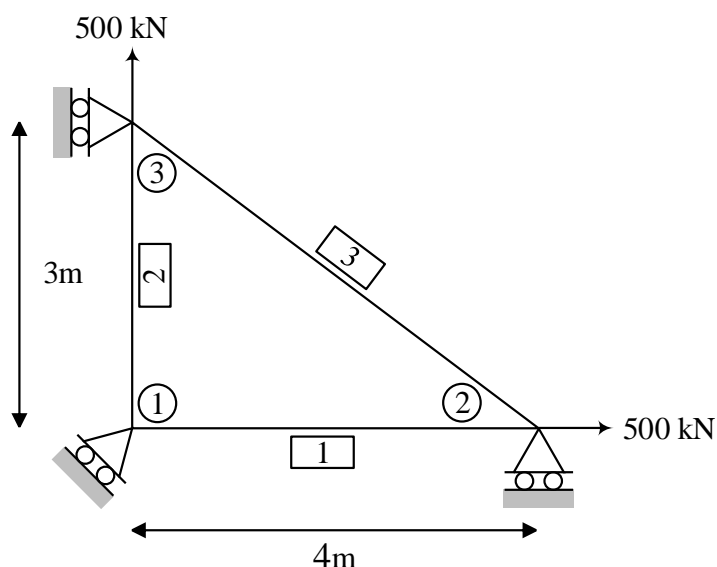
$$\Delta_{all} = ([K_{Penalty}]^{-1} \times \{P_{Known}\}) + \Delta_{Known}$$

$$\Delta_{all} = \begin{Bmatrix} 313137.085 \times 10^5 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 313137.085 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & -200000 \\ -200000 & 0 & 313137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 313137.085 \times 10^5 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & 0 & -113137.085 & 113137.085 & 113137.085 & -113137.085 \\ 0 & -200000 & 113137.085 & -113137.085 & -113137.085 & 313137.085 \end{Bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -226.2742 \\ 226.2742 \\ 426.2742 \\ -226.2742 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_{all} = \begin{Bmatrix} 6.39E-09 \\ 6.39E-09 \\ 0.00100001 \\ -0.002 \\ 0.00576779 \\ 0.00100001 \end{Bmatrix}$$

خرپای صفحه‌ای با تکیه گاه مورب

در خرپای نشان داده شده اگر گره ۱ به مقدار ۴۵ درجه چرخیده باشد، مطلوبست تعیین جابجایی گره‌ها:



$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$A_1 = 5000 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 5000 \text{ m}^2$$

$$A_3 = 8000 \text{ m}^2$$

حل :

عضو	ابتدا	انتهای	L	C	S	C ²	S ²	CS
1	1	2	4	1	0	1	0	0
2	1	3	3	0	1	0	1	0
3	2	3	5	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48

ماتریس سختی اعضا :

$$^{(1)}K = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & -250000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -250000 & 0 & 250000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 333333.33 & 0 & -333333.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -333333.33 & 0 & 333333.33 \end{bmatrix}$$

$$^{(3)}K = \begin{bmatrix} 204800 & -153600 & -204800 & 153600 \\ -153600 & 115200 & 153600 & -115200 \\ -204800 & 153600 & 204800 & -153600 \\ 153600 & -115200 & -153600 & 115200 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 333333.333 & 0 & 0 & 0 & -333333.333 \\ -250000 & 0 & 454800 & -153600 & -204800 & 153600 \\ 0 & 0 & -153600 & 115200 & 153600 & -115200 \\ 0 & 0 & -204800 & 153600 & 204800 & -153600 \\ 0 & -333333.333 & 153600 & -115200 & -153600 & 448533.333 \end{bmatrix}$$

روش اول: استفاده از روش Master-Slave

جهت چرخش گره ۱ مختصات محلی را در نظر می‌گیریم که به اندازه ۴۵ درجه ساعتگرد چرخیده است و ماتریس انتقال برای کل سازه بدین صورت تعریف می‌شود.

$$T_n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_n = T_n \times K \times T_n^T$$

$$K_n = \begin{bmatrix} 291666.667 & -41666.667 & -176776.695 & 0.000 & 0.000 & 235702.260 \\ -41666.667 & 291666.667 & -176776.695 & 0.000 & 0.000 & -235702.260 \\ -176776.695 & -176776.695 & 454800.000 & -153600.000 & -204800.000 & 153600.000 \\ 0.000 & 0.000 & -153600.000 & 115200.000 & 153600.000 & -115200.000 \\ 0.000 & 0.000 & -204800.000 & 153600.000 & 204800.000 & -153600.000 \\ 235702.260 & -235702.260 & 153600.000 & -115200.000 & -153600.000 & 448533.333 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه :

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 291666.667 & -176776.695 & 235702.260 \\ -176776.695 & 454800.000 & 153600.000 \\ 235702.260 & 153600.000 & 448533.333 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -41666.667 & 0.000 & 0.000 \\ -176776.695 & -153600.000 & -204800.000 \\ -235702.260 & -115200.000 & -153600.000 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 291666.667 & -176776.695 & 235702.260 \\ -176776.695 & 454800.000 & 153600.000 \\ 235702.260 & 153600.000 & 448533.333 \end{bmatrix}^{-1} \dots$$

$$\times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 500 \\ 500 \end{Bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -41666.667 & 0.000 & 0.000 \\ -176776.695 & -153600.000 & -204800.000 \\ -235702.260 & -115200.000 & -153600.000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_f = \begin{Bmatrix} -0.017678 \\ -0.0105 \\ 0.0140 \end{Bmatrix} m$$

از آنجا که چرخش بدست آمده برای درجه آزادی ۱ در جهت محور محلی مشخص شده از قبل (چرخش ۴۵ درجه) می‌باشد، برای بدست آوردن جابجایی‌ها در مختصات کلی داریم:

$$\Delta_{Global} = T_n^T \times \Delta_n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} -0.017678 \\ 0 \\ -0.0105 \\ 0 \\ 0 \\ 0.014 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0125 \\ 0.0125 \\ -0.0105 \\ 0 \\ 0 \\ 0.014 \end{Bmatrix} m$$

روش دوم: استفاده از روش Lagrange Multiplier و بلوک‌بندی به صورت ترکیبی

$$\Delta_1 \cos(45^\circ) + \Delta_2 \sin(45^\circ) = 0$$

$$K_{LM} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 333333.333 & 0 & 0 & 0 & -333333.333 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -250000 & 0 & 454800 & -153600 & -204800 & 153600 & 0 \\ 0 & 0 & -153600 & 115200 & 153600 & -115200 & 0 \\ 0 & 0 & -204800 & 153600 & 204800 & -153600 & 0 \\ 0 & -333333.333 & 153600 & -115200 & -153600 & 448533.333 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه :

نکته: در مختصات کلی درجات ۴ و ۵ قفل هستند. درجه آزادی ۱، ۲، ۳، ۶ و ۷ آزاد هستند.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \\ P_{2y} \\ P_{3x} \\ 500 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 333333.333 & 0 & 0 & 0 & -333333.333 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -250000 & 0 & 454800 & -153600 & -204800 & 153600 & 0 \\ 0 & 0 & -153600 & 115200 & 153600 & -115200 & 0 \\ 0 & 0 & -204800 & 153600 & 204800 & -153600 & 0 \\ 0 & -333333.333 & 153600 & -115200 & -153600 & 448533.333 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} = 0 \\ \Delta_{3x} = 0 \\ \Delta_{3y} \\ \lambda \end{Bmatrix}$$

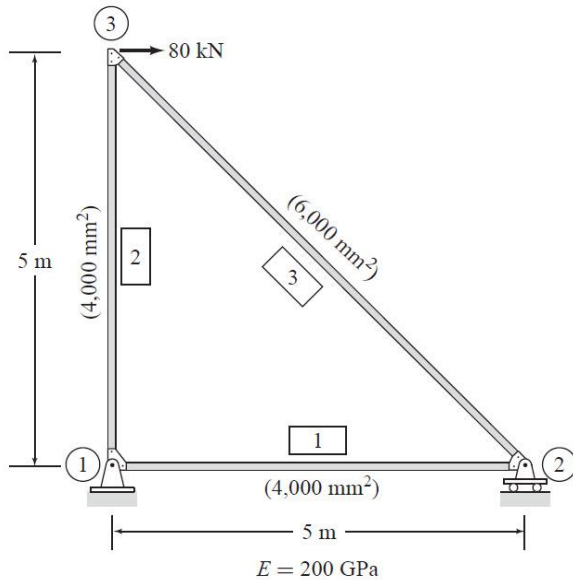
$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & -250000 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 333333.333 & 0 & -333333.333 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -250000 & 0 & 454800 & 153600 & 0 \\ 0 & -333333.333 & 153600 & 448533.333 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -153600 & -204800 \\ -115200 & -153600 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \\ 500 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Delta_s = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{3y} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & -250000 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 333333.333 & 0 & -333333.333 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -250000 & 0 & 454800 & 153600 & 0 \\ 0 & -333333.333 & 153600 & 448533.333 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \\ 500 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0125 \\ 0.0125 \\ -0.0105 \\ 0.014 \\ 707.1068 \end{Bmatrix}$$

خرپای صفحه‌ای با اثر حرارت یکنواخت

در خرپای نشان داده شده عضو ۳ تحت حرارت یکنواخت ۵۰ درجه سانتی گراد قرار دارد. تکیه گاه ۲ به اندازه ۲ میلی متر در جهت قائم نشست کرده است، مطلوب است :



الف) تعیین تغییر مکان هر گره

ب) تعیین عکس العمل تکیه گاه

ج) تعیین نیروی داخلی هر عضو

$$\alpha = 1.2 \times 10^{-5} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$$

$$A = 4000 \text{ mm}^2 = 4000 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A = 6000 \text{ mm}^2 = 6000 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

حل :

واحدهای حل مسئله همگی بر حسب متر و کیلو نیوتن می باشند.

قسمت الف

ماتریس سختی عضو ۱ : گره ۱ به ۲

$$L = 5$$

$$\cos(\theta) = 1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 160000 & 0 & -160000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -160000 & 0 & 160000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی عضو ۲ : گره ۱ به ۳

$$L = 5$$

$$\cos(\theta) = 0 \quad \sin(\theta) = 1$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160000 & 0 & -160000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -160000 & 0 & 160000 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی عضو ۳ : گره ۲ به ۳

$$L = 7.071067810$$

$$\cos(\theta) = -0.7071067810 \quad \sin(\theta) = 0.7071067810$$

$$T^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.707106781 & 0.707106781 & 0.000000000 & 0.000000000 \\ -0.707106781 & -0.707106781 & 0.000000000 & 0.000000000 \\ 0.000000000 & 0.000000000 & -0.707106781 & 0.707106781 \\ 0.000000000 & 0.000000000 & -0.707106781 & -0.707106781 \end{bmatrix}$$

$$K^{(3)} = \begin{bmatrix} 84852.81374 & -84852.8137 & -84852.8137 & 84852.81374 \\ -84852.8137 & 84852.81374 & 84852.81374 & -84852.8137 \\ -84852.8137 & 84852.81374 & 84852.81374 & -84852.8137 \\ 84852.81374 & -84852.8137 & -84852.8137 & 84852.81374 \end{bmatrix}$$

محاسبه نیروهای خارجی اعمال شده به اعضا :

عضو ۱ و ۲ :

$$F^{(1)} = F^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

عضو ۳، محاسبه حرارت یکنواخت در طول عضو :

$$FA_2 = -FA_3 = 200 \times 10^6 \times 6000 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^{-5} \times 50 = 720 \rightarrow f^f = \begin{Bmatrix} FA_2 \\ 0 \\ -FA_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 720 \\ 0 \\ -720 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T' \times f^f}$$

$$F^f = \begin{bmatrix} -0.707106781 & 0.707106781 & 0 & 0 \\ -0.707106781 & -0.707106781 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707106781 & 0.707106781 \\ 0 & 0 & -0.707106781 & -0.707106781 \end{bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} 720 \\ 0 \\ -720 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -509.116882 \\ 509.116882 \\ 509.116882 \\ -509.116882 \end{Bmatrix}$$

بردار نیروی اسمبل شده :

$$P^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -509.116882 \\ 509.116882 \\ 509.116882 \\ -509.116882 \end{Bmatrix} \quad P_f^f = \begin{Bmatrix} -509.116882 \\ 509.116882 \\ -509.116882 \end{Bmatrix} \quad P_s^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 509.1169 \end{Bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 160000 & 0 & -160000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160000 & 0 & 0 & 0 & -160000 \\ -160000 & 0 & 244852.81374 & -84852.81374 & -84852.81374 & 84852.81374 \\ 0 & 0 & -84852.81374 & 84852.81374 & 84852.81374 & -84852.81374 \\ 0 & 0 & -84852.81374 & 84852.81374 & 84852.81374 & -84852.81374 \\ 0 & -160000 & 84852.81374 & -84852.81374 & -84852.81374 & 244852.81374 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه :

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} = 0 \\ P_{2y} \\ P_{3x} = 80 \\ P_{3y} = 0 \end{Bmatrix} = \left([K] \times \begin{Bmatrix} d_{1x} = 0 \\ d_{1y} = 0 \\ d_{2x} \\ d_{2y} = -0.002 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} P_{1x}^f \\ P_{1y}^f \\ P_{2x}^f \\ P_{2y}^f \\ P_{3x}^f \\ P_{3y}^f \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 244852.81374 & -84852.81374 & 84852.81374 \\ -84852.81374 & 84852.81374 & -84852.81374 \\ 84852.81374 & -84852.81374 & 244852.81374 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -160000 & 0 & -84852.81374 \\ 0 & 0 & 84852.81374 \\ 0 & -160000 & -84852.81374 \end{bmatrix}$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -160000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -160000 \\ -84852.81374 & 84852.81374 & -84852.81374 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 160000 & 0 & 0 \\ 0 & 160000 & 0 \\ 0 & 0 & 84852.81374 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_s = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002 \end{Bmatrix} \quad \Delta_f = \begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{Bmatrix} \quad P_s = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} \quad P_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = \left(\begin{bmatrix} 244852.81374 & -84852.81374 & 84852.81374 \\ -84852.81374 & 84852.81374 & -84852.81374 \\ 84852.81374 & -84852.81374 & 244852.81374 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \dots$$

$$\dots \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -509.116882 \\ 509.116882 \\ -509.116882 \end{Bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -160000 & 0 & -84852.81374 \\ 0 & 0 & 84852.81374 \\ 0 & -160000 & -84852.81374 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002 \end{Bmatrix} \right) \right) =$$

$$(P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s)) = \begin{Bmatrix} 339.4113 \\ -259.4113 \\ 339.4113 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = \left(\begin{bmatrix} 244852.81374 & -84852.81374 & 84852.81374 \\ -84852.81374 & 84852.81374 & -84852.81374 \\ 84852.81374 & -84852.81374 & 244852.81374 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} 339.4113 \\ -259.4113 \\ 339.4113 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000500 \\ -0.002057 \\ 0.000500 \end{Bmatrix}$$

قسمت ب

به دست آوردن عکس العمل تکیه گاه :

$$P_s = K_{sf} \{\Delta_f\} + K_{ss} \{\Delta_s\} + P_s^f$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -160000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -160000 \\ -84852.81374 & 84852.81374 & -84852.81374 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.000500 \\ -0.002057 \\ 0.000500 \end{Bmatrix} \right) + \dots$$

$$\dots \left(\begin{bmatrix} 160000 & 0 & 0 \\ 0 & 160000 & 0 \\ 0 & 0 & 84852.81374 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 509.1169 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -80 \\ -80 \\ 80 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج

محاسبه نیروی داخلی اعضا :

$$F_{Global} = K^e \times \Delta^e$$

$$f_{Local} = T^e \times F_{Global} + f_{element}^f$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۱ :

$$F_{Global} = \begin{bmatrix} 160000 & 0 & -160000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -160000 & 0 & 160000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0005 \\ -0.002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -80 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_{Local} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -80 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -80 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۲ :

$$F_{Global} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160000 & 0 & -160000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -160000 & 0 & 160000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002057 \\ 0.0005 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix}$$

$$f_{Local} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -80 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

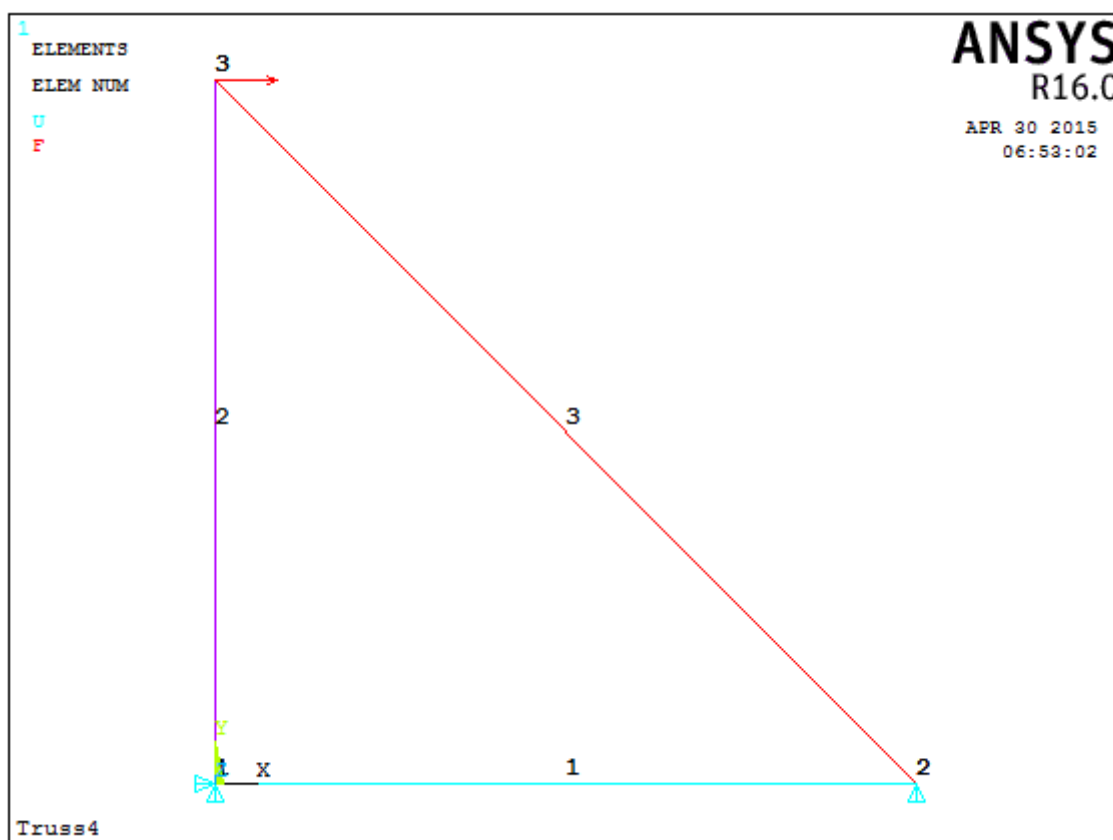
محاسبه نیروی داخلی عضو ۳ :

$$F_{Global} = \begin{bmatrix} 84852.81374 & -84852.8137 & -84852.8137 & 84852.81374 \\ -84852.8137 & 84852.81374 & 84852.81374 & -84852.8137 \\ -84852.8137 & 84852.81374 & 84852.81374 & -84852.8137 \\ 84852.81374 & -84852.8137 & -84852.8137 & 84852.81374 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.0005 \\ -0.002 \\ -0.002057 \\ 0.0005 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 429.11688 \\ -429.11688 \\ -429.11688 \\ 429.11688 \end{Bmatrix}$$

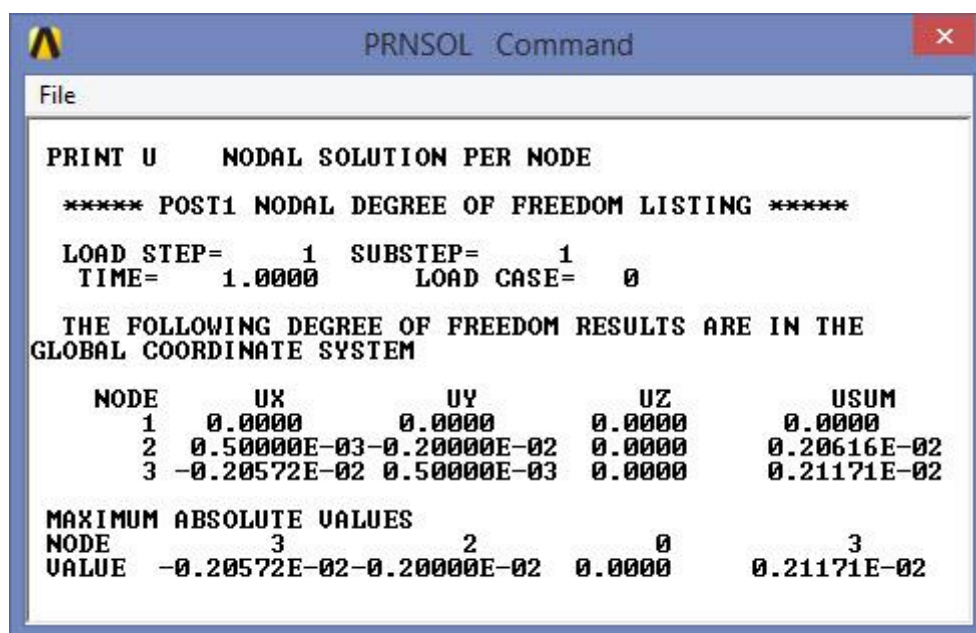
$$f_{Local} = \begin{bmatrix} -0.707106781 & 0.707106781 & 0.000000000 & 0.000000000 \\ -0.707106781 & -0.707106781 & 0.000000000 & 0.000000000 \\ 0.000000000 & 0.000000000 & -0.707106781 & 0.707106781 \\ 0.000000000 & 0.000000000 & -0.707106781 & -0.707106781 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 429.11688 \\ -429.11688 \\ -429.11688 \\ 429.11688 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 720 \\ 0 \\ -720 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 113.13708 \\ 0 \\ -113.1371 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری ANSYS v16

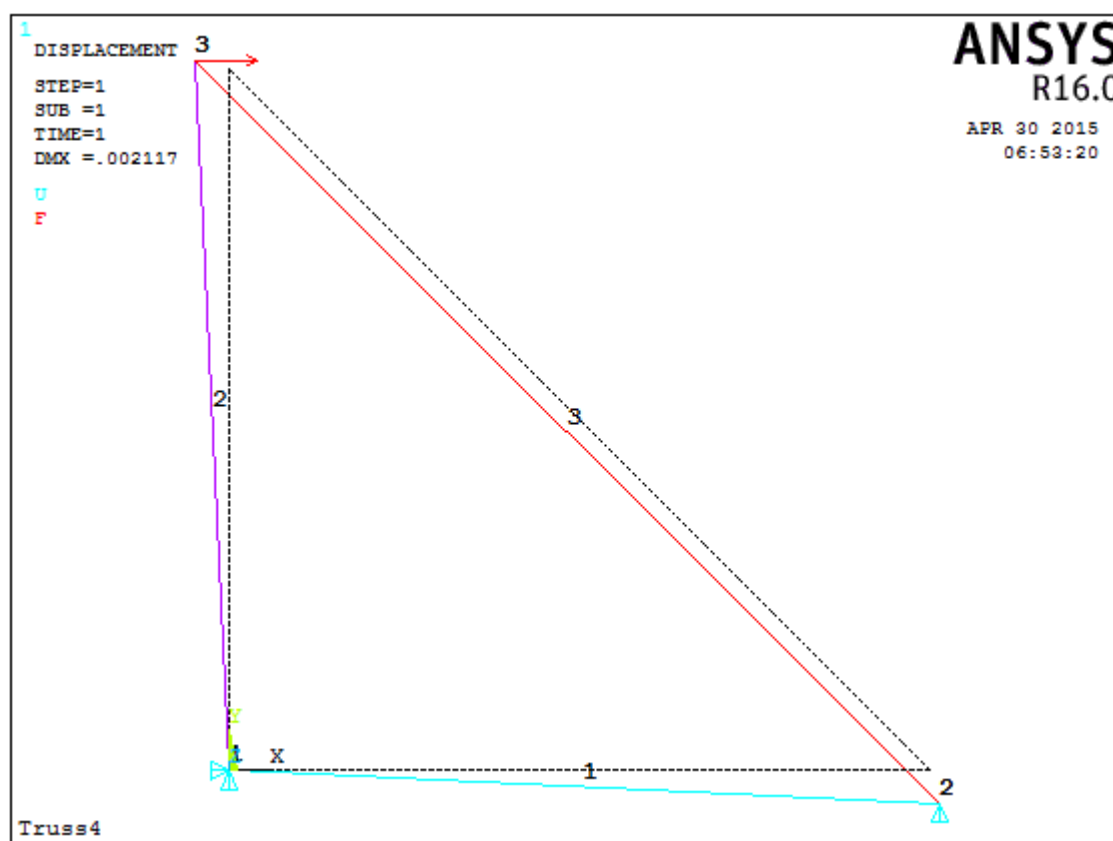
مدل سازه :



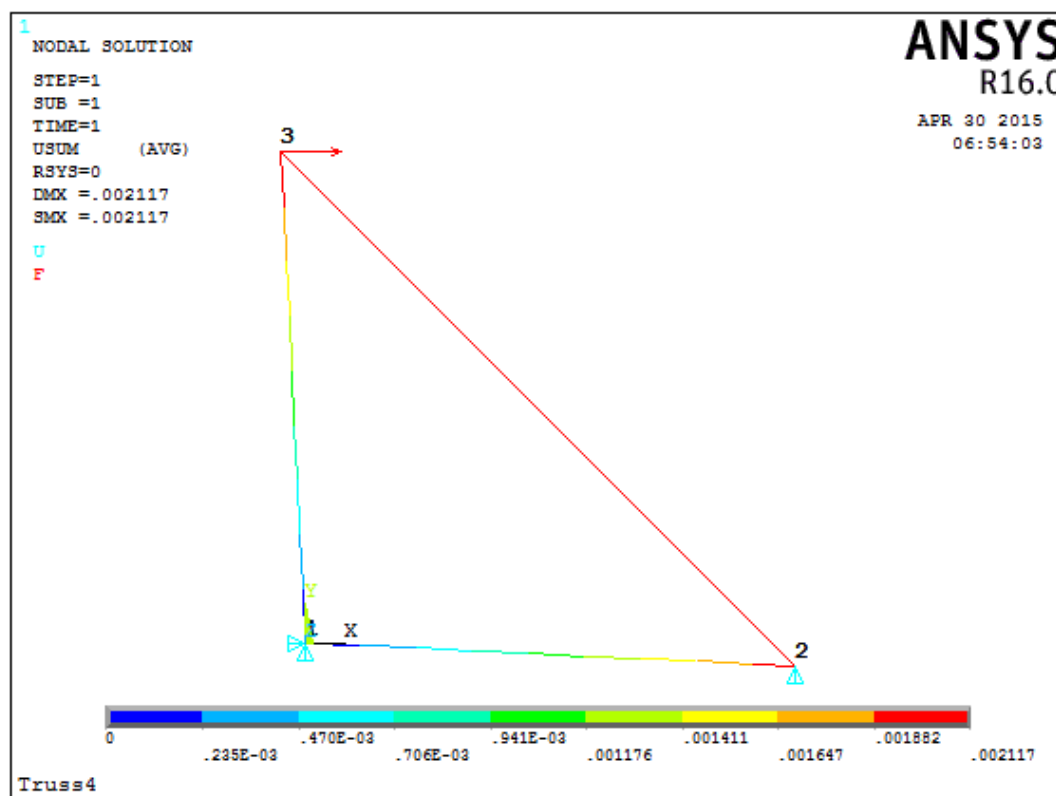
نتایج جا به جایی گره‌ها :



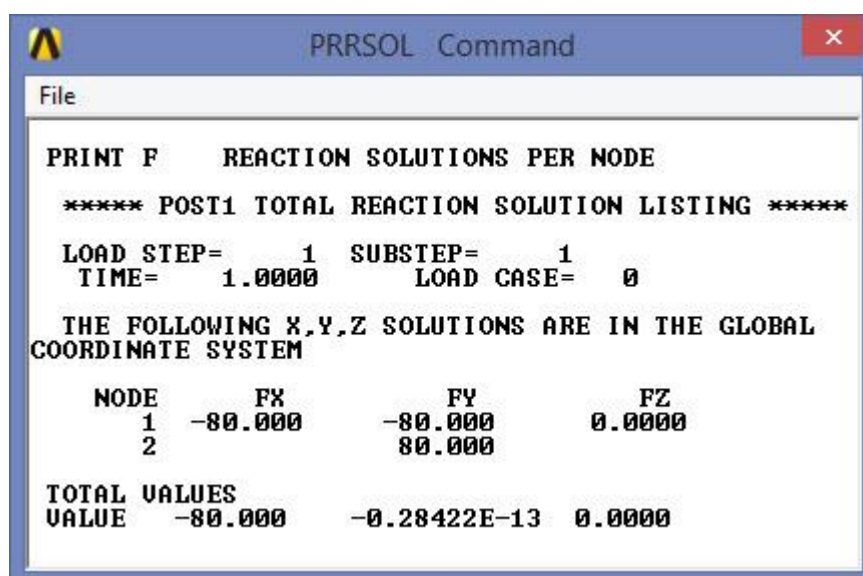
سازه تغییر شکل یافته :



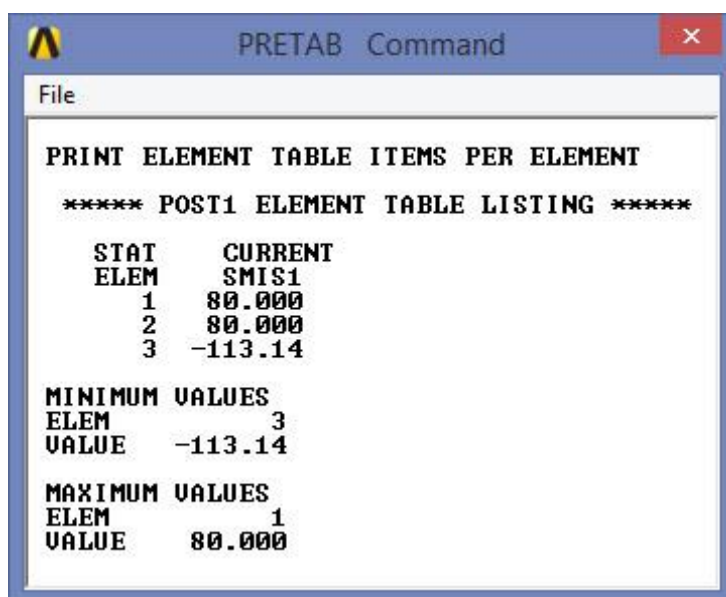
کنتور برآیند جا به جایی :



نتایج عکس العمل تکیه گاه :

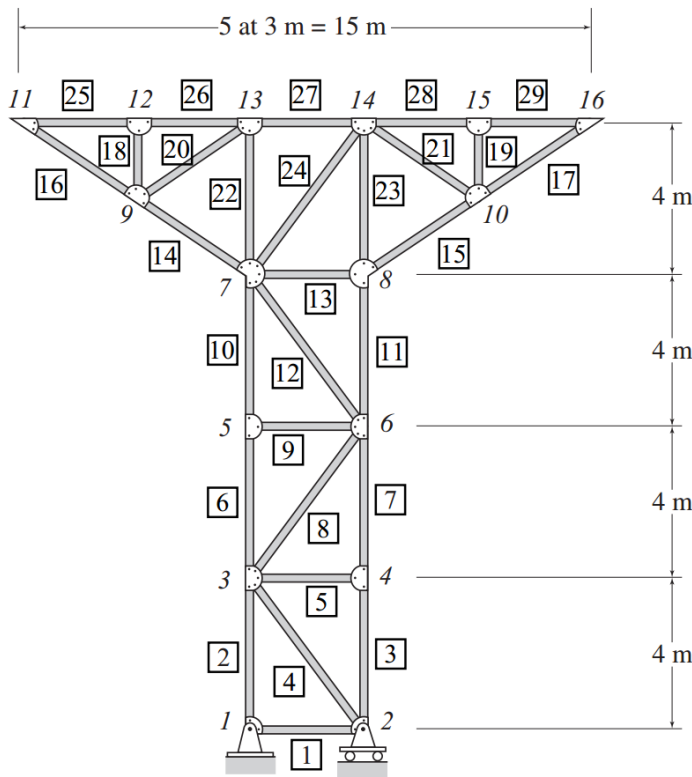


نتایج نیروهای داخلی هر عضو :



خرپای صفحه‌ای با نیروهای داخلی معلوم

در خرپای نشان داده شده مدول الاستیسیته و سطح مقطع برای همه اعضا یکسان و ثابت می‌باشد. مطلوبست تعیین:



الف) مقدار EA در سازه

ب) جابجایی گره ۸ در حالی که نیروی

محلی عضو ۱۳ برابر با $\frac{45}{8} kN$ فشاری،

نیروی محلی عضو ۲۳ برابر با $\frac{125}{12} kN$

فشاری و نیروی محلی عضو ۲۴ برابر با

$\frac{25}{3} kN$ کششی باشد و جابجایی‌های

زیر نیز مشخص باشند:

$$\Delta_{7x} = \frac{86}{7295} m \quad \Delta_{7y} = \frac{37}{30000} m$$

$$\Delta_{14x} = \frac{100}{5443} m \quad \Delta_{14y} = \frac{-22}{6911} m$$

حل: فرض می‌کنیم جهت عضو ۱۳ از گره ۷ به ۸ و عضو ۲۳ از گره ۸ به ۱۴ و عضو ۲۴ از گره ۷ به ۱۴ باشند.

واحدهای حل مسئله همگی بر حسب متر و کیلو نیوتن می‌باشند.

$$\begin{aligned} \Delta^{(24)} &= \begin{bmatrix} \frac{86}{7295} \\ \frac{37}{30000} \\ \frac{100}{5443} \\ \frac{-22}{6911} \end{bmatrix} & f^{(24)} &= \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} \\ \frac{25}{3} \end{bmatrix} & f^{(13)} &= \begin{bmatrix} \frac{45}{8} \\ -\frac{45}{8} \end{bmatrix} & f^{(23)} &= \begin{bmatrix} \frac{125}{12} \\ -\frac{125}{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

قسمت الف: معادله تعادل در عضو ۲۴: گره ۷ به ۱۴

$$\begin{cases} L = 5m \\ \cos(\theta) = \frac{3}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{4}{5} \end{cases} \quad T^{(24)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad k^{(24)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{5} & -\frac{EA}{5} \\ -\frac{EA}{5} & \frac{EA}{5} \end{bmatrix} kN/m$$

$$\delta^{(24)} = T^{(24)} \Delta^{(24)} = \begin{bmatrix} 0.008060004569 \\ 0.008476667984 \end{bmatrix} m$$

$$f^{(24)} = k^{(24)} \delta^{(24)} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} \\ \frac{25}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{5} & -\frac{EA}{5} \\ -\frac{EA}{5} & \frac{EA}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.008060004569 \\ 0.008476667984 \end{bmatrix}$$

$$\frac{25}{3} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{5} & \frac{EA}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.008060004569 \\ 0.008476667984 \end{bmatrix} \Rightarrow 8.333 \approx 0.00008333EA \Rightarrow EA \approx 100000 kN$$

قسمت ب :

معادله تعادل در عضو ۱۳ : گره ۷ به ۸

$$\begin{cases} L = 3m \\ \cos(\theta) = 1 \\ \sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad T^{(13)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad k^{(13)} = \begin{bmatrix} \frac{100000}{3} & -\frac{100000}{3} \\ -\frac{100000}{3} & \frac{100000}{3} \end{bmatrix} kN/m$$

$$\delta^{(13)} = T^{(13)} \Delta^{(13)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{86}{7295} \\ \frac{37}{30000} \\ \Delta_{8x} \\ \Delta_{8y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{86}{7295} \\ \Delta_{8x} \end{bmatrix} m$$

$$-\frac{45}{8} = \begin{bmatrix} -\frac{100000}{3} & \frac{100000}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{86}{7295} \\ \Delta_{8x} \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{45}{8} = \frac{100000\Delta_{8x}}{3} - \frac{1720000}{4377} \Rightarrow \Delta_{8x} = 0.01162m$$

معادله تعادل در عضو ۲۳ : گره ۸ به ۱۴

$$\begin{cases} L = 4m \\ \cos(\theta) = 0 \\ \sin(\theta) = 1 \end{cases} \quad T^{(23)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad k^{(23)} = \begin{bmatrix} 25000 & -25000 \\ -25000 & 25000 \end{bmatrix} kN/m$$

$$\delta^{(23)} = T^{(23)} \Delta^{(23)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{8x} \\ \Delta_{8y} \\ \frac{100}{5443} \\ -\frac{22}{6911} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{8y} \\ -\frac{22}{6911} \end{bmatrix} m$$

$$-\frac{125}{12} = \begin{bmatrix} -25000 & 25000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{8y} \\ -\frac{22}{6911} \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{125}{12} = -25000\Delta_{8y} - \frac{550000}{6911} \Rightarrow \Delta_{8y} = -0.002766m$$