



دانشگاه شهید باهنر کرمان  
دانشکده فنی و مهندسی  
بخش عمران

سعید شجاعی  
علیرضا قربی

وب سایت:  
[www.ghorbi.com](http://www.ghorbi.com)



# تحلیل سازه‌ها ۲

قاب صفحه‌ای (۲ بعدی)

## روابط قاب بدون در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی (اویلر)

### ماتریس سختی قاب اویلر

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده قاب اویلر (ابتدا مفصل)

$$k = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & L & 0 & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix} \quad f^f = \begin{bmatrix} FA_b \\ FS_b - \frac{3FM_b}{2L} \\ 0 \\ FA_e \\ FS_e + \frac{3FM_b}{2L} \\ FM_e - \frac{FM_b}{2} \end{bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده قاب اویلر (انتهای مفصل)

$$k = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & -1 & 0 \\ 0 & L & L^2 & 0 & -L & 0 \\ -\frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f^f = \begin{bmatrix} FA_b \\ FS_b - \frac{3FM_e}{2L} \\ FM_b - \frac{FM_e}{2} \\ FA_e \\ FS_e + \frac{3FM_e}{2L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر اویلر (دو سر مفصل)

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f^f = \begin{bmatrix} FA_b \\ FS_b - \frac{FM_b}{L} - \frac{FM_e}{L} \\ 0 \\ FA_e \\ FS_e + \frac{FM_b}{L} + \frac{FM_e}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اصلاح شده برای عضو قاب اویلر با مفصل خمشی در طول عضو

$$k = \frac{EI}{L_1^3 + L_2^3} \begin{pmatrix} \frac{A(L_1^3 + L_2^3)}{I(L_1 + L_2)} & 0 & 0 & -\frac{A(L_1^3 + L_2^3)}{I(L_1 + L_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3L_1 & 0 & -3 & 3L_2 \\ 0 & 3L_1 & 3L_1^2 & 0 & -3L_1 & 3L_1L_2 \\ -\frac{A(L_1^3 + L_2^3)}{I(L_1 + L_2)} & 0 & 0 & \frac{A(L_1^3 + L_2^3)}{I(L_1 + L_2)} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3L_1 & 0 & 3 & -3L_2 \\ 0 & 3L_2 & 3L_1L_2 & 0 & -3L_2 & 3L_2^2 \end{pmatrix}$$

بردار نیرو اصلاح شده برای عضو قاب اویلر با مفصل خمشی در طول عضو

$$f^f = \left\{ \begin{array}{l} FA_{b1} + \frac{L_2(FA_{b2} + FA_{e1} - F_{hx})}{L_1 + L_2} \\ \frac{2FS_{b1}L_1^3 - 3FM_{e1}L_1^2 - 3FM_{b2}L_2^2 + 2FS_{b1}L_2^3 + 2FS_{b2}L_2^3 + 2FS_{e1}L_2^3 - 2F_{hy}L_2^3}{2(L_1^3 + L_2^3)} \\ \frac{2FM_{b1}L_1^3 + 2FM_{b1}L_2^3 - FM_{e1}L_1^3 + 2FM_{e1}L_2^3 - 3FM_{b2}L_1L_2^2 + 2FS_{b2}L_1L_2^3 + 2FS_{e1}L_1L_2^3 - 2F_{hy}L_1L_2^3}{2(L_1^3 + L_2^3)} \\ FA_{e2} + \frac{L_1(FA_{b2} + FA_{e1} - F_{hx})}{L_1 + L_2} \\ \frac{3FM_{b2}L_2^2 + 3FM_{e1}L_1^2 + 2FS_{b2}L_1^3 + 2FS_{e1}L_1^3 + 2FS_{e2}L_1^3 + 2FS_{e2}L_2^3 - 2F_{hy}L_1^3}{2(L_1^3 + L_2^3)} \\ \frac{2FM_{b2}L_1^3 - FM_{b2}L_2^3 + 2FM_{e2}L_1^3 + 2FM_{e2}L_2^3 - 3FM_{e1}L_1^2L_2 - 2FS_{b2}L_1^3L_2 - 2FS_{e1}L_1^3L_2 + 2F_{hy}L_1^3L_2}{2(L_1^3 + L_2^3)} \end{array} \right\}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو قاب اوایلر در مختصات کلی

$$K = \begin{bmatrix} \frac{AEc^2}{L} + \frac{12EIs^2}{L^3} & \frac{AEcs}{L} - \frac{12EIcs}{L^3} & -\frac{6EIs}{L^2} & -\frac{AEc^2}{L} - \frac{12EIs^2}{L^3} & \frac{12EIcs}{L^3} - \frac{AEcs}{L} & -\frac{6EIs}{L^2} \\ & \frac{12EIc^2}{L^3} + \frac{AEs^2}{L} & \frac{6EIs}{L^2} & \frac{12EIcs}{L^3} - \frac{AEcs}{L} & -\frac{12EIc^2}{L^3} - \frac{AEs^2}{L} & \frac{6EIs}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & & \frac{6EIs}{L^2} & -\frac{6EIs}{L^2} \\ \hline & & & \frac{AEc^2}{L} + \frac{12EIs^2}{L^3} & \frac{AEcs}{L} - \frac{12EIcs}{L^3} & -\frac{6EIs}{L^2} \\ & & & & \frac{12EIc^2}{L^3} + \frac{AEs^2}{L} & -\frac{6EIs}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_3 & -\sigma_1 & -\sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_1 & -\sigma_4 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_5 & \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_5 \\ -\sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma_4 & -\sigma_5 & \sigma_7 \\ -\sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_4 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_5 & -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_5 \\ -\sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_7 & \sigma_4 & -\sigma_5 & \sigma_6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{Ecs(12I - AL^2)}{L^3} \\ \sigma_2 = \frac{E(AL^2s^2 + 12Ic^2)}{L^3} \\ \sigma_3 = \frac{E(AL^2c^2 + 12Is^2)}{L^3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sigma_4 = \frac{6EIs}{L^2} \\ \sigma_5 = \frac{6EIs}{L^2} \\ \sigma_6 = \frac{4EI}{L} \\ \sigma_7 = \frac{2EI}{L} \end{array}$$

$$F^f = \begin{bmatrix} FA_b c - FS_b s \\ FS_b c + FA_b s \\ FM_b \\ FA_e c - FS_e s \\ FS_e c + FA_e s \\ FM_e \end{bmatrix}$$

در رابطه بالا  $c$  مخفف  $\cos(\theta)$  و  $s$  مخفف  $\sin(\theta)$  هستند.

### نیروی داخلی عضو در مختصات کلی و محلی

$$F = K \times \Delta + F_{(e)}^f = \begin{bmatrix} F_{Xb} \\ F_{Yb} \\ M_{Zb} \\ F_{Xe} \\ F_{Ye} \\ M_{Ze} \end{bmatrix} \Rightarrow f = \begin{bmatrix} F_{Xb} c + F_{Yb} s \\ F_{Yb} c - F_{Xb} s \\ M_{Zb} \\ F_{Xe} c + F_{Ye} s \\ F_{Ye} c - F_{Xe} s \\ M_{Ze} \end{bmatrix}$$

## روابط قاب با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی (تیموشنکو)

### ماتریس سختی قاب تیموشنکو در مختصات محلی

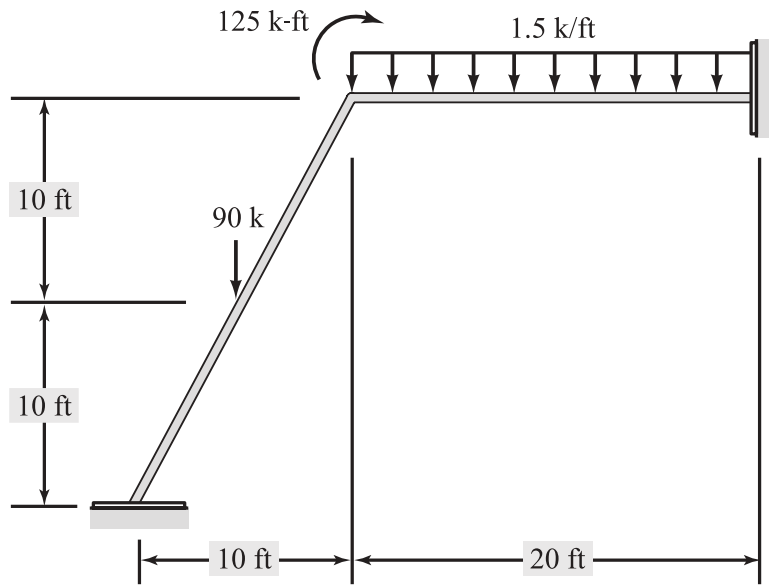
$$k = \frac{EI}{L^3(B_s + 1)} \begin{bmatrix} \frac{AL^2(B_s + 1)}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2(B_s + 1)}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & L^2(B_s + 4) & 0 & -6L & -L^2(B_s - 2) \\ -\frac{AL^2(B_s + 1)}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2(B_s + 1)}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & -L^2(B_s - 2) & 0 & -6L & L^2(B_s + 4) \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & -\sigma_2 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_4 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_3 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{6EI}{L^2(B_s + 1)} \\ \sigma_2 &= \frac{12EI}{L^3(B_s + 1)} \\ \sigma_3 &= -\frac{EI(B_s - 2)}{L(B_s + 1)} \\ \sigma_4 &= \frac{EI(B_s + 4)}{L(B_s + 1)} \end{aligned}$$

### ماتریس سختی قاب تیموشنکو در مختصات کلی

$$\begin{bmatrix} \sigma_9 & \sigma_5 & -\sigma_1 & \sigma_7 & \sigma_4 & -\sigma_1 \\ \sigma_5 & \sigma_8 & \sigma_2 & \sigma_4 & \sigma_6 & \sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_{14} & \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_7 & \sigma_4 & \sigma_1 & \sigma_9 & \sigma_5 & \sigma_1 \\ \sigma_4 & \sigma_6 & -\sigma_2 & \sigma_5 & \sigma_8 & -\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_{14} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{6EIs}{L^2(B_s + 1)} & \sigma_8 &= \frac{AEs^2}{L} + \sigma_{11} \\ \sigma_2 &= \frac{6EIc}{L^2(B_s + 1)} & \sigma_9 &= \frac{AEc^2}{L} + \sigma_{12} \\ \sigma_3 &= -\frac{EI(B_s - 2)}{L(B_s + 1)} & \sigma_{10} &= \frac{12EIcs}{\sigma_{13}} \\ \sigma_4 &= \sigma_{10} - \frac{AEcs}{L} & \sigma_{11} &= \frac{12EIc^2}{\sigma_{13}} \\ \sigma_5 &= \frac{AEcs}{L} - \sigma_{10} & \sigma_{12} &= \frac{12EIs^2}{\sigma_{13}} \\ \sigma_6 &= -\frac{AEs^2}{L} - \sigma_{11} & \sigma_{13} &= L^3(B_s + 1) \\ \sigma_7 &= -\frac{AEc^2}{L} - \sigma_{12} & \sigma_{14} &= \frac{EI(B_s + 4)}{L(B_s + 1)} \end{aligned}$$

## قاب تحت بارگذاری‌های نیرویی مختلف (اعمال شرایط تکیه‌گاهی به روش مستقیم)



در قاب نشان داده شده با صرف نظر از تغییر شکل‌های برشی مطلوبست:  
(الف) تعیین تغییر مکان هر گره  
(ب) تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاه  
(ج) تعیین نیروی داخلی هر عضو

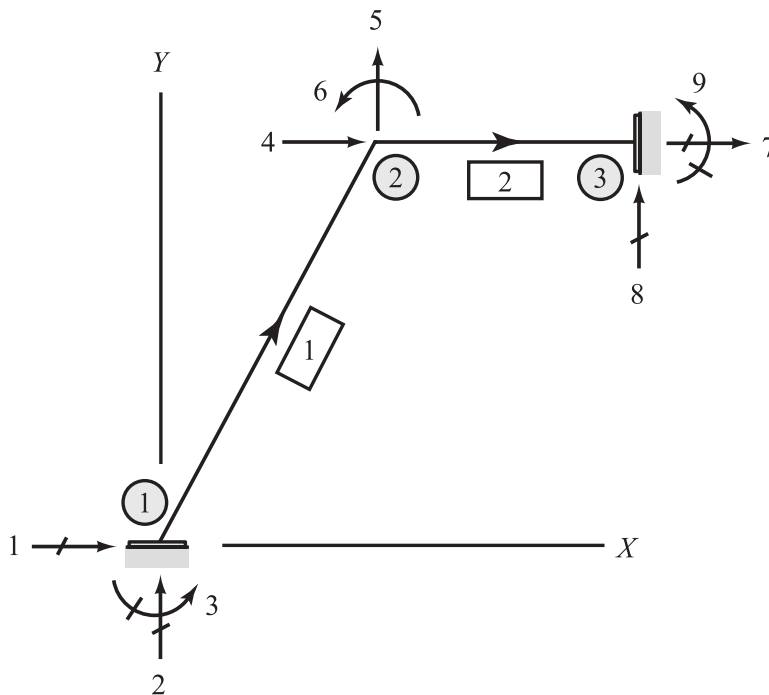
$$E = 29000 \text{ ksi}$$

$$A = 11.8 \text{ in}^2$$

$$I = 310 \text{ in}^4$$

**حل:** واحدهای حل مسئله همگی برحسب کیپس و اینچ می‌باشند.

شماره‌گذاری گره‌ها و اعضا و درجات انتقالی و چرخشی قاب:



درجات آزاد: (۴، ۵، ۶)

درجات مقید: (۱، ۲، ۳، ۷، ۸، ۹)

درجات انتقالی و چرخشی عضو ۱:

(۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶)

درجات انتقالی و چرخشی عضو ۲:

(۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹)

### قسمت الف

عضو	گره ابتدا	گره انتها	L	C	S	C <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	CS
1	1	2	268.3282	0.4472	0.8944	0.2	0.8	0.4
2	2	3	240	1	0	1	0	0

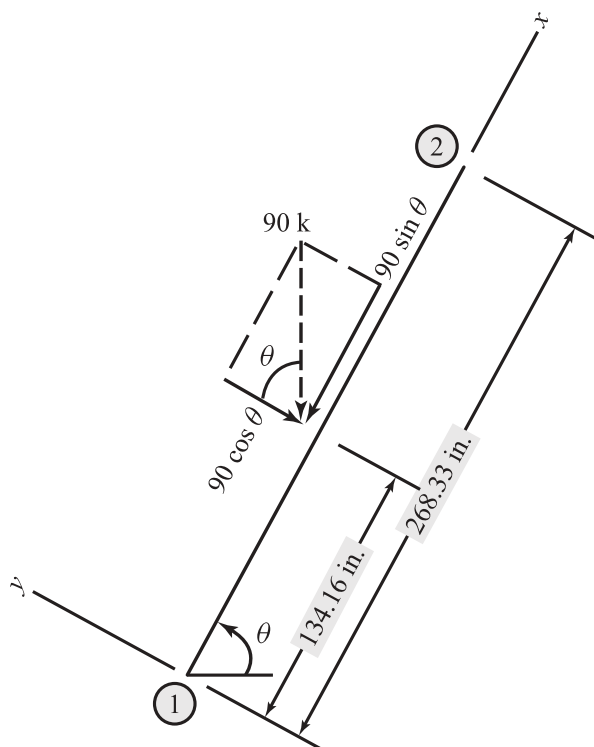
برای هر المان ماتریس سختی و بردار نیروی عضو را با استفاده از فرمول‌های قاب (بدون اثر تغییر شکل‌های برشی)

در مختصات کلی به دست می‌آوریم.

## عضو ۱

ماتریس سختی عضو در مختصات کلی:

$$^{(1)}K = \begin{bmatrix} 259.528 & 507.888 & -670.075 & -259.528 & -507.888 & -670.075 \\ 507.888 & 1021.360 & 335.038 & -507.888 & -1021.360 & 335.038 \\ -670.075 & 335.038 & 134015.007 & 670.075 & -335.038 & 67007.504 \\ \hline -259.528 & -507.888 & 670.075 & 259.528 & 507.888 & 670.075 \\ -507.888 & -1021.360 & -335.038 & 507.888 & 1021.360 & -335.038 \\ -670.075 & 335.038 & 67007.504 & 670.075 & -335.038 & 134015.007 \end{bmatrix}$$



نیروی  $W = 90\text{ k}$  روی عضو ۱ بایستی تجزیه شود  
(در راستای برش و محور عضو) در نتیجه :

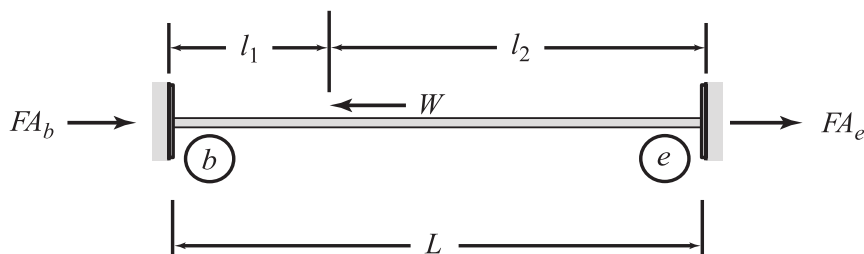
$$W_x = 90 \sin(\theta) = 90(0.89443) = 80.4984\text{ k}$$

$$W_y = 90 \cos(\theta) = 90(0.44721) = 40.2492\text{ k}$$

**نکته:** از آنجاکه  $W_x$  و  $W_y$  هر دو در جهت مخالف محور محلی می‌باشند بنابراین هر دو با علامت مثبت وارد محاسبات نیروهای انتهایی عضو می‌شوند.

**توجه:** فاصله نیرو از گره ابتدا و انتها (۱ و ۲) مقدار  $l_1 = l_2 = 134.1641\text{ in}$  می‌باشد.

نیروهای انتهایی عضو ۱ (Member End Forces) ناشی از  $W_x$  در مختصات محلی :

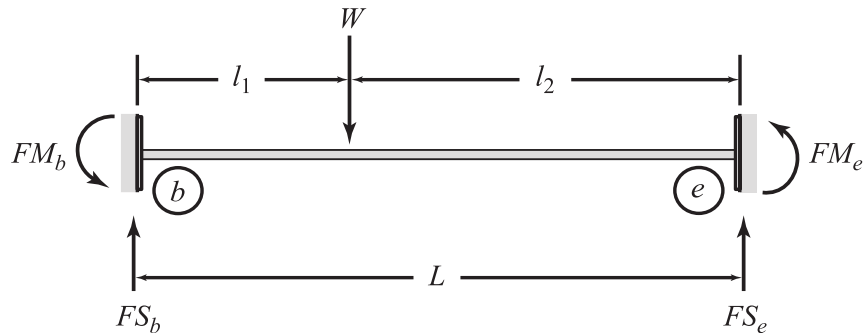


$$FA_b = \frac{Wl_2}{L}$$

$$FA_e = \frac{Wl_1}{L}$$

$$FA_1 = FA_2 = \frac{80.4984 \times 134.1641}{268.3282} = 40.2492\text{ k}$$

نیروهای انتهایی عضو ۱ (Member End Forces) ناشی از  $W_y$  در مختصات محلی :



$$FS_b = \frac{Wl_2^2(3l_1 + l_2)}{L^3}$$

$$FM_b = \frac{Wl_1l_2^2}{L^2}$$

$$FS_e = \frac{Wl_1^2(l_1 + 3l_2)}{L^3}$$

$$FM_e = -\frac{Wl_1^2l_2}{L^2}$$

$$FS_1 = 20.1246k$$

$$FM_1 = 1350k-in$$

$$FS_2 = 20.1246k$$

$$FM_2 = -1350k-in$$

بردار نیرو عضو در مختصات محلی و کلی:

$$f_{(1)}^f = \begin{bmatrix} 40.2492 \\ 20.1246 \\ 1350 \\ 40.2492 \\ 20.1246 \\ -1350 \end{bmatrix} \xrightarrow{F^f = \begin{bmatrix} FA_b c - FS_b s \\ FS_b c + FA_b s \\ FM_b \\ FA_e c - FS_e s \\ FS_e c + FA_e s \\ FM_e \end{bmatrix}} F_{(1)}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 1350 \\ 0 \\ 45 \\ -1350 \end{bmatrix}$$

## عضو ۲

ماتریس سختی عضو در مختصات کلی:

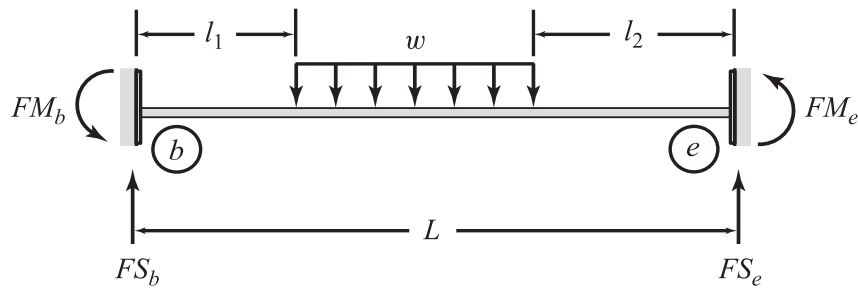
$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1425.833 & 0.000 & 0.000 & -1425.833 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 7.804 & 936.458 & 0.000 & -7.804 & 936.458 \\ 0.000 & 936.458 & 149833.333 & 0.000 & -936.458 & 74916.667 \\ -1425.833 & 0.000 & 0.000 & 1425.833 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -7.804 & -936.458 & 0.000 & 7.804 & -936.458 \\ 0.000 & 936.458 & 74916.667 & 0.000 & -936.458 & 149833.333 \end{bmatrix}$$

**نکته:** از آنجاکه  $w$  در جهت مخالف محور محلی می‌باشد با علامت مثبت وارد محاسبات نیروهای انتهایی عضو

می‌شود.



نیروهای انتهایی عضو ۲ (Member End Forces) ناشی از بار گسترده در مختصات محلی:



$$FS_b = \frac{w(L-2l_1)}{2} + \frac{w(l_1^3-l_2^3)}{L^2} - \frac{w(l_1^4-l_2^4)}{2L^3}$$

$$FM_b = \frac{w(L^2-6l_1^2)}{12} + \frac{w(2l_1^3-l_2^3)}{3L} - \frac{w(l_1^4-l_2^4)}{4L^2}$$

$$FS_e = \frac{w(L-2l_2)}{2} - \frac{w(l_1^3-l_2^3)}{L^2} + \frac{w(l_1^4-l_2^4)}{2L^3}$$

$$FM_e = -\frac{w(L^2-6l_2^2)}{12} + \frac{w(l_1^3-2l_2^3)}{3L} - \frac{w(l_1^4-l_2^4)}{4L^2}$$

$$w = \frac{1.5}{12} = 0.125 \text{ k/in}$$

$$l_1 = l_2 = 0$$

$$FS_2 = 15 \text{ k}$$

$$FM_2 = 600 \text{ k-in}$$

$$FS_3 = 15 \text{ k}$$

$$FM_3 = -600 \text{ k-in}$$

بردار نیرو عضو در مختصات محلی و کلی:

$$f_{(2)}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 600 \\ 0 \\ 15 \\ -600 \end{bmatrix} \rightarrow F_{(2)}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 600 \\ 0 \\ 15 \\ -600 \end{bmatrix}$$

روی هم‌گذاری (اسمبل) سیستم

ماتریس سختی سازه:

$K =$

259.528	507.888	-670.075	-259.528	-507.888	-670.075	0.000	0.000	0.000
507.888	1021.360	335.038	-507.888	-1021.360	335.038	0.000	0.000	0.000
-670.075	335.038	134015.007	670.075	-335.038	67007.504	0.000	0.000	0.000
-259.528	-507.888	670.075	1685.361	507.888	670.075	-1425.833	0.000	0.000
-507.888	-1021.360	-335.038	507.888	1029.164	601.421	0.000	-7.804	936.458
-670.075	335.038	67007.504	670.075	601.421	283848.341	0.000	-936.458	74916.667
0.000	0.000	0.000	-1425.833	0.000	0.000	1425.833	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	-7.804	-936.458	0.000	7.804	-936.458
0.000	0.000	0.000	0.000	936.458	74916.667	0.000	-936.458	149833.333

بردار نیروی ناشی از بارگذاری روی اعضا در سازه:

$$P^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 1350 \\ \hline 0 \\ 60 \\ -750 \\ \hline 0 \\ 15 \\ -600 \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط تکیه‌گاهی به روش مستقیم (بلوک‌بندی)

$$\mathbf{F}_f^{Final} = \mathbf{K}_{ff} \times \Delta_f \Rightarrow \Delta_f = \mathbf{K}_{ff}^{-1} \times \mathbf{F}_f^{Final}$$

$$\Delta_f = \mathbf{K}_{ff}^{-1} \times \underbrace{\left( P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s) \right)}_{\mathbf{F}_f^{Final}}$$

**توجه:** از آنجاکه نشست نداریم نیازی به  $K_{fs} \times \Delta_s$  نداریم چون نتیجه صفر است.

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 1685.361 & 507.888 & 670.075 \\ 507.888 & 1029.164 & 601.421 \\ 670.075 & 601.421 & 283848.341 \end{bmatrix}, \quad P_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -125 \times 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1500 \end{bmatrix}, \quad P_f^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ -750 \end{bmatrix}$$

$$F_f^{Final} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ -750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_f = \begin{bmatrix} 1685.361 & 507.888 & 670.075 \\ 507.888 & 1029.164 & 601.421 \\ 670.075 & 601.421 & 283848.341 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.021301in \\ -0.067322in \\ -0.002550rad \end{bmatrix}$$

**توجه:** برای محاسبه جابه‌جایی بایستی دستگاه معادلات خطی حل شود. روش‌های مختلفی برای این کار وجود دارد:

**حل دستگاه معادلات خطی**

محاسبات زیر برای ۵ رقم اعشار انجام شده است.

۳ معادله به‌صورت زیر داریم:

$$1685.36132\Delta_{2x} + 507.88806\Delta_{2y} + 670.07504\theta_{2z} = 0 \rightarrow (1)$$

$$507.88806\Delta_{2x} + 1029.16389\Delta_{2y} + 601.42081\theta_{2z} = -60 \rightarrow (2)$$

$$670.07504\Delta_{2x} + 601.42081\Delta_{2y} + 283848.34078\theta_{2z} = -750 \rightarrow (3)$$

## حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی گوس (Gauss Elimination Back Substitution)

فرم ماتریسی معادلات:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1685.36132 & 507.88806 & 670.07504 & 0 \\ 507.88806 & 1029.16389 & 601.42081 & -60 \\ 670.07504 & 601.42081 & 283848.34078 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 0.30135 \times R_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1685.36132 & 507.88806 & 670.07504 & 0 \\ 0 & 876.11049 & 399.49194 & -60 \\ 670.07504 & 601.42081 & 283848.34078 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 0.39759 \times R_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1685.36132 & 507.88806 & 670.07504 & 0 \\ 0 & 876.11049 & 399.49194 & -60 \\ 0 & 399.49194 & 283581.92874 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 0.45598 \times R_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1685.36132 & 507.88806 & 670.07504 & 0 \\ 0 & 876.11049 & 399.49194 & -60 \\ 0 & 0 & 283399.767 & -722.64099 \end{array} \right]$$

معادلات به صورت زیر درآمده‌اند:

$$1685.36132\Delta_{2x} + 507.88806\Delta_{2y} + 670.07504\theta_{2z} = 0 \rightarrow (1)$$

$$876.11049\Delta_{2y} + 399.49194\theta_{2z} = -60 \rightarrow (2)$$

$$283399.767\theta_{2z} = -722.64099 \rightarrow (3)$$

با استفاده از جای‌گذاری پس‌رو (backward substitution) داریم:

معادله (۳):

$$\Rightarrow \theta_{2z} = -\frac{722.64099}{283399.767} = -0.00255$$

معادله (۲):

$$\Rightarrow 876.11049\Delta_{2y} + 399.49194(-0.00255) = -60 \Rightarrow 876.11049\Delta_{2y} = -58.98134$$

$$\Rightarrow \Delta_{2y} = -\frac{58.98134}{876.11049} = -0.06732$$

معادله (۱):

$$\Rightarrow 1685.36132\Delta_{2x} + 507.88806(-0.06732) + 670.07504(-0.00255) = 0$$

$$\Rightarrow 1685.36132\Delta_{2x} = 35.90056$$

$$\Rightarrow \Delta_{2x} = \frac{35.90056}{1685.36132} = 0.0213$$

مجهولات به دست آمده:

$$\Delta_{2x} = 0.0213, \Delta_{2y} = -0.06732 \text{ and } \theta_{2z} = -0.00255$$

## حل دستگاه معادلات خطی به روش گوس جوردن (Gauss Jordan)

فرم ماتریسی معادلات:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1685.36132 & 507.88806 & 670.07504 & 0 \\ 507.88806 & 1029.16389 & 601.42081 & -60 \\ 670.07504 & 601.42081 & 283848.34078 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 \div 1685.36132$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0.30135 & 0.39759 & 0 \\ 507.88806 & 1029.16389 & 601.42081 & -60 \\ 670.07504 & 601.42081 & 283848.34078 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 507.88806 \times R_1$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0.30135 & 0.39759 & 0 \\ 0 & 876.11049 & 399.49194 & -60 \\ 670.07504 & 601.42081 & 283848.34078 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 670.07504 \times R_1$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0.30135 & 0.39759 & 0 \\ 0 & 876.11049 & 399.49194 & -60 \\ 0 & 399.49194 & 283581.92873 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 \div 876.11049$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0.30135 & 0.39759 & 0 \\ 0 & 1 & 0.45598 & -0.06848 \\ 0 & 399.49194 & 283581.92873 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 0.30135 \times R_2$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.26017 & 0.02064 \\ 0 & 1 & 0.45598 & -0.06848 \\ 0 & 399.49194 & 283581.92873 & -750 \end{array} \right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 399.49194 \times R_2$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.26017 & 0.02064 \\ 0 & 1 & 0.45598 & -0.06848 \\ 0 & 0 & 283399.767 & -722.64099 \end{array} \right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 \div 283399.767$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.26017 & 0.02064 \\ 0 & 1 & 0.45598 & -0.06848 \\ 0 & 0 & 1 & -0.00255 \end{array} \right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 0.26017 \times R_3$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.0213 \\ 0 & 1 & 0.45598 & -0.06848 \\ 0 & 0 & 1 & -0.00255 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 0.45598 \times R_3$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.0213 \\ 0 & 1 & 0 & -0.06732 \\ 0 & 0 & 1 & -0.00255 \end{array} \right]$$

مجهولات به دست آمده:

$$\Delta_{2x} = 0.0213, \Delta_{2y} = -0.06732 \text{ and } \theta_{2z} = -0.00255$$

حل دستگاه معادلات خطی به روش چولسکی (Cholesky)

$$A = \begin{bmatrix} 1685.361 & 507.888 & 670.075 \\ 507.888 & 1029.164 & 601.421 \\ 670.075 & 601.421 & 283848.341 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax = B \\ A = L \cdot L^T \end{array} \right\} \Rightarrow LL^T x = B$$

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot l_{kj}}{l_{ii}}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1685.36} = 41.0531$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{507.89}{41.0531} = 12.3715$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{1029.16 - (12.3715)^2} = \sqrt{1029.16 - 153.0547} = 29.5991$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{670.08}{41.0531} = 16.3223$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \times l_{21}}{l_{22}} = \frac{601.42 - (16.3223) \times (12.3715)}{29.5991} = \frac{601.42 - 201.9313}{29.5991} = 13.4967$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{283848.34 - (16.3223)^2 - (13.4967)^2} = 532.353$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.0531 & 0 & 0 \\ 12.3715 & 29.5991 & 0 \\ 16.3223 & 13.4967 & 532.353 \end{bmatrix}$$

در نتیجه پس  $Ly = B$  داریم:

$$\begin{bmatrix} 41.05314 & 0 & 0 \\ 12.37153 & 29.59908 & 0 \\ 16.32226 & 13.49666 & 532.35304 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}$$

با استفاده از جای‌گذاری پیشرو (forward substitution) داریم:

معادله (۱):

$$41.05314 y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

معادله (۲):

$$12.37153y_1 + 29.59908y_2 = -60 \Rightarrow 12.37153(0) + 29.59908y_2 = -60$$

$$\Rightarrow y_2 = -\frac{60}{29.59908} = -2.02709$$

معادله (۳):

$$16.32226y_1 + 13.49666y_2 + 532.35304y_3 = -750$$

$$\Rightarrow 16.32226(0) + 13.49666(-2.0271) + 532.35304y_3 = -750$$

$$\Rightarrow -27.35895 + 532.35304y_3 = -750 \Rightarrow 532.35304y_3 = -722.64105$$

$$\Rightarrow y_3 = -\frac{722.64105}{532.35304} = -1.35745$$

حال  $L^T x = y$  را محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} 41.05314 & 12.37153 & 16.32226 \\ 0 & 29.59908 & 13.49666 \\ 0 & 0 & 532.35304 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.02709 \\ -1.35745 \end{bmatrix}$$

با استفاده از جای‌گذاری پس‌رو (backward substitution) داریم:

معادله (۱):

$$532.35304\theta_{2z} = -1.35745 \Rightarrow \theta_{2z} = -\frac{1.35745}{532.35304} = -0.00255$$

معادله (۲):

$$29.59908\Delta_{2y} + 13.49666\theta_{2z} = -2.02709$$

$$\Rightarrow 29.59908\Delta_{2y} + 13.49666(-0.00255) = -2.02709$$

$$\Rightarrow 29.59908\Delta_{2y} - 0.03442 = -2.02709 \Rightarrow 29.59908\Delta_{2y} = -1.99268$$

$$\Rightarrow \Delta_{2y} = -\frac{1.99268}{29.59908} = -0.06732$$

معادله (۳):

$$41.05314\Delta_{2x} + 12.37153\Delta_{2y} + 16.32226\theta_{2z} = 0$$

$$\Rightarrow 41.05314\Delta_{2x} + 12.37153(-0.06732) + 16.32226(-0.00255) = 0$$

$$\Rightarrow 41.05314\Delta_{2x} - 0.8745 = 0 \Rightarrow 41.05314x = 0.8745$$

$$\Rightarrow \Delta_{2x} = \frac{0.8745}{41.05314} = 0.0213$$

مجهولات به دست آمده:

$$\Delta_{2x} = 0.0213, \Delta_{2y} = -0.06732 \text{ and } \theta_{2z} = -0.00255$$



### حل دستگاه معادلات خطی به روش LU

$$A = \begin{bmatrix} 1685.361 & 507.888 & 670.075 \\ 507.888 & 1029.164 & 601.421 \\ 670.075 & 601.421 & 283848.341 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax = B \\ A = LU \end{array} \right\} \Rightarrow LUx = B$$

با استفاده از روش حذفی گوس به U می‌رسیم:

$$U = \begin{bmatrix} 1685.36132 & 507.88806 & 670.07504 \\ 0 & 876.11049 & 399.49194 \\ 0 & 0 & 283399.767 \end{bmatrix}$$

L نیز از ضرایبی که در روش حذفی گوس استفاده کردیم ساخته شده است و روی قطر اصلی آن عدد یک می‌گذاریم:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.30135 & 1 & 0 \\ 0.39759 & 0.45598 & 1 \end{bmatrix}$$

پس  $Ux = y$  پس  $Ly = B$  در نتیجه :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3013526 & 1 & 0 \\ 0.3975854 & 0.4559835 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}$$

با استفاده از جای‌گذاری پیشرو (forward substitution) داریم:

معادله (۱):

$$y_1 = 0$$

معادله (۲):

$$0.3013526y_1 + y_2 = -60 \Rightarrow y_2 = -60$$

معادله (۳):

$$\begin{aligned} 0.3975854y_1 + 0.4559835y_2 + y_3 &= -750 \\ \Rightarrow 0.3975854(0) + 0.4559835(-60) + y_3 &= -750 \\ \Rightarrow y_3 &= -722.64099 \end{aligned}$$

حال  $Ux = y$  را محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} 1685.36132 & 507.88806 & 670.07504 \\ 0 & 876.11049 & 399.49194 \\ 0 & 0 & 283399.767 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -722.64099 \end{bmatrix}$$

با استفاده از جای‌گذاری پس‌رو (backward substitution) داریم:

معادله (۱):

$$\Rightarrow \theta_{2z} = -\frac{722.64099}{283399.767} = -0.00255$$

معادله (۲):

$$876.11049\Delta_{2y} + 399.49194\theta_{2z} = -60$$

$$\Rightarrow \Delta_{2y} = -0.06732$$

معادله (۳):

$$1685.36132\Delta_{2x} + 507.88806\Delta_{2y} + 670.07504\theta_{2z} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_{2x} = 0.0213$$

مجهولات به‌دست آمده:

$$\Delta_{2x} = 0.0213, \Delta_{2y} = -0.06732 \text{ and } \theta_{2z} = -0.00255$$

## حل دستگاه معادلات خطی به روش گوس سایدل (Gauss Seidel)

بازنویسی معادلات:

$$\Delta_{2x}^{(k+1)} = \frac{1}{1685.36132} (0 - 507.88806\Delta_{2y}^{(k)} - 670.07504\theta_{2z}^{(k)})$$

$$\Delta_{2y}^{(k+1)} = \frac{1}{1029.16389} (-60 - 507.88806\Delta_{2x}^{(k+1)} - 601.42081\theta_{2z}^{(k)})$$

$$\theta_{2z}^{(k+1)} = \frac{1}{283848.34078} (-750 - 670.07504\Delta_{2x}^{(k+1)} - 601.42081\Delta_{2y}^{(k+1)})$$

تقریب ۱ (حدس اولیه برای همه مجهولات عدد صفر است):

$$\Delta_{2x}^{(1)} = \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(0) - 670.07504(0)] = 0$$

$$\Delta_{2y}^{(1)} = \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0) - 601.42081(0)] = -0.0583$$

$$\theta_{2z}^{(1)} = \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0) - 601.42081(-0.0583)] = -0.00252$$

تقریب ۲ :

$$\Delta_{2x}^{(2)} = \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.0583) - 670.07504(-0.00252)] = 0.01857$$

$$\Delta_{2y}^{(2)} = \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0.01857) - 601.42081(-0.00252)] = -0.06599$$

$$\theta_{2z}^{(2)} = \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0.01857) - 601.42081(-0.06599)] = -0.00255$$

تقریب ۳ :

$$\Delta_{2x}^{(3)} = \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.06599) - 670.07504(-0.00255)] = 0.0209$$

$$\Delta_{2y}^{(3)} = \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0.0209) - 601.42081(-0.00255)] = -0.06713$$

$$\theta_{2z}^{(3)} = \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0.0209) - 601.42081(-0.06713)] = -0.00255$$

تقریب ۴ :

$$\Delta_{2x}^{(4)} = \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.06713) - 670.07504(-0.00255)] = 0.02124$$

$$\Delta_{2y}^{(4)} = \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0.02124) - 601.42081(-0.00255)] = -0.06729$$

$$\theta_{2z}^{(4)} = \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0.02124) - 601.42081(-0.06729)] = -0.00255$$

با توجه به مرحله ۴ تقریب زیر برای مجهولات مناسب است:

$$\Delta_{2x} = 0.02124, \Delta_{2y} = -0.06729 \text{ and } \theta_{2z} = -0.00255$$

## حل دستگاه معادلات خطی به روش گوس ژاکوبی (Gauss Jacobi)

بازنویسی معادلات:

$$\begin{aligned}\Delta_{2x}^{(k+1)} &= \frac{1}{1685.36132} (0 - 507.88806\Delta_{2y}^{(k)} - 670.07504\theta_{2z}^{(k)}) \\ \Delta_{2y}^{(k+1)} &= \frac{1}{1029.16389} (-60 - 507.88806\Delta_{2x}^{(k)} - 601.42081\theta_{2z}^{(k)}) \\ \theta_{2z}^{(k+1)} &= \frac{1}{283848.34078} (-750 - 670.07504\Delta_{2x}^{(k)} - 601.42081\Delta_{2y}^{(k)})\end{aligned}$$

تقریب ۱ (حدس اولیه برای همه مجهولات عدد صفر است):

$$\begin{aligned}\Delta_{2x}^{(1)} &= \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(0) - 670.07504(0)] = 0 \\ \Delta_{2y}^{(1)} &= \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0) - 601.42081(0)] = -0.0583 \\ \theta_{2z}^{(1)} &= \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0) - 601.42081(0)] = -0.00264\end{aligned}$$

تقریب ۲ :

$$\begin{aligned}\Delta_{2x}^{(2)} &= \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.0583) - 670.07504(-0.00264)] = 0.01862 \\ \Delta_{2y}^{(2)} &= \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0) - 601.42081(-0.00264)] = -0.05676 \\ \theta_{2z}^{(2)} &= \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0) - 601.42081(-0.0583)] = -0.00252\end{aligned}$$

تقریب ۳ :

$$\begin{aligned}\Delta_{2x}^{(3)} &= \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.05676) - 670.07504(-0.00252)] = 0.0181 \\ \Delta_{2y}^{(3)} &= \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0.01862) - 601.42081(-0.00252)] = -0.06602 \\ \theta_{2z}^{(3)} &= \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0.01862) - 601.42081(-0.05676)] = -0.00257\end{aligned}$$

تقریب ۴ :

$$\begin{aligned}\Delta_{2x}^{(4)} &= \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.06602) - 670.07504(-0.00257)] = 0.02091 \\ \Delta_{2y}^{(4)} &= \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0.0181) - 601.42081(-0.00257)] = -0.06573 \\ \theta_{2z}^{(4)} &= \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0.0181) - 601.42081(-0.06602)] = -0.00255\end{aligned}$$

تقریب ۵ :

$$\Delta_{2x}^{(5)} = \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.06573) - 670.07504(-0.00255)] = 0.02082$$

$$\Delta_{2y}^{(5)} = \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0.02091) - 601.42081(-0.00255)] = -0.06713$$

$$\theta_{2z}^{(5)} = \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0.02091) - 601.42081(-0.06573)] = -0.00255$$

تقریب ۶ :

$$\Delta_{2x}^{(6)} = \frac{1}{1685.36132} [0 - 507.88806(-0.06713) - 670.07504(-0.00255)] = 0.02125$$

$$\Delta_{2y}^{(6)} = \frac{1}{1029.16389} [-60 - 507.88806(0.02082) - 601.42081(-0.00255)] = -0.06708$$

$$\theta_{2z}^{(6)} = \frac{1}{283848.34078} [-750 - 670.07504(0.02082) - 601.42081(-0.06713)] = -0.00255$$

باتوجه به مرحله ۶ تقریب زیر برای مجهولات مناسب است:

$$\Delta_{2x} = 0.02125, \Delta_{2y} = -0.06708 \text{ and } \theta_{2z} = -0.00255$$

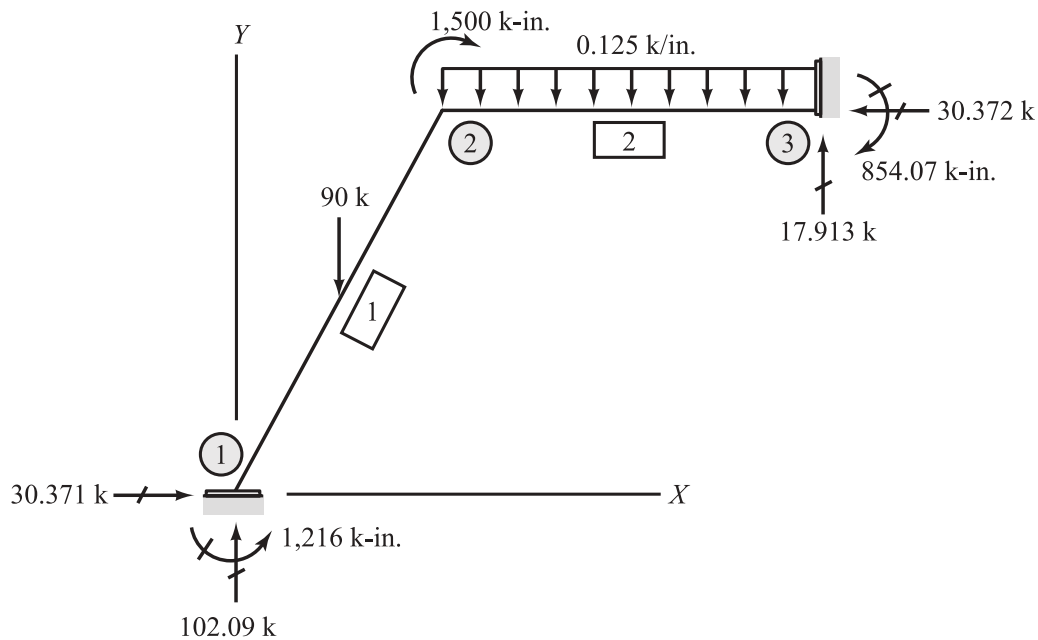
### قسمت ب

محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با استفاده از روش مستقیم (بلوک‌بندی):

$$\mathbf{P}_s = (\mathbf{K}_{sf} \times \Delta_f) + (\mathbf{K}_{ss} \times \Delta_s) + \mathbf{P}_s^f$$

**توجه:** از آنجاکه نشست نداریم نیازی به  $\mathbf{K}_{ss} \times \Delta_s$  نداریم چون نتیجه صفر است.

$$\mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -259.528 & -507.888 & -670.075 \\ -507.888 & -1021.360 & 335.038 \\ 670.075 & -335.038 & 67007.504 \\ -1425.833 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -7.804 & -936.458 \\ 0.000 & 936.458 & 74916.667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.021301 \\ -0.067322 \\ -0.002550 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 1350 \\ 0 \\ 15 \\ -600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.372 k \\ 102.087 k \\ 1215.966 k-in \\ -30.372 k \\ 17.913 k \\ -854.074 k-in \end{bmatrix}$$



### قسمت ج

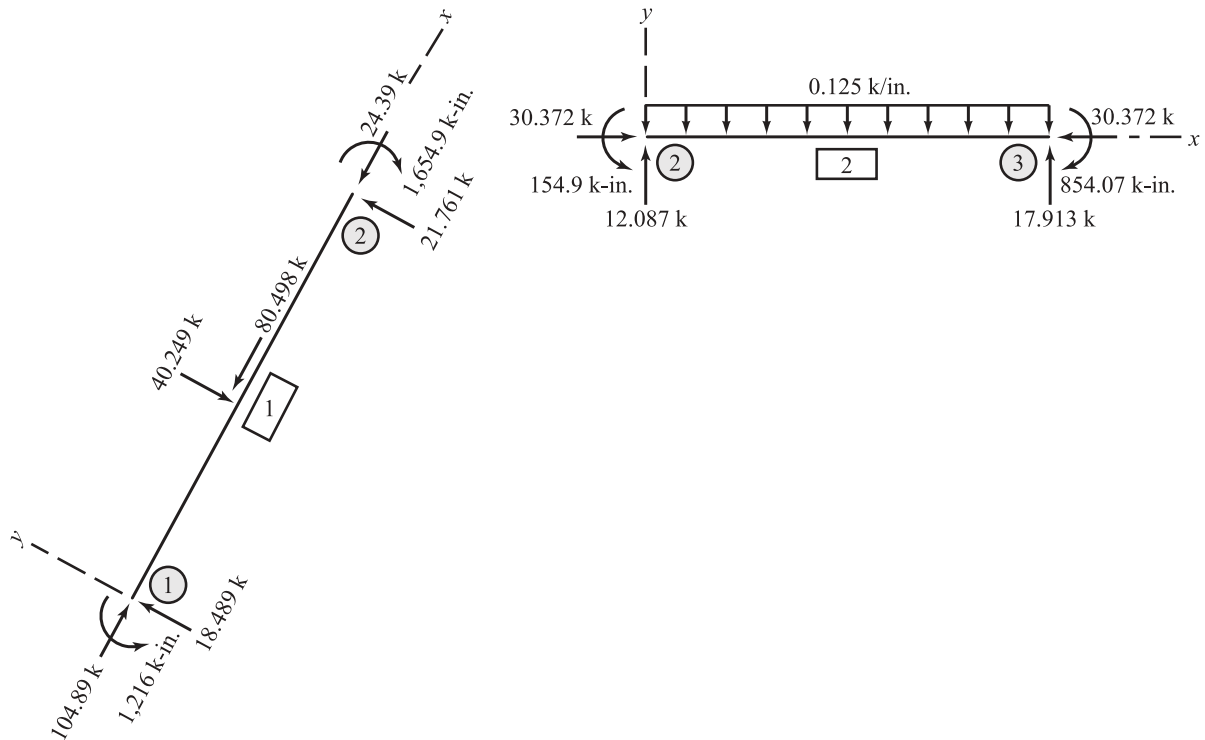
برای محاسبه نیروهای داخلی عضو در مختصات کلی و محلی با استفاده از فرمول‌های ارائه شده در ابتدای فصل داریم:

$$\begin{matrix} {}^{(e)} \\ F \end{matrix} = \begin{matrix} {}^{(e)} \\ K \end{matrix} \times \begin{matrix} {}^{(e)} \\ \Delta \end{matrix} + \begin{matrix} {}^{(e)} \\ F^f \end{matrix} = \begin{bmatrix} F_{Xb} \\ F_{Yb} \\ M_{Zb} \\ F_{Xe} \\ F_{Ye} \\ M_{Ze} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} {}^{(e)} \\ f \end{matrix} = \begin{bmatrix} F_{Xb}c + F_{Yb}s \\ F_{Yb}c - F_{Xb}s \\ M_{Zb} \\ F_{Xe}c + F_{Ye}s \\ F_{Ye}c - F_{Xe}s \\ M_{Ze} \end{bmatrix}$$

$$^{(1)}F = \begin{bmatrix} 259.528 & 507.888 & -670.075 & -259.528 & -507.888 & -670.075 \\ 507.888 & 1021.360 & 335.038 & -507.888 & -1021.360 & 335.038 \\ -670.075 & 335.038 & 134015.007 & 670.075 & -335.038 & 67007.504 \\ -259.528 & -507.888 & 670.075 & 259.528 & 507.888 & 670.075 \\ -507.888 & -1021.360 & -335.038 & 507.888 & 1021.360 & -335.038 \\ -670.075 & 335.038 & 67007.504 & 670.075 & -335.038 & 134015.007 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.021301 \\ -0.067322 \\ -0.002550 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 1350 \\ 0 \\ 45 \\ -1350 \end{bmatrix}$$

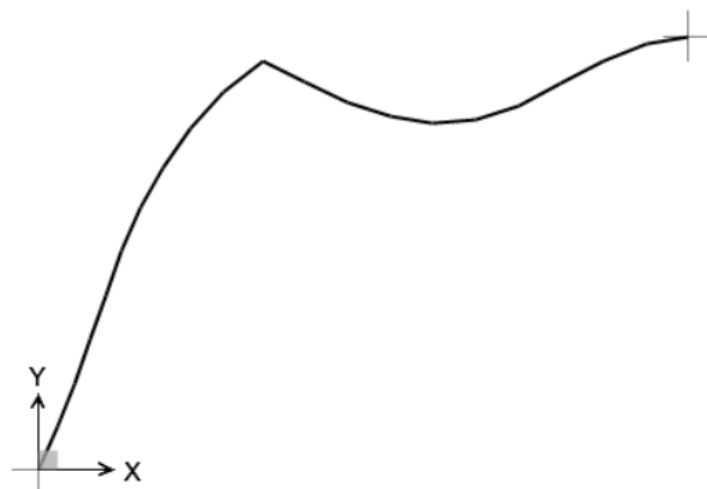
$$^{(1)}F = \begin{bmatrix} 30.372 \\ 102.087 \\ 1215.966 \\ -30.372 \\ -12.087 \\ -1654.896 \end{bmatrix} \Rightarrow ^{(1)}f = \begin{bmatrix} 104.892 \\ 18.489 \\ 1215.966 \\ -24.394 \\ 21.760 \\ -1654.896 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}F = ^{(2)}f = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.021301 \\ -0.067322 \\ -0.002550 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 600 \\ 0 \\ 15 \\ -600 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30.372 \\ 12.087 \\ 154.896 \\ -30.372 \\ 17.913 \\ -854.074 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

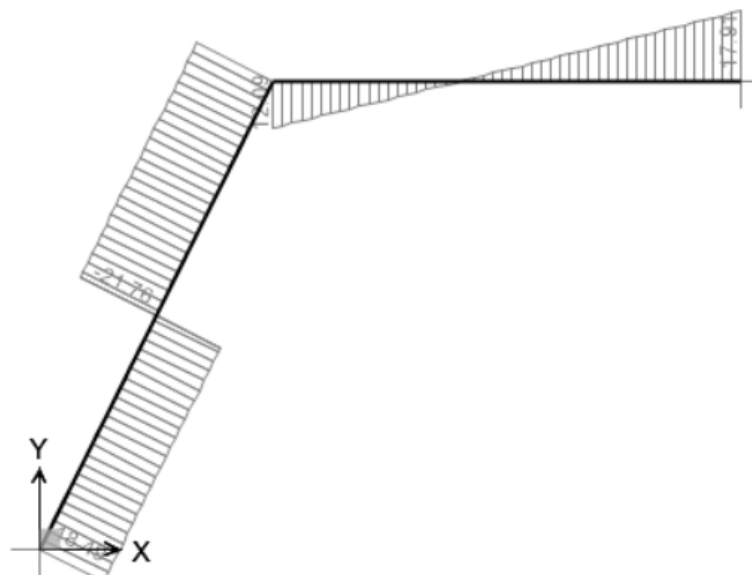


مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری SAP2000 v20.2

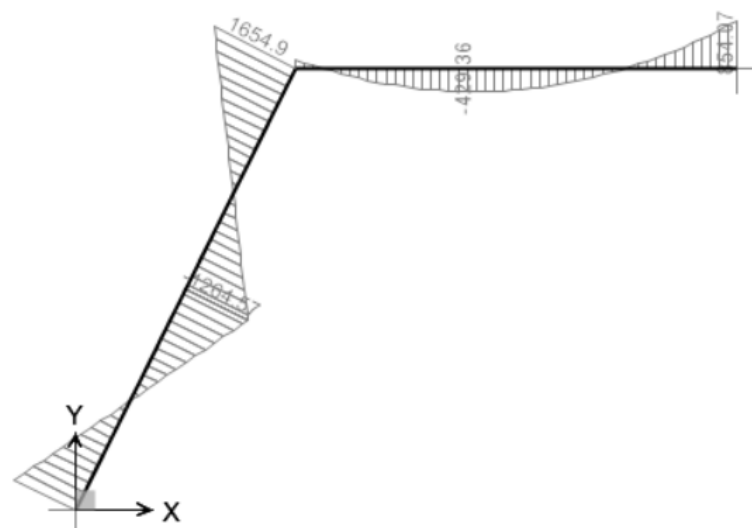
سازه تغییر شکل یافته:



دیاگرام برش:



دیاگرام ممان:





نتایج جا به جایی گره‌ها:

**Joint Displacements**

File View Edit Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted Joint Displacements

Filter:

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	U1 in	U2 in	U3 in	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	2	DEAD	LinStatic	0.021301	-0.06732	0	0	0	-0.00255
	3	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0

Record: << < 1 > >> of 3 Add Tables... Done

نتایج نیروهای داخلی هر عضو:

**Element Forces - Frames**

File View Edit Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted Element Forces - Frames

Filter:

	Frame Text	Station in	OutputCase	CaseType Text	P Kip	V2 Kip	V3 Kip	T Kip-in	M2 Kip-in	M3 Kip-in
▶	1	0	DEAD	LinStatic	-104.892	0	18.489	0	1215.966	0
	1	268.328	DEAD	LinStatic	-24.394	0	-21.76	0	1654.896	0
	2	0	DEAD	LinStatic	-30.372	0	12.087	0	154.896	0
	2	240	DEAD	LinStatic	-30.372	0	-17.913	0	854.074	0

Record: << < 1 > >> of 4 Add Tables... Done

نتایج عکس العمل تکیه‌گاه:

**Joint Reactions**

File View Edit Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted Joint Reactions

Filter:

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	F1 Kip	F2 Kip	F3 Kip	M1 Kip-in	M2 Kip-in	M3 Kip-in
▶	1	DEAD	LinStatic	30.372	102.087	0	0	0	1215.966
	3	DEAD	LinStatic	-30.372	17.913	0	0	0	-854.074

Record: << < 1 > >> of 2 Add Tables... Done

## قاب تحت بارگذاری‌های نیرویی مختلف (اعمال شرایط تکیه‌گاهی به روش ضرایب لاگرانژ)

شرایط تکیه‌گاهی در مسئله قبل را به طور کامل با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ اعمال نمایید.

$K =$

259.528	507.888	-670.075	-259.528	-507.888	-670.075	0.000	0.000	0.000
507.888	1021.360	335.038	-507.888	-1021.360	335.038	0.000	0.000	0.000
-670.075	335.038	134015.007	670.075	-335.038	67007.504	0.000	0.000	0.000
-259.528	-507.888	670.075	1685.361	507.888	670.075	-1425.833	0.000	0.000
-507.888	-1021.360	-335.038	507.888	1029.164	601.421	0.000	-7.804	936.458
-670.075	335.038	67007.504	670.075	601.421	283848.341	0.000	-936.458	74916.667
0.000	0.000	0.000	-1425.833	0.000	0.000	1425.833	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	-7.804	-936.458	0.000	7.804	-936.458
0.000	0.000	0.000	0.000	936.458	74916.667	0.000	-936.458	149833.333

درجات مقید: (۱، ۲، ۳، ۷، ۸، ۹)

$$\Delta_{1x} = 0, \quad \Delta_{1y} = 0, \quad \theta_{1z} = 0, \quad \Delta_{3x} = 0, \quad \Delta_{3y} = 0, \quad \theta_{3z} = 0$$

به تعداد معادلات بایستی سطر و ستون اضافه کنیم (در اینجا ۶)

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} P \\ \gamma \end{Bmatrix}}_{F_{LM}} = \underbrace{\begin{bmatrix} K & G \\ G & O \end{bmatrix}}_{K_{LM}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \\ \lambda \end{Bmatrix}}_{\Delta_{LM}} \Rightarrow F_{LM} = K_{LM} \times \Delta_{LM} \Rightarrow \Delta_{LM} = K_{LM}^{-1} \times F_{LM}$$

$K_{LM} =$

259.5	507.9	-670.1	-259.5	-507.9	-670.1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
507.9	1021.4	335.0	-507.9	-1021.4	335.0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
-670.1	335.0	134015.0	670.1	-335.0	67007.5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
-259.5	-507.9	670.1	1685.4	507.9	670.1	-1425.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-507.9	-1021.4	-335.0	507.9	1029.2	601.4	0	-7.8	936.5	0	0	0	0	0	0	0
-670.1	335.0	67007.5	670.1	601.4	283848.3	0	-936.5	74916.7	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1425.8	0	0	1425.8	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	-7.8	-936.5	0	7.8	-936.5	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	936.5	74916.7	0	-936.5	149833.3	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

توجه: هر جا که مقدار نیرو مجهول است در بردار  $F_{LM}$  جای آن صفر قرار می‌دهیم.

$$F_{LM} = \begin{bmatrix} 0 \\ -45 \\ -1350 \\ 0 \\ -60 \\ -750 \\ 0 \\ -15 \\ 600 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{LM} = K_{LM}^{-1} \times F_{LM} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.021301 \\ -0.067322 \\ -0.002550 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ \hline -30.372252 \\ -102.086758 \\ -1215.966452 \\ 30.372252 \\ -17.913242 \\ 854.074049 \end{bmatrix}$$

### عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

حال با استفاده از بردار جابه‌جایی به دست آمده می‌توان مجهولات بردار نیرو را به دست آورد.

$$P = (K \times \Delta) + P^f$$

$$\begin{bmatrix} 259.5 & 507.9 & -670.1 & -259.5 & -507.9 & -670.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 507.9 & 1021.4 & 335.0 & -507.9 & -1021.4 & 335.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -670.1 & 335.0 & 134015.0 & 670.1 & -335.0 & 67007.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -259.5 & -507.9 & 670.1 & 1685.4 & 507.9 & 670.1 & -1425.8 & 0.0 & 0.0 \\ -507.9 & -1021.4 & -335.0 & 507.9 & 1029.2 & 601.4 & 0.0 & -7.8 & 936.5 \\ -670.1 & 335.0 & 67007.5 & 670.1 & 601.4 & 283848.3 & 0.0 & -936.5 & 74916.7 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1425.8 & 0.0 & 0.0 & 1425.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -7.8 & -936.5 & 0.0 & 7.8 & -936.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 936.5 & 74916.7 & 0.0 & -936.5 & 149833.3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0213 \\ -0.0673 \\ -0.0025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 1350 \\ 0 \\ 60 \\ -750 \\ 0 \\ 15 \\ -600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.372 \\ 102.087 \\ 1215.966 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -1500 \\ \hline -30.372 \\ 17.913 \\ -854.074 \end{bmatrix}$$

## قاب تحت بارگذاری‌های نیرویی مختلف (تراکم درجات آزادی Condensation)

در قاب مسئله قبل اگر چرخش‌ها را درجات درونی (internal) در نظر بگیریم با استفاده از روش تراکم درجات جابه‌جایی‌ها را محاسبه نماییم.

حل:

درجات آزاد (f): (۴، ۵، ۶)	درجات مقید (s): (۱، ۲، ۳، ۷، ۸، ۹)
درجات بیرونی (e): (۴، ۵)	درجات درونی (i): (۶)
$F_f^{Final} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}$	$K_{ff} = \begin{bmatrix} 1685.361 & 507.888 & 670.075 \\ 507.888 & 1029.164 & 601.421 \\ 670.075 & 601.421 & 283848.341 \end{bmatrix}$
$P_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}$	$K_{ei} = \begin{bmatrix} 670.075 \\ 601.421 \end{bmatrix}$
$P_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}$	$K_{ii} = \begin{bmatrix} 283848.341 \end{bmatrix}$
$K_{ee}^{\star} = K_{ee} - K_{ei} K_{ii}^{-1} K_{ie}$	
$K_{ee}^{\star} = \begin{bmatrix} 1685.361 & 507.888 \\ 507.888 & 1029.164 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 670.075 \\ 601.421 \end{bmatrix} \times \left[ \frac{1}{283848.341} \right] \times \begin{bmatrix} 670.075 & 601.421 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$	
$K_{ee}^{\star} = \begin{bmatrix} 1683.779 & 506.468 \\ 506.468 & 1027.890 \end{bmatrix}$	
$P_e^{\star} = P_e - K_{ei} K_{ii}^{-1} P_i$	
$P_e^{\star} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 670.075 \\ 601.421 \end{bmatrix} \times \left[ \frac{1}{283848.341} \right] \times \begin{bmatrix} -750 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1.7705 \\ -58.4109 \end{bmatrix}$	
$P_e^{\star} = K_{ee}^{\star} \times \Delta_e \Rightarrow \Delta_e = K_{ee}^{\star-1} \times P_e^{\star}$	
$\Delta_e = \begin{bmatrix} 1683.779 & 506.468 \\ 506.468 & 1027.890 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1.7705 \\ -58.4109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.021301 \\ -0.067322 \end{bmatrix} in$	
$\Delta_i = K_{ii}^{-1} (P_i - K_{ie} \Delta_e)$	
$\Delta_i = \left[ \frac{1}{283848.341} \right] \left( \begin{bmatrix} -750 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 670.075 & 601.421 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.021301 \\ -0.067322 \end{bmatrix} \right) = -0.002550 rad$	
$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_e \\ \vdots \\ \Delta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.021301 \\ -0.067322 \\ -0.002550 \end{bmatrix}$	

## قاب تحت بارگذاری‌های نیرویی مختلف (با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی)

جابه‌جایی‌های قاب مسئله گذشته را با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های خمشی، برشی و محوری محاسبه نمایید. همچنین شرایط تکیه‌گاهی به روش حذفی اعمال شوند. فرض کنید مقطع اعضا مستطیلی شکل و ضریب پواسون 0.3 است.

**حل:**

برای هر المان ماتریس سختی عضو را با استفاده از فرمول‌های قاب (با اثر تغییر شکل‌های برشی) در مختصات کلی به دست می‌آوریم. سایر محاسبات همانند قبل است.

**توجه:** از آنجاکه سطح مقطع اعضا مستطیلی شکل است، ضریب اصلاح برش  $\kappa = \frac{5}{6}$  است. به عبارتی  $f_s = 1.2$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 11153.846154$$

$$B_s = \frac{12EI f_s}{AGL^2}$$

**ماتریس سختی عضو در مختصات کلی:**

عضو ۱

$$B_s^{(1)} = 0.013661017$$

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 259.468 & 507.918 & -661.044 & -259.468 & -507.918 & -661.044 \\ 507.918 & 1021.345 & 330.522 & -507.918 & -1021.345 & 330.522 \\ -661.044 & 330.522 & 132660.426 & 661.044 & -330.522 & 65652.923 \\ -259.468 & -507.918 & 661.044 & 259.468 & 507.918 & 661.044 \\ -507.918 & -1021.345 & -330.522 & 507.918 & 1021.345 & -330.522 \\ -661.044 & 330.522 & 65652.923 & 661.044 & -330.522 & 132660.426 \end{bmatrix}$$

عضو ۲

$$B_s^{(2)} = 0.017076271$$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1425.833 & 0.000 & 0.000 & -1425.833 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 7.673 & 920.736 & 0.000 & -7.673 & 920.736 \\ 0.000 & 920.736 & 147946.606 & 0.000 & -920.736 & 73029.939 \\ -1425.833 & 0.000 & 0.000 & 1425.833 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -7.673 & -920.736 & 0.000 & 7.673 & -920.736 \\ 0.000 & 920.736 & 73029.939 & 0.000 & -920.736 & 147946.606 \end{bmatrix}$$

### روی هم‌گذاری ماتریس‌های سختی

$K =$

259.468	507.918	-661.044	-259.468	-507.918	-661.044	0.000	0.000	0.000
507.918	1021.345	330.522	-507.918	-1021.345	330.522	0.000	0.000	0.000
-661.044	330.522	132660.426	661.044	-330.522	65652.923	0.000	0.000	0.000
-259.468	-507.918	661.044	1685.301	507.918	661.044	-1425.833	0.000	0.000
-507.918	-1021.345	-330.522	507.918	1029.018	590.213	0.000	-7.673	920.736
-661.044	330.522	65652.923	661.044	590.213	280607.032	0.000	-920.736	73029.939
0.000	0.000	0.000	-1425.833	0.000	0.000	1425.833	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	-7.673	-920.736	0.000	7.673	-920.736
0.000	0.000	0.000	0.000	920.736	73029.939	0.000	-920.736	147946.606

### اعمال شرایط مرزی

(۱) سطرهای مربوط به درجات مقید شده را از سختی و نیرو حذف می‌کنیم. ۹، ۸، ۷، ۳، ۲، ۱.

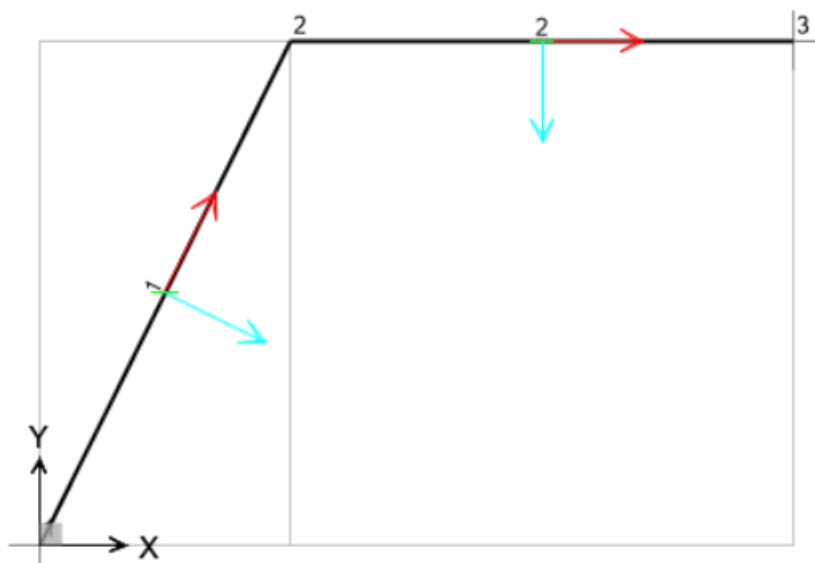
(۲) درجات مقید شده با جابجایی صفر را از ستون سختی و سطر جابجایی حذف می‌کنیم. ۹، ۸، ۷، ۳، ۲، ۱.

$$K_R = \begin{bmatrix} 1685.301 & 507.918 & 661.044 \\ 507.918 & 1029.018 & 590.213 \\ 661.044 & 590.213 & 280607.032 \end{bmatrix}, \quad F_R = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix}$$

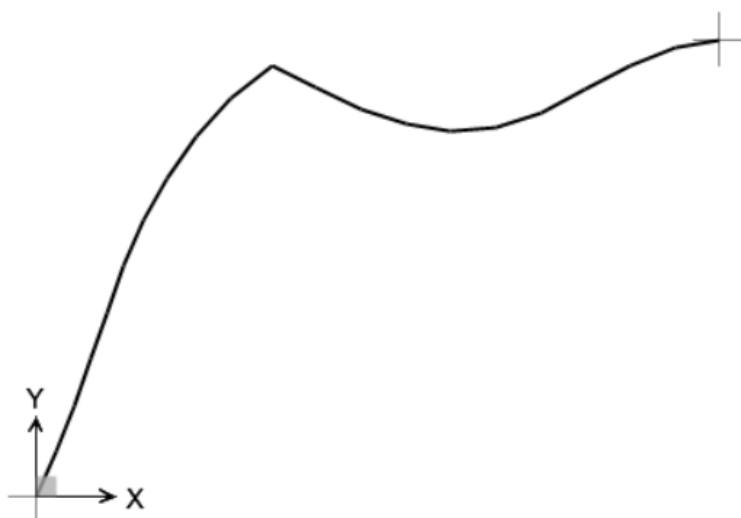
$$\Delta_R = \begin{bmatrix} 1685.301 & 507.918 & 661.044 \\ 507.918 & 1029.018 & 590.213 \\ 661.044 & 590.213 & 280607.032 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ -750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.021309 \\ -0.067346 \\ -0.002581 \end{bmatrix}$$

### مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری SAP2000 v20.2

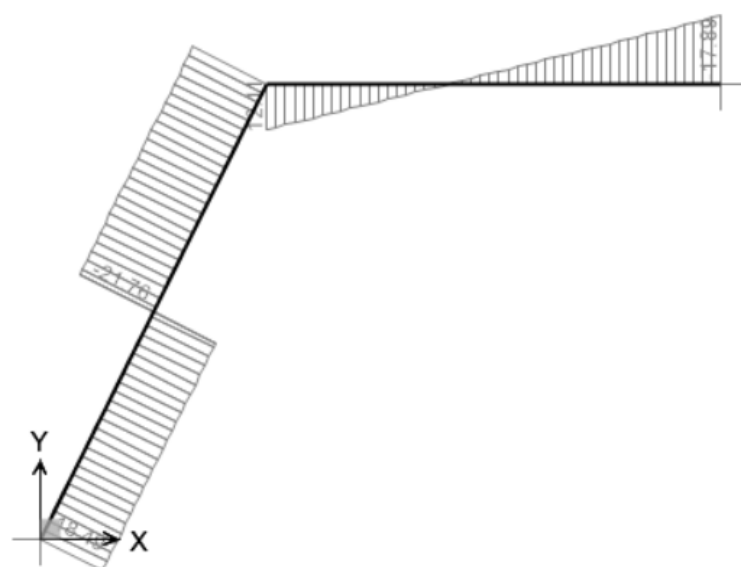
مدل سازه و نمایش محورها محلی و مختصات کلی در نرم‌افزار:



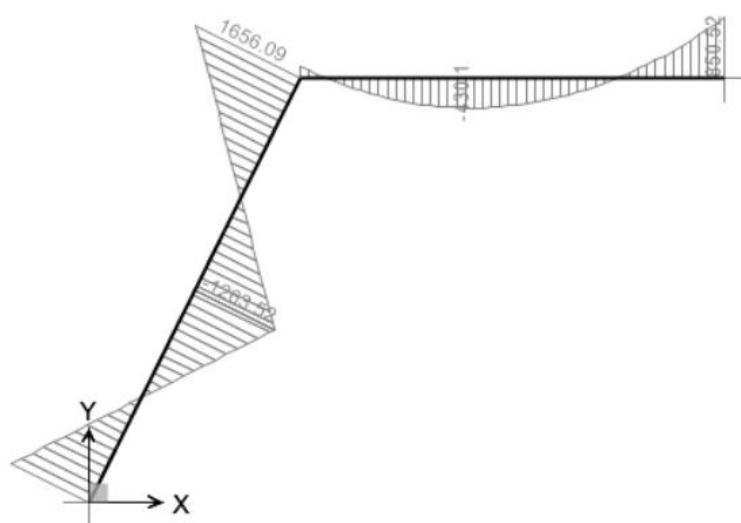
سازه تغییر شکل یافته:



دیاگرام برش:



دیاگرام ممان:



نتایج جا به جایی گره‌ها:

**Joint Displacements**

File View Edit Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted

Filter:

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	U1 in	U2 in	U3 in	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	2	DEAD	LinStatic	0.021309	-0.067344	0	0	0	-0.002581
	3	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0

Record: << < 1 > >> of 3

Add Tables... Done

نتایج نیروهای داخلی هر عضو:

**Element Forces - Frames**

File View Edit Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted

Filter:

	Frame Text	Station in	OutputCase	CaseType Text	P Kip	V2 Kip	V3 Kip	T Kip-in	M2 Kip-in	M3 Kip-in	FrameElem Text	ElemStation
▶	1	0	DEAD	LinStatic	-104.915	0	18.488	0	1216.874	0	1-1	0
	1	268.328	DEAD	LinStatic	-24.416	0	-21.761	0	1656.094	0	1-1	268.328
	2	0	DEAD	LinStatic	-30.383	0	12.107	0	156.094	0	2-1	0
	2	240	DEAD	LinStatic	-30.383	0	-17.893	0	850.522	0	2-1	240

Record: << < 1 > >> of 4

Add Tables... Done

نتایج عکس العمل تکیه‌گاه:

**Joint Reactions**

File View Edit Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted

Filter:

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	F1 Kip	F2 Kip	F3 Kip	M1 Kip-in	M2 Kip-in	M3 Kip-in
▶	1	DEAD	LinStatic	30.383	102.107	0	0	0	1216.874
	3	DEAD	LinStatic	-30.383	17.893	0	0	0	-850.522

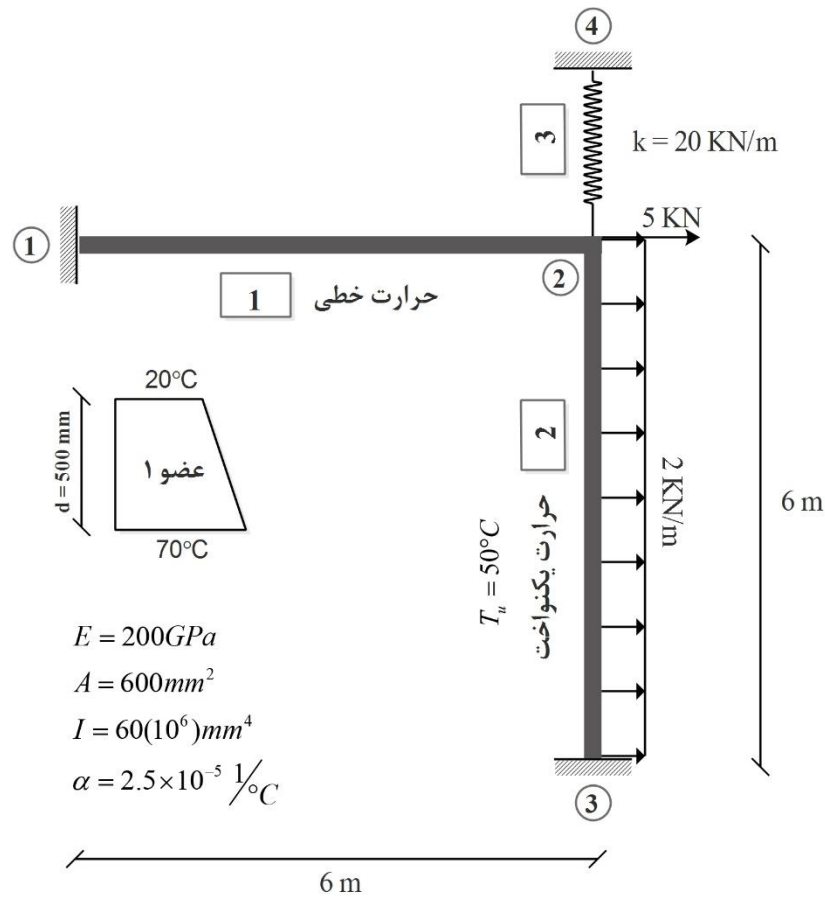
Record: << < 1 > >> of 2

Add Tables... Done



## قاب با اثر حرارت و بارگذاری گسترده

در قاب نشان داده شده مطلوب است تعیین تغییر مکان هر گره:



برای هر المان با استفاده از فرمول‌های زیر خواهیم داشت:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$L = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_b - x_a}{L} \quad \sin(\theta) = \frac{y_b - y_a}{L}$$

ماتریس سختی عضو ۱ :

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 20000.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 666.67 & 2000.00 & 0.00 & -666.67 & 2000.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 8000.00 & 0.00 & -2000.00 & 4000.00 \\ -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -666.67 & -2000.00 & 0.00 & 666.67 & -2000.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 4000.00 & 0.00 & -2000.00 & 8000.00 \end{bmatrix}$$

$$L = 6$$

$$\cos(\theta) = 1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k \times T = K^{(1)} = \begin{bmatrix} 20000.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 666.67 & 2000.00 & 0.00 & -666.67 & 2000.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 8000.00 & 0.00 & -2000.00 & 4000.00 \\ -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -666.67 & -2000.00 & 0.00 & 666.67 & -2000.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 4000.00 & 0.00 & -2000.00 & 8000.00 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی عضو ۲ :

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 20000.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 666.67 & 2000.00 & 0.00 & -666.67 & 2000.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 8000.00 & 0.00 & -2000.00 & 4000.00 \\ -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -666.67 & -2000.00 & 0.00 & 666.67 & -2000.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 4000.00 & 0.00 & -2000.00 & 8000.00 \end{bmatrix}$$

$$L = 6$$

$$\cos(\theta) = 0 \quad \sin(\theta) = -1$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k \times T = K^{(2)} = \begin{bmatrix} 666.67 & 0.00 & 2000.00 & -666.67 & 0.00 & 2000.00 \\ 0.00 & 20000.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 \\ 2000.00 & 0.00 & 8000.00 & -2000.00 & 0.00 & 4000.00 \\ -666.67 & 0.00 & -2000.00 & 666.67 & 0.00 & -2000.00 \\ 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20000.00 & 0.00 \\ 2000.00 & 0.00 & 4000.00 & -2000.00 & 0.00 & 8000.00 \end{bmatrix}$$

اسمبل کردن ماتریس سختی و تأثیر سختی فنر:

$$K = \begin{bmatrix} 20000.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 666.67 & 2000.00 & 0.00 & -666.67 & 2000.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 8000.00 & 0.00 & -2000.00 & 4000.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20666.67 & 0.00 & 2000.00 & -666.67 & 0.00 & 2000.00 \\ 0.00 & -666.67 & -2000.00 & 0.00 & 20666.67 + 20 & -2000.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 4000.00 & 2000.00 & -2000.00 & 16000.00 & -2000.00 & 0.00 & 4000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -666.67 & 0.00 & -2000.00 & 666.67 & 0.00 & -2000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20000.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2000.00 & 0.00 & 4000.00 & -2000.00 & 0.00 & 8000.00 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 20000.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 666.67 & 2000.00 & 0.00 & -666.67 & 2000.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 8000.00 & 0.00 & -2000.00 & 4000.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20666.67 & 0.00 & 2000.00 & -666.67 & 0.00 & 2000.00 \\ 0.00 & -666.67 & -2000.00 & 0.00 & 20686.67 & -2000.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2000.00 & 4000.00 & 2000.00 & -2000.00 & 16000.00 & -2000.00 & 0.00 & 4000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -666.67 & 0.00 & -2000.00 & 666.67 & 0.00 & -2000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -20000.00 & 0.00 & 0.00 & 20000.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2000.00 & 0.00 & 4000.00 & -2000.00 & 0.00 & 8000.00 \end{bmatrix}$$

بردار F برای هر عضو:

حرارت یکنواخت در طول عضو:

$$FA_b = -FA_e = EA\alpha T_u$$

تغییر حرارت خطی در ارتفاع عضو:

$$FA_b = -FA_e = EA\alpha \left( \frac{T_b + T_t}{2} \right)$$

$$FM_b = -FM_e = EI\alpha \left( \frac{T_b - T_t}{d} \right)$$

عضو ۱:

$$\left. \begin{aligned} FA_1 = -FA_2 &= 200 \times 10^6 \times 600 \times 10^{-6} \times 2.5 \times 10^{-5} \left( \frac{20 + 70}{2} \right) = 135 \\ FS_1 &= FS_2 = 0 \\ FM_1 = -FM_2 &= 200 \times 10^6 \times 60 \times 10^{-6} \times 10^{-12} \times 2.5 \times 10^{-5} \left( \frac{70 - 20}{0.5} \right) = 30 \end{aligned} \right\} \rightarrow f_{(1)}^f = \begin{Bmatrix} 135 \\ 0 \\ 30 \\ -135 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T' \times f_{(1)}^f} F_{(1)}^f = \begin{Bmatrix} 135 \\ 0 \\ 30 \\ -135 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix}$$

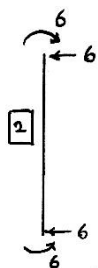
با توجه به هندسه قاب درایه‌های بردار F پس از انتقال به مختصات Global تفاوتی نمی‌کند.

عضو ۲:

▪ توزیع حرارت یکنواخت در طول عضو

$$\left. \begin{aligned} FA_2 = -FA_3 &= 200 \times 10^6 \times 600 \times 10^{-6} \times 2.5 \times 10^{-5} (50) = 150 \\ FS_2 &= FS_3 = 0 \\ FM_2 &= FM_3 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow f_{(2)}^f = \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T' \times f_{(2)}^f} F_{(2)}^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

▪ تبدیل بار گسترده به بار گره‌ای



$$\left. \begin{aligned} FA_2 &= FA_3 = 0 \\ FS_2 &= FS_3 = 6 \\ FM_2 &= -FM_3 = -6 \end{aligned} \right\} \rightarrow f_{(2)}^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T' \times f_{(2)}^f} F_{(2)}^f = \begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

اسمبل کردن بردار F و به دست آوردن بردار P :

$$\begin{Bmatrix} 135 \\ 0 \\ 30 \\ -135-6 \\ -150 \\ -30-6 \\ -6 \\ 150 \\ 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 135 \\ 0 \\ 30 \\ -141 \\ -150 \\ -36 \\ -6 \\ 150 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

جمع‌بندی اطلاعات مورد نیاز برای حل دستگاه:

$$P_f^f = \begin{Bmatrix} -141 \\ -150 \\ -36 \end{Bmatrix} \quad \& \quad P_f = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

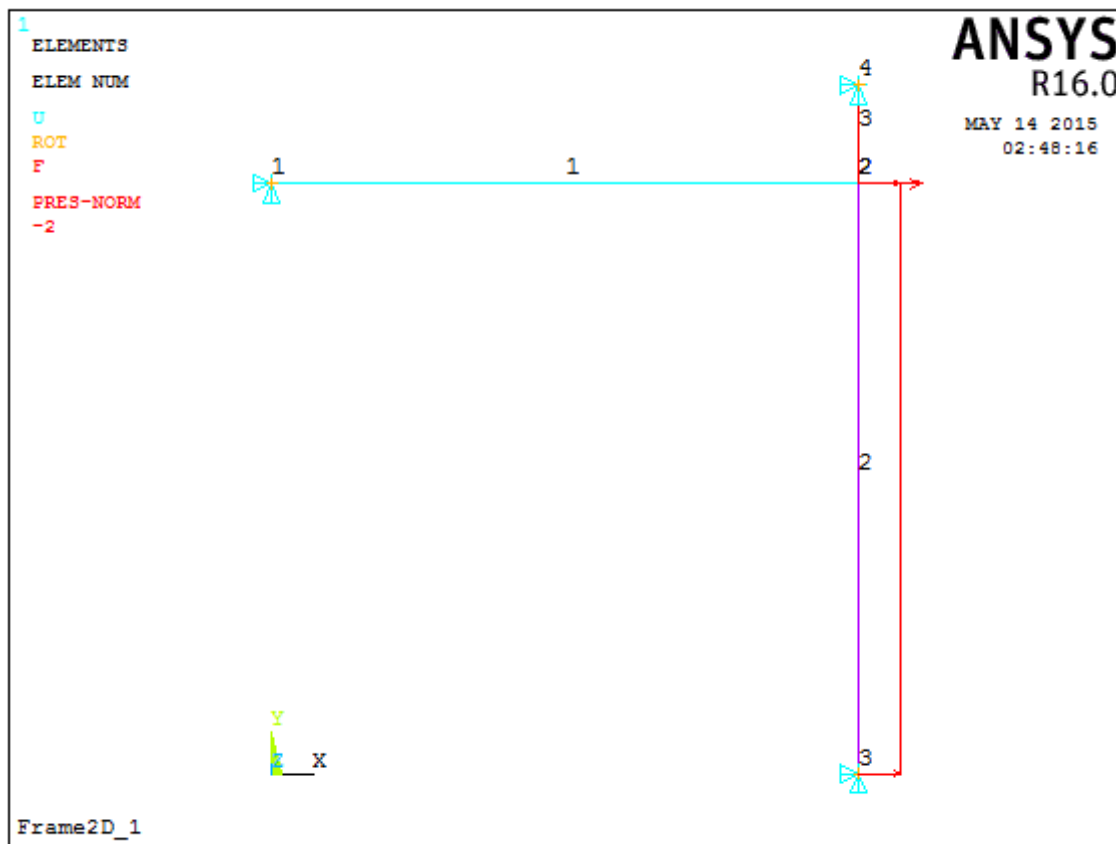
$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 20666.67 & 0.00 & 2000.00 \\ 0.00 & 20686.67 & -2000.00 \\ 2000.00 & -2000.00 & 16000.00 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta_f\} = \begin{bmatrix} 20666.67 & 0.00 & 2000.00 \\ 0.00 & 20686.67 & -2000.00 \\ 2000.00 & -2000.00 & 16000.00 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 146 \\ 150 \\ 36 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta_f\} = \begin{Bmatrix} 0.0068391 \text{ m} \\ 0.0074763 \text{ m} \\ 0.0023297 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

## مقایسه نتایج با نرم‌افزار تجاری ANSYS v16

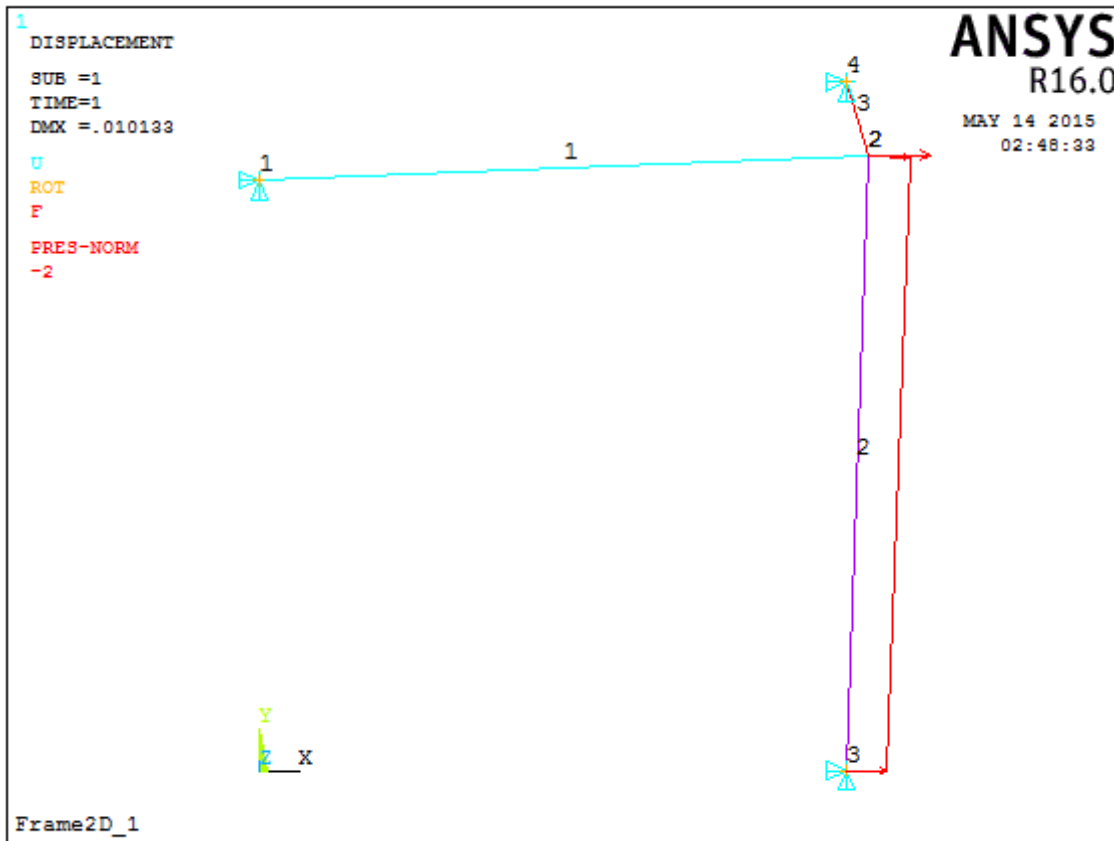
مدل سازه:



نتایج عکس‌العمل تکیه‌گاه:

PRRSOL Command				
File				
PRINT REACTION SOLUTIONS PER NODE				
***** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING *****				
LOAD STEP= 0 SUBSTEP= 1				
TIME= 1.00000 LOAD CASE= 0				
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM				
NODE	FX	FY	FZ	MZ
1	-1.7813	-0.32488	0.00000	24.366
3	-15.219	0.47441	0.00000	28.997
4	0.00000	-0.14953	0.00000	0.00000
TOTAL VALUES				
VALUE	-17.000	0.20539E-14	0.00000	53.363

سازه تغییر شکل یافته:



نتایج جابه‌جایی گره‌ها:

PRNSOL Command

File

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 0 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.68391E-02	0.74763E-02	0.0000	0.10133E-01
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	2	2	0	2
VALUE	0.68391E-02	0.74763E-02	0.0000	0.10133E-01

```

PRNSOL Command

File

PRINT ROT  NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=    0  SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000  LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM

  NODE      ROTZ
    1      0.0000
    2  0.23297E-02
    3      0.0000
    4      0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      2
VALUE  0.23297E-02

```

نتایج نیروهای داخلی هر عضو:

```

PRETAB Command

File

PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****

  STAT      CURRENT      CURRENT      CURRENT      CURRENT      CURRENT      CURRENT
  ELEM      SMIS1      SMIS2      SMIS6      SMIS7      SMIS8      SMIS12
    1      1.7813      0.32488      -24.366      1.7813      0.32488      -26.315
    2 -0.47441      -3.2187      -26.315      -0.47441      -15.219      28.997
    3 -0.14953      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000

MINIMUM VALUES
ELEM      2      2      2      2      2      1
VALUE -0.47441      -3.2187      -26.315      -0.47441      -15.219      -26.315

MAXIMUM VALUES
ELEM      1      1      3      1      1      2
VALUE  1.7813      0.32488      0.0000      1.7813      0.32488      28.997

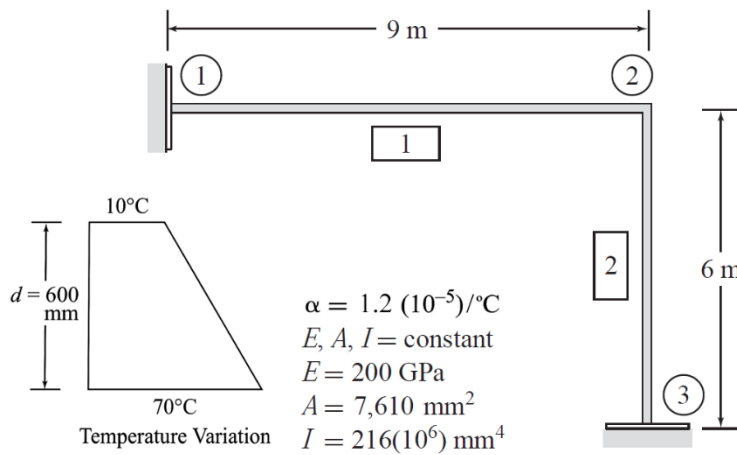
```



## قاب با اثر حرارت و نشست

در قاب نشان داده شده گره ۳ به اندازه ۲۵ میلی‌متر نشست کرده است، عضو ۱ تحت حرارت خطی نشان داده شده قرار گرفته است. مطلوب است:

- (الف) تعیین تغییر مکان هر گره  
(ب) تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاه  
(ج) تعیین نیروی داخلی هر عضو



**حل:** واحدها همگی برحسب متر و کیلو نیوتن می‌باشند.

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$$

$$A = 7610 \text{ mm}^2 = 7610 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$I = 216 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 216 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

## قسمت الف

برای هر المان با استفاده از فرمول‌های زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$L = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_b - x_a}{L} \quad \sin(\theta) = \frac{y_b - y_a}{L}$$

ماتریس سختی عضو ۱ :

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 169111.111 & 0.000 & 0.000 & -169111.111 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 711.111 & 3200.000 & 0.000 & -711.111 & 3200.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 19200.000 & 0.000 & -3200.000 & 9600.000 \\ -169111.111 & 0.000 & 0.000 & 169111.111 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -711.111 & -3200.000 & 0.000 & 711.111 & -3200.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 9600.000 & 0.000 & -3200.000 & 19200.000 \end{bmatrix}$$

$$L = 9$$

$$\cos(\theta) = 1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k \times T = K^{(1)} = \begin{bmatrix} 169111.111 & 0.000 & 0.000 & -169111.111 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 711.111 & 3200.000 & 0.000 & -711.111 & 3200.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 19200.000 & 0.000 & -3200.000 & 9600.000 \\ -169111.111 & 0.000 & 0.000 & 169111.111 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -711.111 & -3200.000 & 0.000 & 711.111 & -3200.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 9600.000 & 0.000 & -3200.000 & 19200.000 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی عضو ۲ :

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 253666.667 & 0.000 & 0.000 & -253666.667 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 2400.000 & 7200.000 & 0.000 & -2400.000 & 7200.000 \\ 0.000 & 7200.000 & 28800.000 & 0.000 & -7200.000 & 14400.000 \\ -253666.667 & 0.000 & 0.000 & 253666.667 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2400.000 & -7200.000 & 0.000 & 2400.000 & -7200.000 \\ 0.000 & 7200.000 & 14400.000 & 0.000 & -7200.000 & 28800.000 \end{bmatrix}$$

$$L = 6$$

$$\cos(\theta) = 0 \quad \sin(\theta) = -1$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k \times T = K^{(2)} = \begin{bmatrix} 2400.000 & 0.000 & 7200.000 & -2400.000 & 0.000 & 7200.000 \\ 0.000 & 253666.667 & 0.000 & 0.000 & -253666.667 & 0.000 \\ 7200.000 & 0.000 & 28800.000 & -7200.000 & 0.000 & 14400.000 \\ -2400.000 & 0.000 & -7200.000 & 2400.000 & 0.000 & -7200.000 \\ 0.000 & -253666.667 & 0.000 & 0.000 & 253666.667 & 0.000 \\ 7200.000 & 0.000 & 14400.000 & -7200.000 & 0.000 & 28800.000 \end{bmatrix}$$

اسمبل کردن ماتریس سختی:

$$K = \begin{bmatrix} 169111.111 & 0.000 & 0.000 & -169111.111 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 711.111 & 3200.000 & 0.000 & -711.111 & 3200.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 19200.000 & 0.000 & -3200.000 & 9600.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -169111.111 & 0.000 & 0.000 & 171511.111 & 0.000 & 7200.000 & -2400.000 & 0.000 & 7200.000 \\ 0.000 & -711.111 & -3200.000 & 0.000 & 254377.778 & -3200.000 & 0.000 & -253666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 9600.000 & 7200.000 & -3200.000 & 48000.000 & -7200.000 & 0.000 & 14400.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2400.000 & 0.000 & -7200.000 & 2400.000 & 0.000 & -7200.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -253666.667 & 0.000 & 0.000 & 253666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 7200.000 & 0.000 & 14400.000 & -7200.000 & 0.000 & 28800.000 \end{bmatrix}$$

بردار نیرو برای عضو ۱:

$$\left. \begin{aligned} FA_1 = -FA_2 &= 200 \times 10^6 \times 7610 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^{-5} \left( \frac{70+10}{2} \right) = 730.56 \\ FS_1 = FS_2 &= 0 \\ FM_1 = -FM_2 &= 200 \times 10^6 \times 216 \times 10^6 \times 10^{-12} \times 1.2 \times 10^{-5} \left( \frac{70-10}{0.6} \right) = 51.84 \end{aligned} \right\} \rightarrow f_{(1)}^f = \begin{bmatrix} 730.56 \\ 0.00 \\ 51.84 \\ -730.56 \\ 0.00 \\ -51.84 \end{bmatrix} \xrightarrow{T' \times f_{(1)}^f} F_{(1)}^f = \begin{bmatrix} 730.56 \\ 0.00 \\ 51.84 \\ -730.56 \\ 0.00 \\ -51.84 \end{bmatrix}$$

به دست آوردن تغییر شکل‌های گرهی:

$$P_f^f = \begin{bmatrix} -730.56 \\ 0.00 \\ -51.84 \end{bmatrix} \quad P_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_s = \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0025 \\ 0.0000 \end{Bmatrix}$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 171511.111 & 0.000 & 7200.000 \\ 0.000 & 254377.778 & -3200.000 \\ 7200.000 & -3200.000 & 48000.000 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} -169111.111 & 0.000 & 0.000 & -2400.000 & 0.000 & 7200.000 \\ 0.000 & -711.111 & -3200.000 & 0.000 & -253666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 9600.000 & -7200.000 & 0.000 & 14400.000 \end{bmatrix}$$

$$P_f = (K_{ff} \times \Delta_f) + (K_{fs} \times \Delta_s) + P_f^f$$

$$K_{fs} \times \Delta_s = \begin{Bmatrix} 0.000 \\ 6341.667 \\ 0.000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta_f\} = \begin{bmatrix} 171511.111 & 0.000 & 7200.000 \\ 0.000 & 254377.778 & -3200.000 \\ 7200.000 & -3200.000 & 48000.000 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 730.5600 \\ -6341.6667 \\ 51.8400 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0043112 \text{ m} \\ -0.0249456 \text{ m} \\ -0.0012297 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

قسمت ب:

به دست آوردن عکس‌العمل تکیه‌گاه:

$$P_s^f = \begin{Bmatrix} 730.5600 \\ 0.0000 \\ 51.8400 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{Bmatrix}$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} -169111.111 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -711.111 & 3200.000 \\ 0.000 & -3200.000 & 9600.000 \\ -2400.000 & 0.000 & -7200.000 \\ 0.000 & -253666.667 & 0.000 \\ 7200.000 & 0.000 & 14400.000 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 169111.111 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 711.111 & 3200.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3200.000 & 19200.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 2400.000 & 0.000 & -7200.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 253666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -7200.000 & 0.000 & 28800.000 \end{bmatrix}$$

$$P_s = (K_{sf} \times \Delta_f) + (K_{ss} \times \Delta_s) + P_s^f$$

$$K_{sf} \times \Delta_f = \begin{Bmatrix} -729.0671 \\ 13.8040 \\ 68.0206 \\ -1.4929 \\ 6327.8627 \\ 13.3325 \end{Bmatrix} \quad \& \quad K_{ss} \times \Delta_s = \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -6341.6667 \\ 0.0000 \end{Bmatrix}$$

$$P_s = \begin{Bmatrix} 1.4929 \\ 13.8040 \\ 119.8606 \\ -1.4929 \\ -13.8040 \\ 13.3325 \end{Bmatrix}$$

## قسمت ج:

$$F^{(e)} = K^{(e)} \times \Delta^{(e)}$$

$$f^{(e)} = (T^{(e)} \times F^{(e)}) + f_{(e)}^f$$

نیروهای عضو ۱:

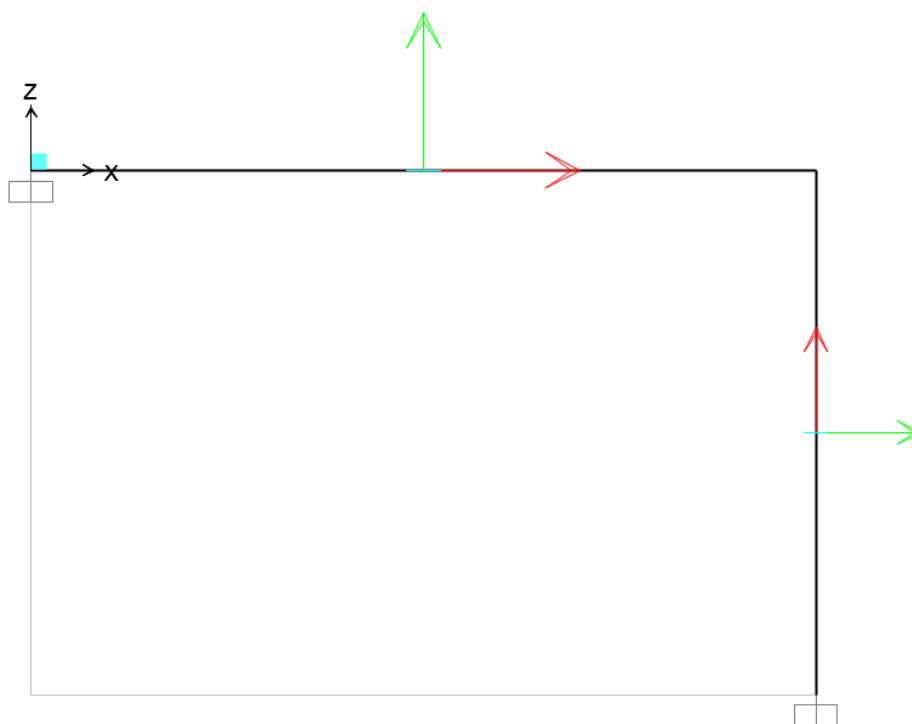
$$F^{(1)} = K^{(1)} \times \begin{Bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.0043112 \\ -0.0249456 \\ -0.0012297 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -729.0671 \\ 13.804 \\ 68.02 \\ 729.0671 \\ -13.804 \\ 56.2153 \end{Bmatrix}$$

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -729.0671 \\ 13.804 \\ 68.02 \\ 729.0671 \\ -13.804 \\ 56.2153 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 730.56 \\ 0.00 \\ 51.84 \\ -730.56 \\ 0.00 \\ -51.84 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.4929 \\ 13.804 \\ 119.86 \\ -1.4929 \\ -13.804 \\ 4.3753 \end{Bmatrix} \end{pmatrix}$$

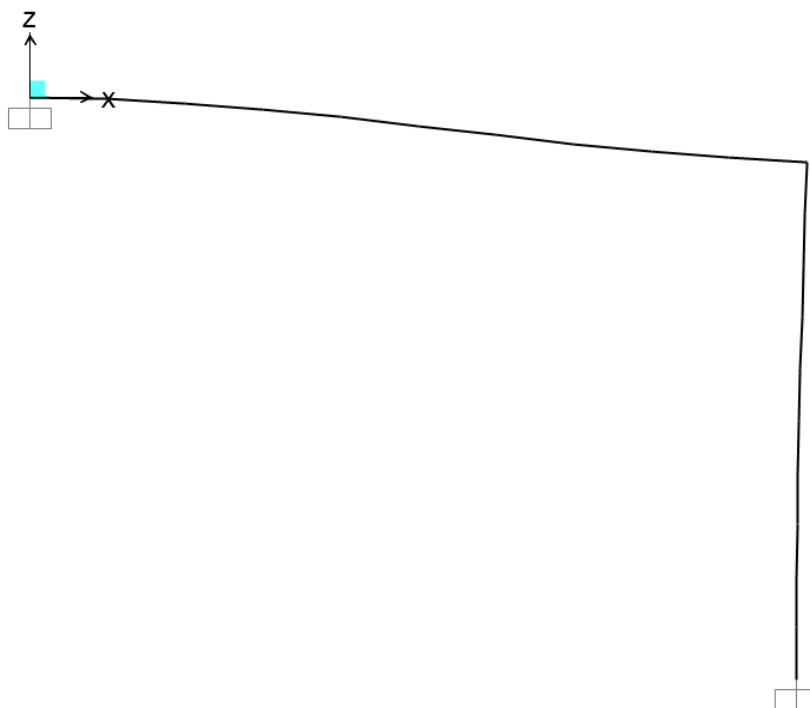
...۹

## مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری SAP2000 v17.1.1

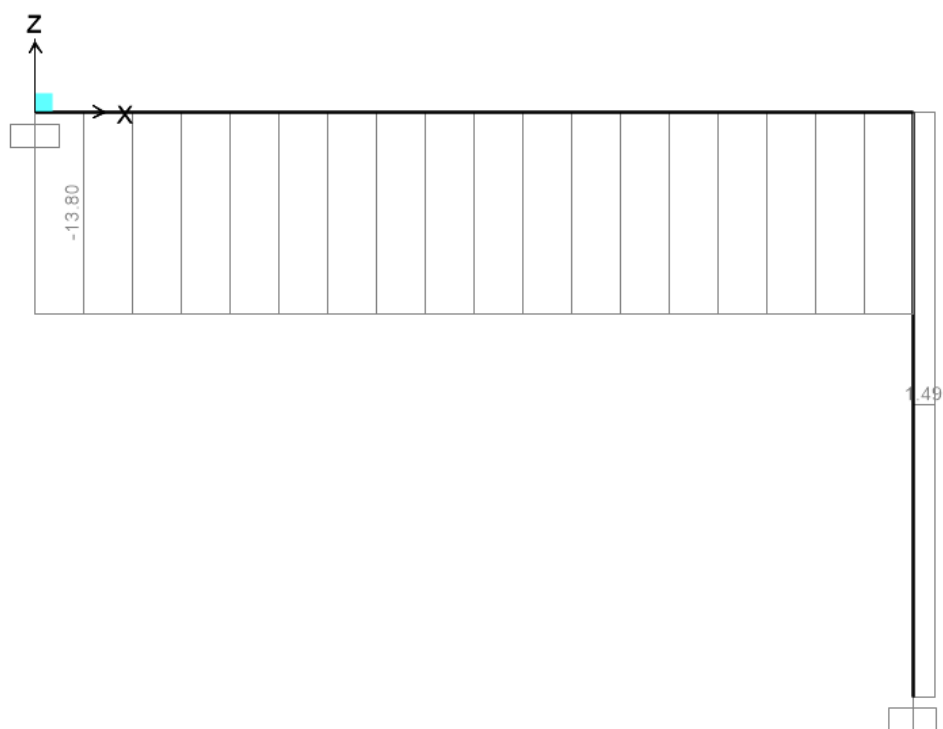
مدل سازه و نمایش محورها و مختصات کلی:



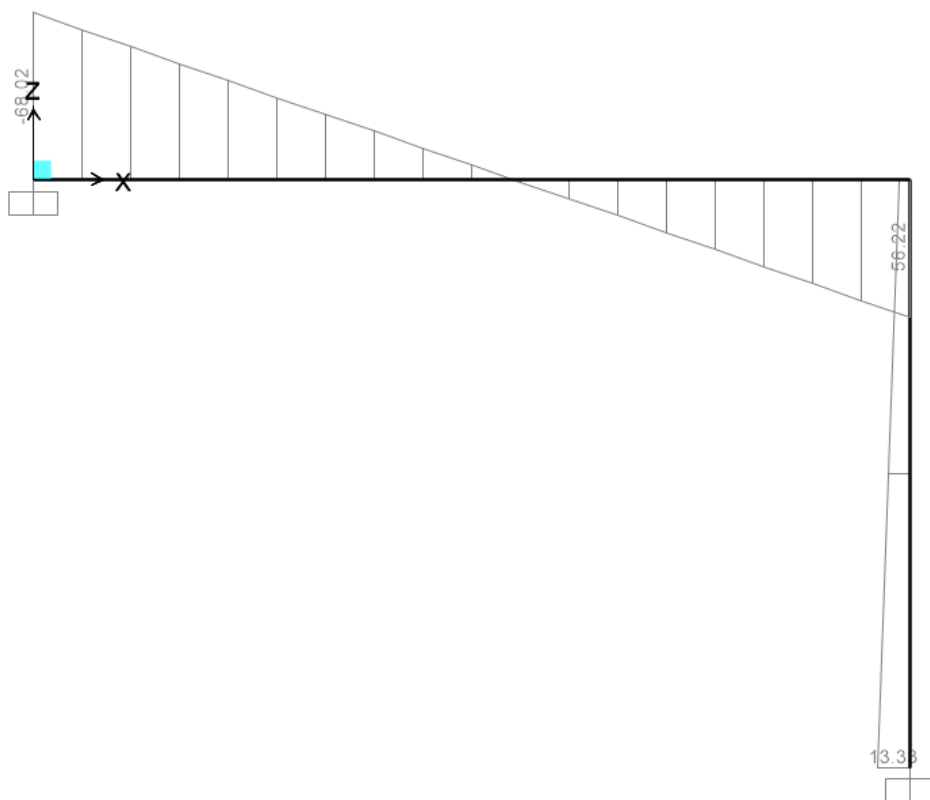
سازه تغییر شکل یافته:



دياگرام برش:



دياگرام ممان:





نتایج جا به جایی گره‌ها:

Joint Displacements									
File View Format-Filter-Sort Select Options									
Units: As Noted		Joint Displacements							
	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	U1 m	U2 m	U3 m	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	2	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	3	DEAD	LinStatic	0	0	-0.025	0	0	0
	4	DEAD	LinStatic	0.004311	0	-0.024946	0	0.00123	0

Record: << < 1 > >> of 3 Add Tables... Done

نتایج نیروهای داخلی هر عضو:

Element Forces - Frames										
File View Format-Filter-Sort Select Options										
Units: As Noted		Element Forces - Frames								
	Frame Text	Station m	OutputCase	CaseType Text	P KN	V2 KN	V3 KN	T KN-m	M2 KN-m	M3 KN-m
▶	2	0	DEAD	LinStatic	13.804	1.493	0	0	0	13.3325
	2	3	DEAD	LinStatic	13.804	1.493	0	0	0	8.8539
	2	6	DEAD	LinStatic	13.804	1.493	0	0	0	4.3753
	3	0	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-68.0206
	3	0.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-61.1186
	3	1	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-54.2166
	3	1.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-47.3146
	3	2	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-40.4126
	3	2.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-33.5106
	3	3	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-26.6086
	3	3.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-19.7066
	3	4	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-12.8046
	3	4.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	-5.9026
	3	5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	0.9994
	3	5.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	7.9014
	3	6	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	14.8034
	3	6.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	21.7054
	3	7	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	28.6074
	3	7.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	35.5094
	3	8	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	42.4113
	3	8.5	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	49.3133
	3	9	DEAD	LinStatic	729.067	-13.804	0	0	0	56.2153

Record: << < 1 > >> of 22 Add Tables... Done

نتایج عکس العمل تکیه گاه:

Joint Reactions

File View Format-Filter-Sort Select Options

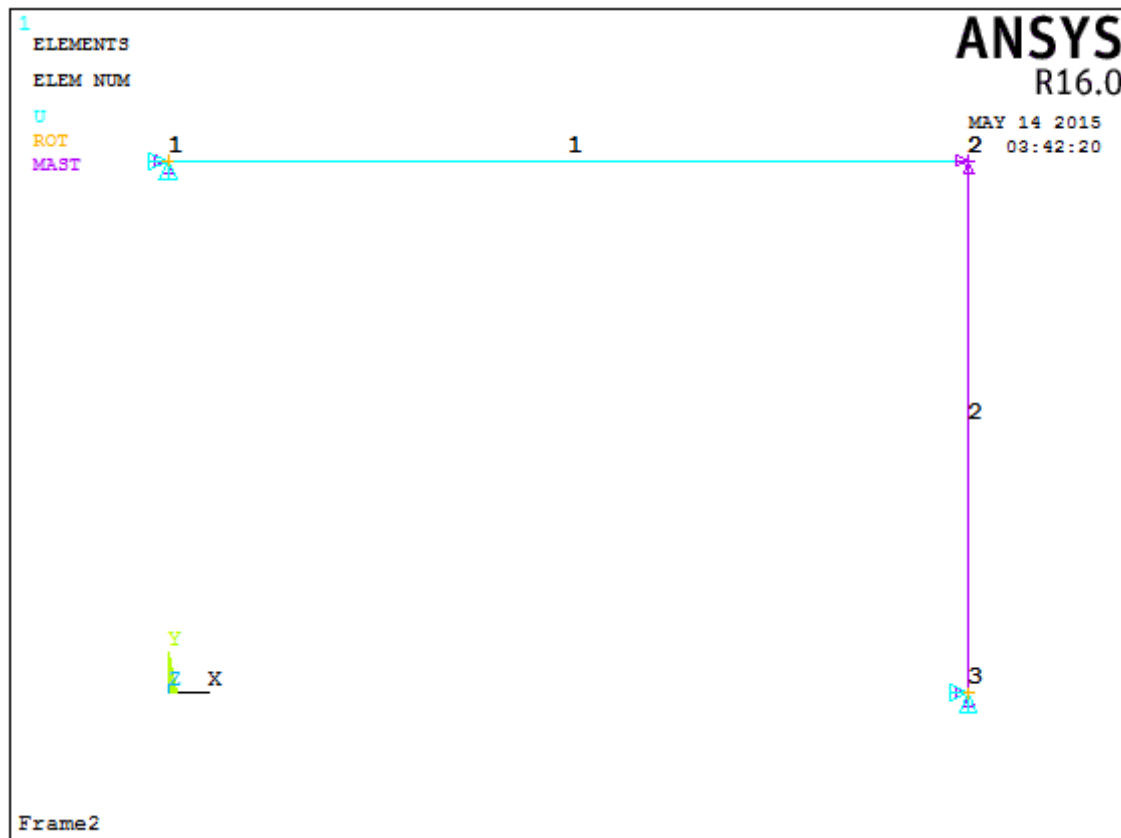
Units: As Noted Joint Reactions

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	F1 KN	F2 KN	F3 KN	M1 KN-m	M2 KN-m	M3 KN-m
▶	2	DEAD	LinStatic	1.493	0	13.804	0	-119.8606	0
	3	DEAD	LinStatic	-1.493	0	-13.804	0	-13.3325	0

Record: << < 1 > >> of 2 Add Tables... Done

مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری ANSYS v16

مدل سازه:



نتایج عکس العمل تکیه گاه:

```

PRRSOL Command
File
PRINT REACTION SOLUTIONS PER NODE
***** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING *****
LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=      0
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM
      NODE      FX      FY      MZ
        1      1.4929      13.804      119.86
        3     -1.4929     -13.804      13.333
TOTAL VALUES
VALUE -0.21316E-13-0.77982E-12  133.19
    
```

نتایج جا به جایی گره‌ها:

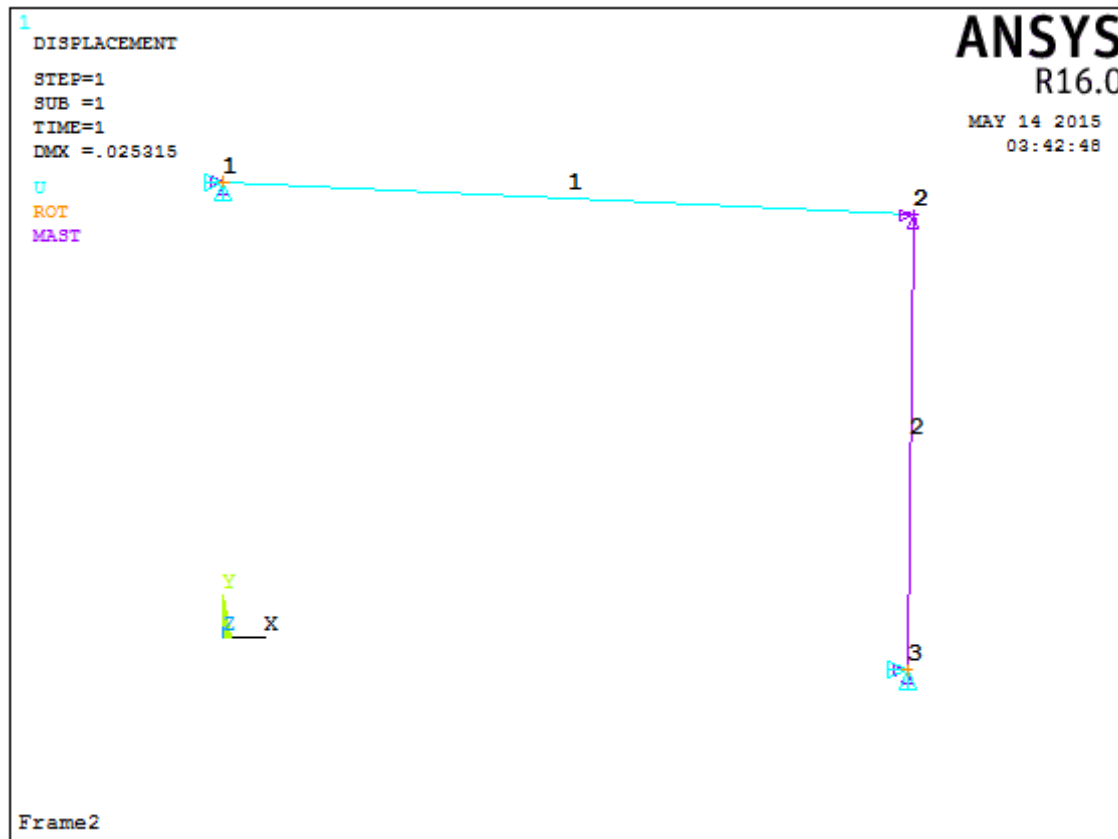
```

PRNSOL Command
File
PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=      0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM
      NODE      UX      UY      UZ      USUM
        1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
        2      0.43112E-02-0.24946E-01      0.0000      0.25315E-01
        3      0.0000     -0.25000E-01      0.0000      0.25000E-01
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
      NODE      2      3      0      2
VALUE      0.43112E-02-0.25000E-01      0.0000      0.25315E-01
    
```

```

PRNSOL Command
File
PRINT ROT  NODAL SOLUTION PER NODE
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=      0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM
      NODE      ROTZ
        1      0.0000
        2     -0.12297E-02
        3      0.0000
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
      NODE      2
VALUE     -0.12297E-02
    
```

سازه تغییر شکل یافته:



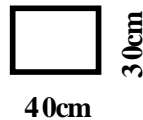
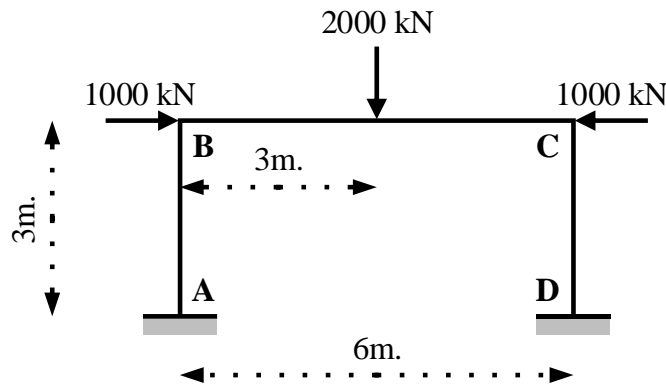
نتایج نیروهای داخلی هر عضو:

PRETAB Command						
File						
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT						
***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****						
STAT	CURRENT	CURRENT	CURRENT	CURRENT	CURRENT	CURRENT
ELEM	SMIS1	SMIS2	SMIS6	SMIS7	SMIS8	SMIS12
1	-1.4929	-13.804	-119.86	-1.4929	-13.804	4.3753
2	13.804	-1.4929	4.3753	13.804	-1.4929	13.333
MINIMUM VALUES						
ELEM	1	1	1	1	1	1
VALUE	-1.4929	-13.804	-119.86	-1.4929	-13.804	4.3753
MAXIMUM VALUES						
ELEM	2	2	2	2	2	2
VALUE	13.804	-1.4929	4.3753	13.804	-1.4929	13.333

## قاب و تغییر شکل‌های محوری، برشی و خمشی

در قاب نشان داده شده مطلوبست تعیین تغییر شکل‌های گره B در حالت‌های زیر:

**راهنمایی:** برای تسریع عملیات می‌توانید از تقارن استفاده نمایید. شماره گذاری المان‌ها و گره‌ها با توجه به استفاده و یا عدم استفاده از تقارن، به عهده دانشجو می‌باشد.



الف: با صرف نظر از تغییر شکل‌های محوری و برشی

ب: با صرف نظر از تغییر شکل‌های برشی

ج: با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های محوری، برشی و خمشی

مشخصات مقطع کلیه اعضا یکسان و به

صورت روبرو است:

مدول الاستیسیته و ضریب پواسون برابر

است با:

$$E=200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

### قسمت ج:

$$b = 40 / 100 \quad h = 30 / 100$$

$$A = b \times h = 0.12 \text{ m}^2 \quad I = \frac{b \times h^3}{12} = 0.0009 \text{ m}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 76923076.923076...$$

$$f_s = 1.2$$

عضو	گره ابتدا	گره انتها	طول عضو	$\cos \theta$	$\sin \theta$
۱	۱	۴	۳	۰	۱
۲	۲	۴	۳	۱	۰

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_f = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ -1000 \end{bmatrix}$$

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \begin{bmatrix} 8000000 & 0 & 0 & -8000000 & 0 & 0 \\ 0 & 77579.519 & 116369.279 & 0 & -77579.519 & 116369.279 \\ 0 & 116369.279 & 234553.918 & 0 & -116369.279 & 114553.918 \\ -8000000 & 0 & 0 & 8000000 & 0 & 0 \\ 0 & -77579.519 & -116369.279 & 0 & 77579.519 & -116369.279 \\ 0 & 116369.279 & 114553.918 & 0 & -116369.279 & 234553.918 \end{bmatrix}$$

$$K^{(1)} = T^{(1)} \times k^{(1)} \times T^{(1)} \Rightarrow$$

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 77579.51901 & 0 & -116369.2785 & -77579.51901 & 0 & -116369.2785 \\ 0 & 8000000 & 0 & 0 & -8000000 & 0 \\ -116369.2785 & 0 & 234553.918 & 116369.2785 & 0 & 114553.918 \\ -77579.51901 & 0 & 116369.2785 & 77579.51901 & 0 & 116369.2785 \\ 0 & -8000000 & 0 & 0 & 8000000 & 0 \\ -116369.2785 & 0 & 114553.918 & 116369.2785 & 0 & 234553.918 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = k^{(2)}$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 8077579.5190 & 0 & 116369.2785 & 0 \\ 0 & 8077579.5190 & 116369.2785 & -77579.5190 \\ 116369.2785 & 116369.2785 & 469107.8355 & -116369.2785 \\ 0 & -77579.5190 & -116369.2785 & 77579.5190 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = K_{ff}^{-1} \times P_f = \begin{bmatrix} 0.00019829 \\ -0.00012500 \\ -0.00517079 \\ -0.02077118 \end{bmatrix}$$

### قسمت ب:

اگر در حل قسمت ج مقدار سختی برشی را افزایش دهیم در نتیجه تغییر شکل‌های برشی به صفر میل می‌کنند. در نتیجه مقدار مدول برشی را  $10^5$  برابر می‌کنیم و جابجایی‌های جدید برابر خواهند بود با :

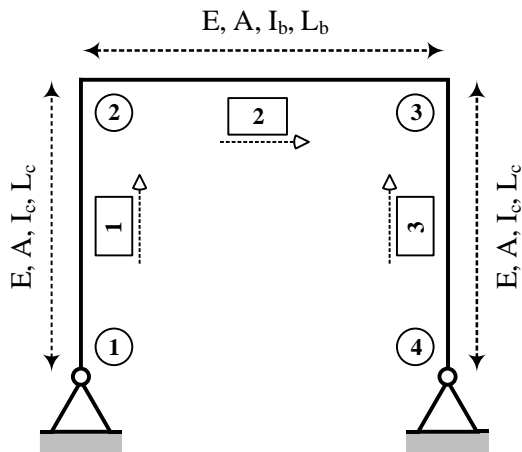
$$\Delta_f = K_{ff}^{-1} \times P_f = \begin{bmatrix} 0.0001992 \\ -0.0001250 \\ -0.0050797 \\ -0.0202445 \end{bmatrix}$$

### قسمت الف:

اگر علاوه بر توضیحات قسمت ب مقدار سطح مقطع را افزایش دهیم، در نتیجه تغییر شکل‌های محوری به سمت صفر میل می‌کنند. در نتیجه سطح مقطع اعضا را  $10^5$  برابر می‌کنیم. و جابجایی‌های جدید برابر خواهند بود با :

$$\Delta_f = K_{ff}^{-1} \times P_f = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ -0.005 \\ -0.020 \end{bmatrix}$$

## قاب با سختی کاهش یافته



در قاب داده شده مطلوبست محاسبه ماتریس سختی کاهش یافته سازه با فرض اینکه از تغییر شکل‌های محوری صرف نظر شود و همچنین در ستون‌ها از تغییر شکل‌های برشی نیز صرف نظر شده باشد (  $\nu = 0, f_s = 1$  ):

ماتریس سختی اعضا در سیستم مختصات کلی:

$$K_{column1,2} = \begin{pmatrix} \frac{3EI_c}{L_c^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI_c}{L_c^3} & 0 & -\frac{3EI_c}{L_c^2} \\ 0 & \frac{AE}{L_c} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI_c}{L_c^3} & 0 & 0 & \frac{3EI_c}{L_c^3} & 0 & \frac{3EI_c}{L_c^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L_c} & 0 & 0 & \frac{AE}{L_c} & 0 \\ -\frac{3EI_c}{L_c^2} & 0 & 0 & \frac{3EI_c}{L_c^2} & 0 & \frac{3EI_c}{L_c} \end{pmatrix}$$

$$K_{beam} = \begin{pmatrix} \frac{AE}{L_b} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_b}{L_b^3(Bs+1)} & \frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} & 0 & -\frac{12EI_b}{L_b^3(Bs+1)} & \frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} \\ 0 & \frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} & \frac{EI_b(Bs+4)}{L_b(Bs+1)} & 0 & -\frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} & -\frac{EI_b(Bs-2)}{L_b(Bs+1)} \\ -\frac{AE}{L_b} & 0 & 0 & \frac{AE}{L_b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_b}{L_b^3(Bs+1)} & -\frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} & 0 & \frac{12EI_b}{L_b^3(Bs+1)} & -\frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} \\ 0 & \frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} & -\frac{EI_b(Bs-2)}{L_b(Bs+1)} & 0 & -\frac{6EI_b}{L_b^2(Bs+1)} & \frac{EI_b(Bs+4)}{L_b(Bs+1)} \end{pmatrix}$$



ماتریس سختی برای درجات ۴، ۶، ۷ و ۹

$$K_{ff} = \begin{pmatrix} \frac{AE}{L_b} + \frac{3EI_c}{L_c^3} & \frac{3EI_c}{L_c^2} & -\frac{AE}{L_b} & 0 \\ \frac{3EI_c}{L_c^2} & \frac{3EI_c}{L_c} + \frac{EI_b(Bs+4)}{L_b(Bs+1)} & 0 & -\frac{EI_b(Bs-2)}{L_b(Bs+1)} \\ -\frac{AE}{L_b} & 0 & \frac{AE}{L_b} + \frac{3EI_c}{L_c^3} & 0 \\ 0 & -\frac{EI_b(Bs-2)}{L_b(Bs+1)} & 0 & \frac{EI_b(Bs+4)}{L_b(Bs+1)} \end{pmatrix}$$

یکی از روش‌های اعمال شرایط زیر:

$$\Delta_4 = \Delta_7$$

استفاده از روش Master-Slave می‌باشد. بنابراین می‌توان  $\Delta_4$  را از مسئله حذف کرد. رابطه ماتریس انتقال (تبدیل) بدین صورت می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_9 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_T \times \begin{Bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_6 \\ \Delta_9 \end{Bmatrix}$$

حال ماتریس سختی را با ماتریس T انتقال می‌دهیم:

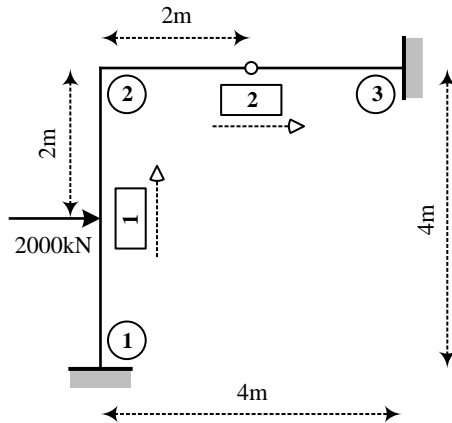
$$K_{reduced} = T^T \times K \times T$$

$$K_{reduced} = \begin{pmatrix} \frac{6EI_c}{L_c^3} & \frac{3EI_c}{L_c^2} & 0 \\ \frac{3EI_c}{L_c^2} & \frac{3EI_c}{L_c} + \frac{EI_b(Bs+4)}{L_b(Bs+1)} & -\frac{EI_b(Bs-2)}{L_b(Bs+1)} \\ 0 & -\frac{EI_b(Bs-2)}{L_b(Bs+1)} & \frac{EI_b(Bs+4)}{L_b(Bs+1)} \end{pmatrix}$$

$$B_s = \frac{24I_b}{AL_b^2}$$

## قاب با مفصل خمشی در طول عضو

در قاب نشان داده شده وسط عضو ۲ مفصل خمشی قرار گرفته است. همچنین سطح مقطع اعضا مستطیلی می‌باشد. با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های محوری، برشی و خمشی برای عضو ۱ و با صرف نظر از تغییر شکل‌های برشی در عضو ۲ مطلوبست:



الف) تعیین جابجایی گره‌ها

ب) تعیین نیروهای داخلی هر عضو

ج) رسم دیاگرام برش و خمشی برای هر عضو

$$E = 200\text{GPa}$$

$$A = 4000\text{mm}^2$$

$$I = 400(10^6)\text{mm}^4$$

$$\nu = 0.25$$

حل: واحدهای حل مسئله همگی بر حسب متر و کیلو نیوتن می‌باشند.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80000000\text{ kN/m}^2$$

$$\beta_s = \frac{12EI f_s}{GAL^2} = 0.225$$

### قسمت الف:

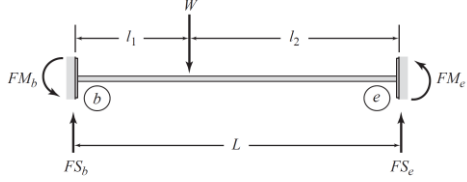
عضو ۱:

$$L = 4\text{m} \quad \cos(\theta) = 1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 200000.00 & 0.00 & 0.00 & -200000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 12244.90 & 24489.80 & 0.00 & -12244.90 & 24489.80 \\ 0.00 & 24489.80 & 68979.59 & 0.00 & -24489.80 & 28979.59 \\ -200000.00 & 0.00 & 0.00 & 200000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -12244.90 & -24489.80 & 0.00 & 12244.90 & -24489.80 \\ 0.00 & 24489.80 & 28979.59 & 0.00 & -24489.80 & 68979.59 \end{bmatrix}$$

$$T' \times k \times T = K^{(1)} = \begin{bmatrix} 12244.90 & 0.00 & -24489.80 & -12244.90 & 0.00 & -24489.80 \\ 0.00 & 200000.00 & 0.00 & 0.00 & -200000.00 & 0.00 \\ -24489.80 & 0.00 & 68979.59 & 24489.80 & 0.00 & 28979.59 \\ -12244.90 & 0.00 & 24489.80 & 12244.90 & 0.00 & 24489.80 \\ 0.00 & -200000.00 & 0.00 & 0.00 & 200000.00 & 0.00 \\ -24489.80 & 0.00 & 28979.59 & 24489.80 & 0.00 & 68979.59 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} FS_b = \frac{Wl_2^2}{L^3}(3l_1 + l_2) \\ FM_b = \frac{Wl_1l_2^2}{L^2} \\ FS_e = \frac{Wl_1^2}{L^3}(l_1 + 3l_2) \\ FM_e = -\frac{Wl_1^2l_2}{L^2} \end{cases}$$

$$f_{(1)}^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 1000 \\ 0 \\ 1000 \\ -1000 \end{Bmatrix} \xrightarrow{T' \times f_{(1)}^f} F_{(1)}^f = \begin{Bmatrix} -1000 \\ 0 \\ 1000 \\ -1000 \\ 0 \\ -1000 \end{Bmatrix}$$

عضو ۲ :

$$L = 4m \quad \cos(\theta) = 1 \quad \sin(\theta) = 0$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = K^{(2)} = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 15000 & 30000 & 0 & -15000 & 30000 \\ 0 & 30000 & 60000 & 0 & -30000 & 60000 \\ -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -15000 & -30000 & 0 & 15000 & -30000 \\ 0 & 30000 & 60000 & 0 & -30000 & 60000 \end{bmatrix}$$

اسمبل کردن ماتریس سختی:

$$K = \begin{bmatrix} 12244.90 & 0.00 & -24489.80 & -12244.90 & 0.00 & -24489.80 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 200000.00 & 0.00 & 0.00 & -200000.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -24489.80 & 0.00 & 68979.59 & 24489.80 & 0.00 & 28979.59 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -12244.90 & 0.00 & 24489.80 & 212244.90 & 0.00 & 24489.80 & -200000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -200000.00 & 0.00 & 0.00 & 215000.00 & 30000.00 & 0.00 & -15000.00 & 30000.00 \\ -24489.80 & 0.00 & 28979.59 & 24489.80 & 30000.00 & 128979.59 & 0.00 & -30000.00 & 60000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -200000.00 & 0.00 & 0.00 & 200000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -15000.00 & -30000.00 & 0.00 & 15000.00 & -30000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 30000.00 & 60000.00 & 0.00 & -30000.00 & 60000.00 \end{bmatrix}$$

بدست آوردن تغییر شکل‌های گرهی:

$$P_f^f = \begin{Bmatrix} -1000 \\ 0 \\ -1000 \end{Bmatrix} \quad P_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 212244.898 & 0.000 & 24489.796 \\ 0.000 & 215000.000 & 30000.000 \\ 24489.796 & 30000.000 & 128979.592 \end{bmatrix}$$

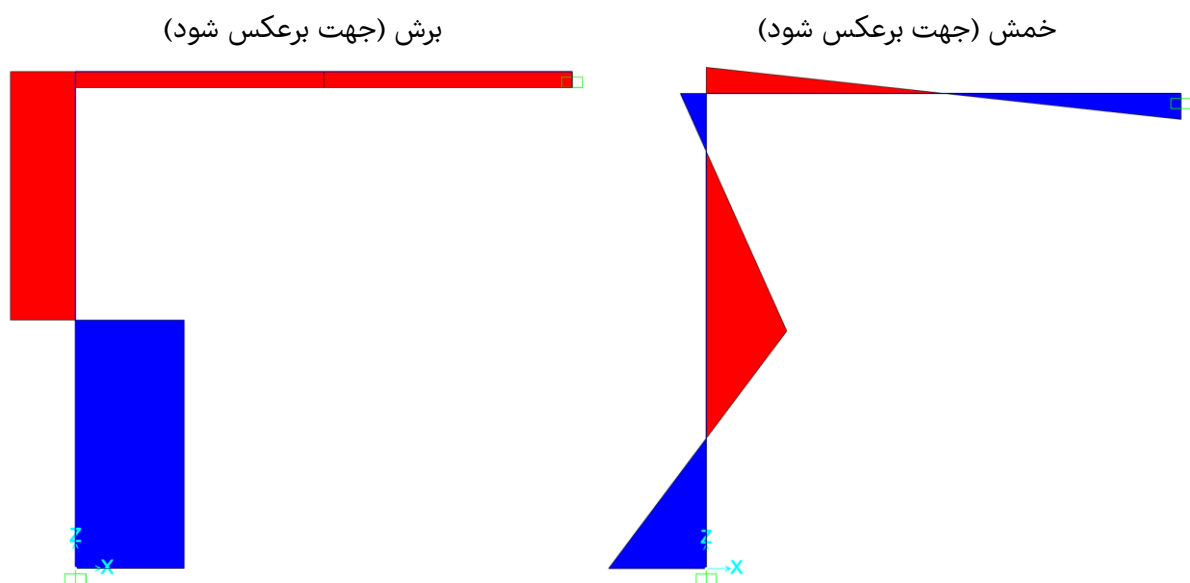
$$\{\Delta_f\} = \begin{bmatrix} 212244.898 & 0.000 & 24489.796 \\ 0.000 & 215000.000 & 30000.000 \\ 24489.796 & 30000.000 & 128979.592 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0038747 \text{ m} \\ -0.0010120 \text{ m} \\ 0.0072529 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

قسمت ب:

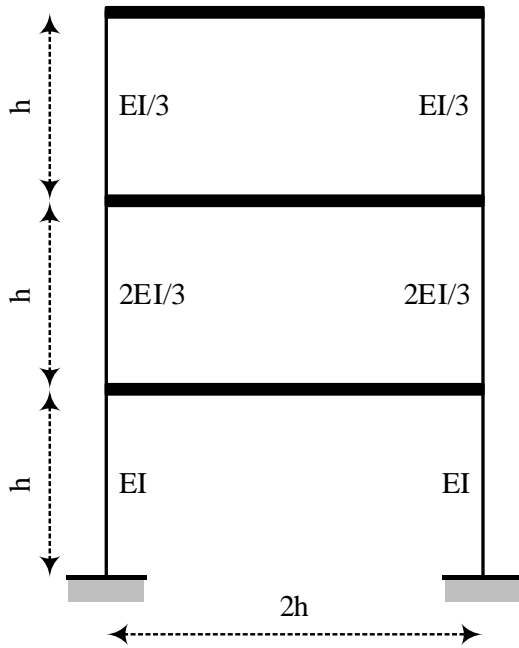
$$F^{(1)} = \begin{Bmatrix} -1225.0660 \\ 202.4054 \\ 1305.0748 \\ -774.9340 \\ -202.4054 \\ -404.8108 \end{Bmatrix} \quad f^{(1)} = \begin{Bmatrix} 202.4054 \\ 1225.0660 \\ 1305.0748 \\ -202.4054 \\ 774.9340 \\ -404.8108 \end{Bmatrix}$$

$$F^{(2)} = \begin{Bmatrix} -774.9340 \\ 232.7662 \\ 465.5324 \\ 774.9340 \\ -232.7662 \\ 465.5324 \end{Bmatrix} \quad f^{(2)} = \begin{Bmatrix} -774.9340 \\ 232.7662 \\ 465.5324 \\ 774.9340 \\ -232.7662 \\ 465.5324 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج:



## قاب برشی



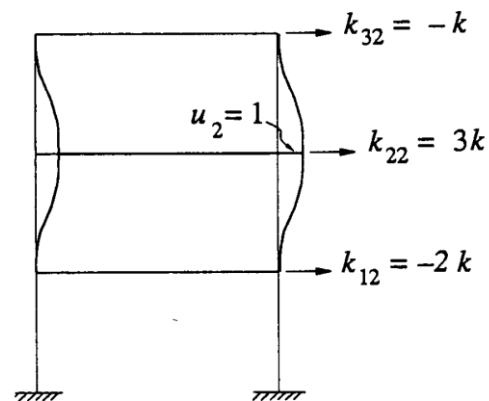
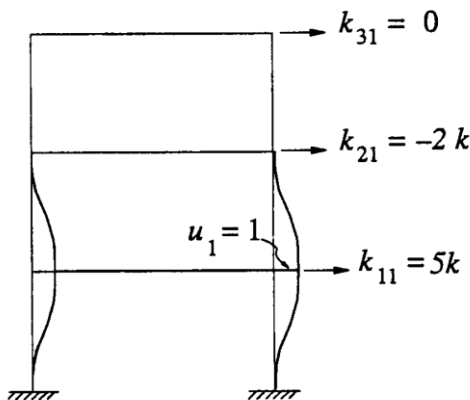
در قاب برشی نشان داده شده سختی کاهش یافته سازه را محاسبه نمایید. تمامی تیرهای سازه در خمش صلب می‌باشند. همچنین صلبیت خمشی هر یک از ستون‌ها بر روی شکل مشخص شده است. از تغییر شکل‌های محوری و برشی در کلیه اعضا صرف نظر شود.

حل:

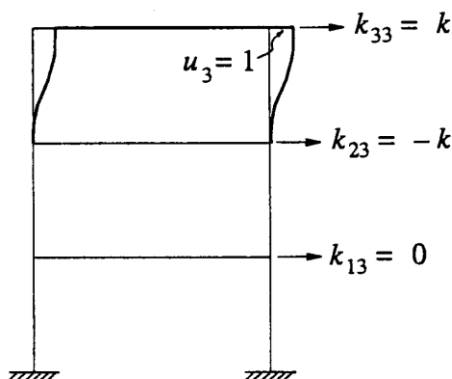
$$k_3 = 2 \frac{12(EI/3)}{h^3} = \frac{8EI}{h^3} \equiv k$$

$$k_1 = 3k \quad k_2 = 2k$$

Apply  $u_1=1, u_2=u_3=0$  and determine  $k_{i1}$ : Apply  $u_2=1, u_1=u_3=0$  and determine  $k_{i2}$ :



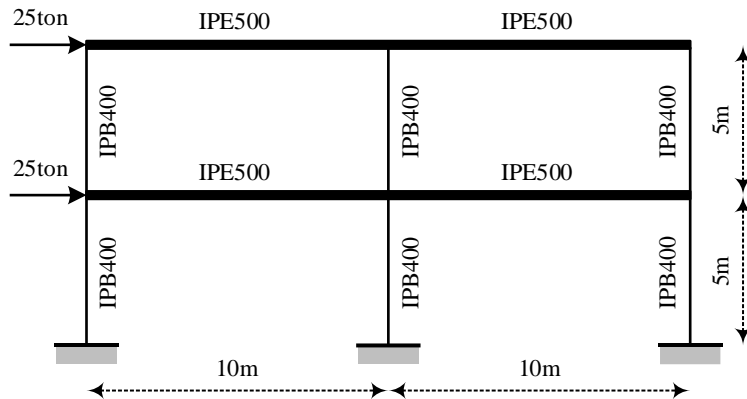
Apply  $u_3=1, u_1=u_2=0$  and determine  $k_{i3}$ :



$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

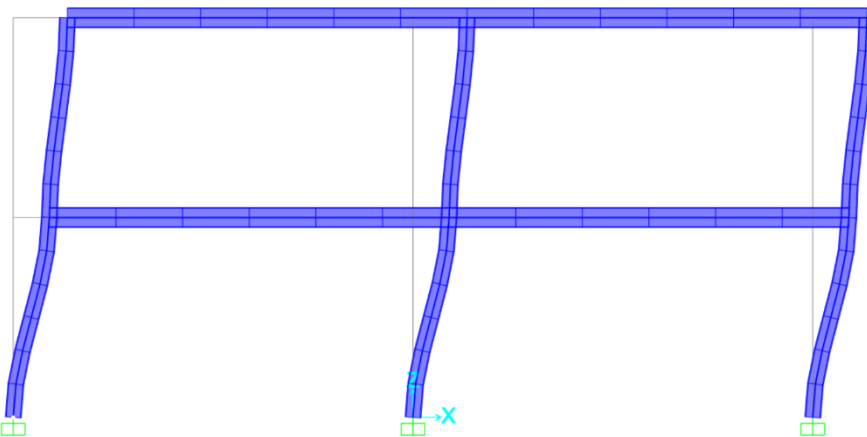
## قاب برشی دو دهنه

در قاب برشی نشان داده شده سختی کاهش یافته سازه و جابجایی‌های متناسب با آن را محاسبه نمایید. تمامی تیرهای سازه در خمش صلب می‌باشند. از تغییر شکل‌های محوری و برشی در کلیه اعضا صرف نظر شود. مدول الاستیسیته برای تمامی اعضا یکسان و به مقدار  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  می‌باشد.



حل:

با توجه به شرایط تعیین شده در صورت مسئله، قاب دارای دو درجه آزادی انتقالی (در راستای افقی) می‌باشد. ستون‌ها تنها اعضای با قابلیت انعطاف در این سازه هستند. در نتیجه در محاسبات نیازی به کلیه مشخصات IPE500 و سطح مقطع IPB400 نداریم.



با توجه به صلب بودن تکیه‌گاه‌ها و اتصالات سختی خمشی هر یک از ستون‌ها برابر است با:

$$k = \frac{12EI}{L^3}$$

در طبقه اول سه ستون با مقطع IPB400 وجود دارد. پس سختی طبقه اول برابر است با:

$$k_1 = 3k$$

در طبقه دوم سه ستون با مقطع IPB400 وجود دارد. پس سختی طبقه دوم برابر است با:

$$k_2 = 3k$$

در طبقه اول با در نظر گرفتن  $\Delta_1 = 1$  مجهولات سختی در سازه را محاسبه می‌کنیم:

$$K_{11} = k_1 + k_2 = 6k$$

$$K_{21} = -k_2 = -3k$$

در طبقه اول با در نظر گرفتن  $\Delta_2 = 1$  مجهولات سختی در سازه را محاسبه می‌کنیم:

$$K_{12} = -k_2 = -3k$$

$$K_{22} = k_2 = 3k$$

سختی کل سازه برابر است با:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{72EI}{L^3} & -\frac{36EI}{L^3} \\ -\frac{36EI}{L^3} & \frac{36EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

با توجه به جدول اشتال ممان اینرسی حول محور قوی برای IPB400 برابر است با:

$$I = 57680 \text{ cm}^4$$

طول ستون‌ها برابر است با ۵۰۰ سانتی‌متر. در نتیجه داریم:

$$K = \begin{bmatrix} 66447.36 & -33223.68 \\ -33223.68 & 33223.68 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

بردار نیروی گره‌ای سازه:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25000 \\ 25000 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

محاسبه جابجایی سازه:


$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} 66447.36 & -33223.68 \\ -33223.68 & 33223.68 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25000 \\ 25000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 66447.36 & -33223.68 \\ -33223.68 & 33223.68 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 25000 \\ 25000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.504951 \\ 2.257426 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$



## جابجایی‌های محاسبه شده با نرم‌افزار SAP2000 v21



Joint Displacements

File

View

Edit

Format-Filter-Sort

Select

Options

Units: As Noted

Joint Displacements

Filter:

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	U1 cm	U2 cm	U3 cm	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	2	DEAD	LinStatic	1.504951	0	0	0	0	0
	3	DEAD	LinStatic	2.257426	0	0	0	0	0
	4	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	5	DEAD	LinStatic	1.504951	0	0	0	0	0
	6	DEAD	LinStatic	2.257426	0	0	0	0	0
	7	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	8	DEAD	LinStatic	1.504951	0	0	0	0	0
	9	DEAD	LinStatic	2.257426	0	0	0	0	0

Record:

<<

<

1

>

>>

of 9

Add Tables...

Done