



دانشگاه شهید باهنر کرمان  
دانشکده فنی و مهندسی  
بخش عمران

سعید شجاعی  
علیرضا قربی

وب سایت :

[www.ghorbi.com](http://www.ghorbi.com)



# تحلیل سازه‌ها ۲

تیر

## روابط تیر اویلر

### ماتریس سختی تیر اویلر

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر اویلر (ابتدا مفصل)

$$K = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} FS_b - \frac{3FM_b}{2L} \\ 0 \\ FS_e + \frac{3FM_b}{2L} \\ FM_e - \frac{FM_b}{2} \end{Bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر اویلر (انتهای مفصل)

$$K = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} FS_b - \frac{3FM_e}{2L} \\ FM_b - \frac{FM_e}{2} \\ FS_e + \frac{3FM_e}{2L} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر اویلر (دو سر مفصل)

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} FS_b - \frac{FM_b}{L} - \frac{FM_e}{L} \\ 0 \\ FS_e + \frac{FM_b}{L} + \frac{FM_e}{L} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر اویلر (مفصل در طول عضو)

$$K = \frac{3EI}{L_1^3 + L_2^3} \begin{bmatrix} 1 & L_1 & -1 & L_2 \\ L_1 & L_1^2 & -L_1 & L_1 L_2 \\ -1 & -L_1 & 1 & -L_2 \\ L_2 & L_1 L_2 & -L_2 & L_2^2 \end{bmatrix}$$

$L_1$  : فاصله مفصل از گره ابتدا       $L_2$  : فاصله مفصل از گره انتها

$$L = L_1 + L_2$$

$$F^f = \frac{1}{2(L_1^3 + L_2^3)} \times \begin{Bmatrix} FS_b^* \\ FM_b^* \\ FS_e^* \\ FM_e^* \end{Bmatrix}$$

$$FS_b^* = 2FS_{b1}L_1^3 - 3FM_{e1}L_1^2 - 3FM_{b2}L_2^2 + 2FS_{b1}L_2^3 + 2FS_{b2}L_2^3 + 2FS_{e1}L_2^3 - 2F_{hy}L_2^3$$

$$FM_b^* = 2FM_{b1}L_1^3 + 2FM_{b1}L_2^3 - FM_{e1}L_1^3 + 2FM_{e1}L_2^3 - 3FM_{b2}L_1L_2^2 + 2FS_{b2}L_1L_2^3 + 2FS_{e1}L_1L_2^3 - 2F_{hy}L_1L_2^3$$

$$FS_e^* = 3FM_{b2}L_2^2 + 3FM_{e1}L_1^2 + 2FS_{b2}L_1^3 + 2FS_{e1}L_1^3 + 2FS_{e2}L_1^3 + 2FS_{e2}L_2^3 - 2F_{hy}L_1^3$$

$$FM_e^* = 2FM_{b2}L_1^3 - FM_{b2}L_2^3 + 2FM_{e2}L_1^3 + 2FM_{e2}L_2^3 - 3FM_{e1}L_1^2L_2 - 2FS_{b2}L_1^3L_2 - 2FS_{e1}L_1^3L_2 + 2F_{hy}L_1^3L_2$$

$FS_{b1}$  : نیروی برش ابتدا در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

$FS_{e1}$  : نیروی برش انتها در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

$FS_{b2}$  : نیروی برش ابتدا در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$FS_{e2}$  : نیروی برش انتها در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$FM_{b1}$  : لنگر خمشی ابتدا در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

$FM_{e1}$  : لنگر خمشی انتها در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

$FM_{b2}$  : لنگر خمشی ابتدا در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$FM_{e2}$  : لنگر خمشی انتها در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$F_{hy}$  : نیروی متمرکز قائم روی مفصل

ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر اوایلر (ابتدا مفصل برشی)

$$K = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ FM_b - \frac{FS_b L}{2} \\ FS_b + FS_e \\ FM_e - \frac{FS_b L}{2} \end{Bmatrix}$$

ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر اوایلر (انتهای مفصل برشی)

$$K = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} FS_b + FS_e \\ FM_b + \frac{FS_e L}{2} \\ 0 \\ FM_e + \frac{FS_e L}{2} \end{Bmatrix}$$

## روابط تیر تیموشنکو

### ماتریس سختی تیر تیموشنکو

$$K = \frac{EI}{L^3(B_s + 1)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & L^2(B_s + 4) & -6L & -L^2(B_s - 2) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & -L^2(B_s - 2) & -6L & L^2(B_s + 4) \end{bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر تیموشنکو (ابتدا مفصل)

$$K = \frac{12EI}{L^3(B_s + 4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix} \quad F^f = \frac{1}{L(B_s + 4)} \begin{Bmatrix} 4FS_b L - 6FM_b + B_s FS_b L \\ 0 \\ 6FM_b + 4FS_e L + B_s FS_e L \\ L(4FM_e - 2FM_b + B_s FM_b + B_s FM_e) \end{Bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر تیموشنکو (انتهای مفصل)

$$K = \frac{12EI}{L^3(B_s + 4)} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F^f = \frac{1}{L(B_s + 4)} \begin{Bmatrix} 4FS_b L - 6FM_e + B_s FS_b L \\ L(4FM_b - 2FM_e + B_s FM_b + B_s FM_e) \\ 6FM_e + 4FS_e L + B_s FS_e L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر تیموشنکو (دو سر مفصل)

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F^f = \begin{Bmatrix} FS_b - \frac{FM_b}{L} - \frac{FM_e}{L} \\ 0 \\ FS_e + \frac{FM_b}{L} + \frac{FM_e}{L} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### ماتریس سختی و بردار نیرو اصلاح شده تیر تیموشنکو (مفصل در طول عضو)

$$K = \frac{12EI}{(B_s + 4)(L_1^3 + L_2^3)} \begin{bmatrix} 1 & L_1 & -1 & L_2 \\ L_1 & L_1^2 & -L_1 & L_1 L_2 \\ -1 & -L_1 & 1 & -L_2 \\ L_2 & L_1 L_2 & -L_2 & L_2^2 \end{bmatrix}$$

$L_1$  : فاصله مفصل از گره ابتدا       $L_2$  : فاصله مفصل از گره انتها

$$L = L_1 + L_2$$

$$F^f = \frac{1}{(B_s + 4)(L_1^3 + L_2^3)} \times \begin{Bmatrix} FS_b^* \\ FM_b^* \\ FS_e^* \\ FM_e^* \end{Bmatrix}$$

$$FS_b^* = 4FS_{b1}L_1^3 - 6FM_{e1}L_1^2 - 6FM_{b2}L_2^2 + 4FS_{b1}L_2^3 + 4FS_{b2}L_2^3 + 4FS_{e1}L_2^3 - 4F_{hy}L_2^3 + B_s FS_{b1}L_1^3 + B_s FS_{b1}L_2^3 + B_s FS_{b2}L_2^3 + B_s FS_{e1}L_2^3 - B_s F_{hy}L_2^3$$

$$FM_b^* = 4FM_{b1}L_1^3 + 4FM_{b1}L_2^3 - 2FM_{e1}L_1^3 + 4FM_{e1}L_2^3 + B_s FM_{b1}L_1^3 + B_s FM_{b1}L_2^3 + B_s FM_{e1}L_1^3 + B_s FM_{e1}L_2^3 - 6FM_{b2}L_1L_2^2 + 4FS_{b2}L_1L_2^3 + 4FS_{e1}L_1L_2^3 - 4F_{hy}L_1L_2^3 + B_s FS_{b2}L_1L_2^3 + B_s FS_{e1}L_1L_2^3 - B_s F_{hy}L_1L_2^3$$

$$FS_e^* = 6FM_{b2}L_2^2 + 6FM_{e1}L_1^2 + 4FS_{b2}L_1^3 + 4FS_{e1}L_1^3 + 4FS_{e2}L_1^3 + 4FS_{e2}L_2^3 - 4F_{hy}L_1^3 + B_s FS_{b2}L_1^3 + B_s FS_{e1}L_1^3 + B_s FS_{e2}L_1^3 + B_s FS_{e2}L_2^3 - B_s F_{hy}L_1^3$$

$$FM_e^* = 4FM_{b2}L_1^3 - 2FM_{b2}L_2^3 + 4FM_{e2}L_1^3 + 4FM_{e2}L_2^3 + B_s FM_{b2}L_1^3 + B_s FM_{b2}L_2^3 + B_s FM_{e2}L_1^3 + B_s FM_{e2}L_2^3 - 6FM_{e1}L_1^2L_2 - 4FS_{b2}L_1^3L_2 - 4FS_{e1}L_1^3L_2 + 4F_{hy}L_1^3L_2 - B_s FS_{b2}L_1^3L_2 - B_s FS_{e1}L_1^3L_2 + B_s F_{hy}L_1^3L_2$$

$FS_{b1}$ : نیروی برش ابتدا در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

$FS_{e1}$ : نیروی برش انتها در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

$FS_{b2}$ : نیروی برش ابتدا در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$FS_{e2}$ : نیروی برش انتها در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$FM_{b1}$ : لنگر خمشی ابتدا در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

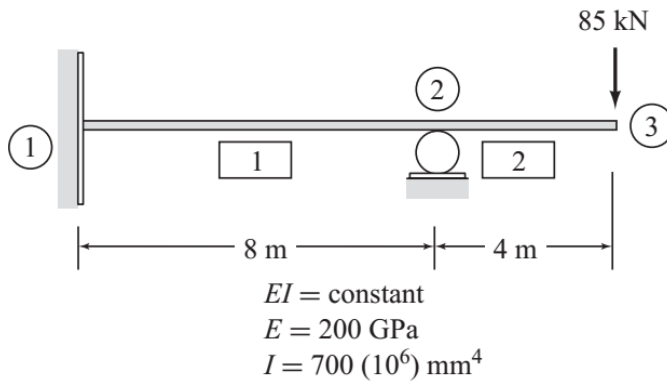
$FM_{e1}$ : لنگر خمشی انتها در قطعه مربوط به  $L_1$  ناشی از بارگذاری

$FM_{b2}$ : لنگر خمشی ابتدا در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$FM_{e2}$ : لنگر خمشی انتها در قطعه مربوط به  $L_2$  ناشی از بارگذاری

$F_{hy}$ : نیروی متمرکز قائم روی مفصل

## تیر تحت بار متمرکز گره‌ای



در تیر نشان داده شده مطلوبست :

الف : تعیین تغییر مکان هر گره

ب : تعیین عکس العمل تکیه گاهی

ج : تعیین نیروی داخلی هر عضو

واحدهای حل مسئله همگی بر حسب متر و کیلو

نیوتن می باشند.

برای تمامی اعضا جهت چپ به راست انتخاب

شده است (محور Global)

پیش فرض های مسئله و روابط برای هر المان :

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \text{ KN/m}^2 \quad I = 700 (10^6) \text{ mm}^4 = 700 (10^6) \times 10^{-12} = 700 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

قسمت الف :

عضو ۱ : گره ۱ به ۲

$$L = 8 \text{ m}$$

$$^{(1)} K = \begin{bmatrix} 3281.25 & 13125 & -3281.25 & 13125 \\ 13125 & 70000 & -13125 & 35000 \\ -3281.25 & -13125 & 3281.25 & -13125 \\ 13125 & 35000 & -13125 & 70000 \end{bmatrix}$$

عضو ۲ : گره ۲ به ۳

$$L = 4 \text{ m}$$

$$^{(2)} K = \begin{bmatrix} 26250 & 52500 & -26250 & 52500 \\ 52500 & 140000 & -52500 & 70000 \\ -26250 & -52500 & 26250 & -52500 \\ 52500 & 70000 & -52500 & 140000 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 3281.25 & 13125 & -3281.25 & 13125 & 0 & 0 \\ 13125 & 70000 & -13125 & 35000 & 0 & 0 \\ -3281.25 & -13125 & 29531.25 & 39375 & -26250 & 52500 \\ 13125 & 35000 & 39375 & 210000 & -52500 & 70000 \\ 0 & 0 & -26250 & -52500 & 26250 & -52500 \\ 0 & 0 & 52500 & 70000 & -52500 & 140000 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر می‌توانیم مجهولات مسئله را بدست آوریم:

$$\begin{Bmatrix} P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2y} \\ M_{2z} = 0 \\ P_{3y} = -85 \\ M_{3y} = 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3281.25 & 13125 & -3281.25 & 13125 & 0 & 0 \\ 13125 & 70000 & -13125 & 35000 & 0 & 0 \\ -3281.25 & -13125 & 29531.25 & 39375 & -26250 & 52500 \\ 13125 & 35000 & 39375 & 210000 & -52500 & 70000 \\ 0 & 0 & -26250 & -52500 & 26250 & -52500 \\ 0 & 0 & 52500 & 70000 & -52500 & 140000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1y} = 0 \\ \theta_{1z} = 0 \\ \Delta_{2y} = 0 \\ \theta_{2z} \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3z} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 210000 & -52500 & 70000 \\ -52500 & 26250 & -52500 \\ 70000 & -52500 & 140000 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} 13125 & 35000 & 39375 \\ 0 & 0 & -26250 \\ 0 & 0 & 52500 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 210000 & -52500 & 70000 \\ -52500 & 26250 & -52500 \\ 70000 & -52500 & 140000 \end{bmatrix}^{-1} \times \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ -85 \\ 0 \end{Bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 13125 & 35000 & 39375 \\ 0 & 0 & -26250 \\ 0 & 0 & 52500 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_f = \begin{bmatrix} 210000 & -52500 & 70000 \\ -52500 & 26250 & -52500 \\ 70000 & -52500 & 140000 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -85 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.004857 \\ -0.032381 \\ -0.009714 \end{Bmatrix} \begin{matrix} rad \\ m \\ rad \end{matrix}$$

قسمت ب :

$$P_s = K_{sf} \Delta_f + K_{ss} \Delta_s$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} 13125 & 0 & 0 \\ 35000 & 0 & 0 \\ 39375 & -26250 & 52500 \end{bmatrix}$$



$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 3281.25 & 13125 & -3281.25 \\ 13125 & 70000 & -13125 \\ -3281.25 & -13125 & 29531.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 13125 & 0 & 0 \\ 35000 & 0 & 0 \\ 39375 & -26250 & 52500 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.004857 \\ -0.032381 \\ -0.009714 \end{Bmatrix} \right) \dots$$

$$+ \left( \begin{bmatrix} 3281.25 & 13125 & -3281.25 \\ 13125 & 70000 & -13125 \\ -3281.25 & -13125 & 29531.25 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -63.75 \\ -170 \\ 148.75 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :

محاسبه نیروی داخلی اعضا :

$$f_{Local}^{(e)} = \left( K \times \Delta \right)^{(e)} + f^f$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۱ :

$$f_{Local}^{(1)} = \left( \begin{bmatrix} 3281.25 & 13125 & -3281.25 & 13125 \\ 13125 & 70000 & -13125 & 35000 \\ -3281.25 & -13125 & 3281.25 & -13125 \\ 13125 & 35000 & -13125 & 70000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.004857 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -63.75 \\ -170 \\ -63.75 \\ 340 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN.m \\ kN \\ kN.m \end{matrix}$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۲ :

$$f_{Local}^{(2)} = \left( \begin{bmatrix} 26250 & 52500 & -26250 & 52500 \\ 52500 & 140000 & -52500 & 70000 \\ -26250 & -52500 & 26250 & -52500 \\ 52500 & 70000 & -52500 & 140000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.004857 \\ -0.032381 \\ -0.009714 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 85 \\ 340 \\ -85 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN.m \\ kN \\ kN.m \end{matrix}$$

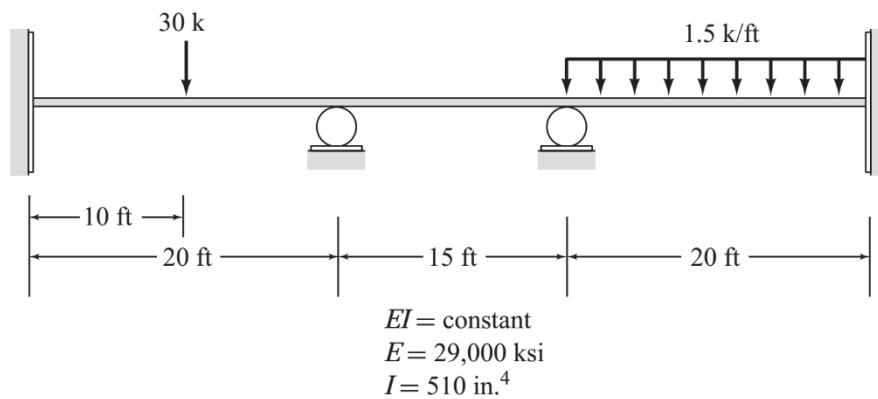
## تیر تحت بار متمرکز و بار گسترده روی عضو

در تیر نشان داده شده مطلوبست :

الف : تعیین تغییر مکان هر گره

ب : تعیین عکس العمل تکیه گاهی

ج : تعیین نیروی داخلی عضو ۳



واحدهای حل مسئله همگی بر حسب اینچ و کیپس می باشند.

برای تمامی اعضا جهت چپ به راست انتخاب شده است (محور Global)

پیش فرض های مسئله و روابط برای هر المان :

$$E = 29000 \text{ ksi} = 29000 \frac{\text{k}}{\text{in}^2} \quad I = 510 \text{ in}^4$$

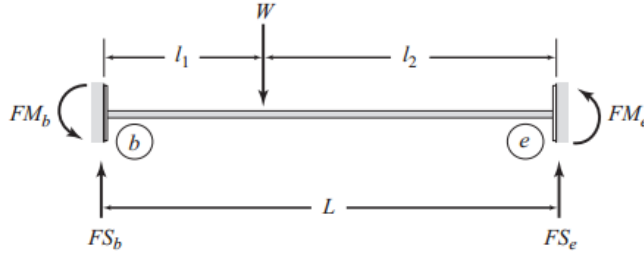
$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

قسمت الف :

عضو ۱ : گره ۱ به ۲

$$L = 20 \text{ ft} = 20 \times 12 = 240 \text{ in}$$

$$^{(1)} K = \begin{bmatrix} 12.8385 & 1540.6250 & -12.8385 & 1540.6250 \\ 1540.6250 & 246500.0000 & -1540.6250 & 123250.0000 \\ -12.8385 & -1540.6250 & 12.8385 & -1540.6250 \\ 1540.6250 & 123250.0000 & -1540.6250 & 246500.0000 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} FS_b &= \frac{Wl_2^2}{L^3}(3l_1 + l_2) \\ FM_b &= \frac{Wl_1l_2^2}{L^2} \\ FS_e &= \frac{Wl_1^2}{L^3}(l_1 + 3l_2) \\ FM_e &= -\frac{Wl_1^2l_2}{L^2} \end{aligned}$$

$$FS_b = FS_e = 15$$

$$FM_b = -FM_e = 900$$

$$f^{(1)} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 900 \\ 15 \\ -900 \end{Bmatrix}$$

عضو ۲: گره ۲ به ۳

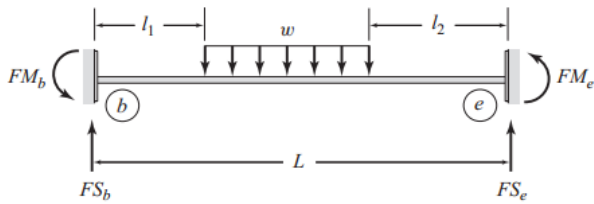
$$L = 15\text{ft} = 15 \times 12 = 180\text{in}$$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 30.4321 & 2738.8889 & -30.4321 & 2738.8889 \\ 2738.8889 & 328666.6667 & -2738.8889 & 164333.3333 \\ -30.4321 & -2738.8889 & 30.4321 & -2738.8889 \\ 2738.8889 & 164333.3333 & -2738.8889 & 328666.6667 \end{bmatrix}$$

عضو ۳: گره ۳ به ۴

$$L = 20\text{ft} = 20 \times 12 = 240\text{in}$$

$$K^{(3)} = \begin{bmatrix} 12.8385 & 1540.6250 & -12.8385 & 1540.6250 \\ 1540.6250 & 246500.0000 & -1540.6250 & 123250.0000 \\ -12.8385 & -1540.6250 & 12.8385 & -1540.6250 \\ 1540.6250 & 123250.0000 & -1540.6250 & 246500.0000 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} FS_b &= \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1}{L^4}(2L^3 - 2l_1^2L + l_1^3) - \frac{l_2^2}{L^4}(2L - l_2) \right] \\ FM_b &= \frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^2}{L^4}(6L^2 - 8l_1L + 3l_1^2) - \frac{l_2^3}{L^4}(4L - 3l_2) \right] \\ FS_e &= \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4}(2L - l_1) - \frac{l_2}{L^4}(2L^3 - 2l_2^2L + l_2^3) \right] \\ FM_e &= -\frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4}(4L - 3l_1) - \frac{l_2^2}{L^4}(6L^2 - 8l_2L + 3l_2^2) \right] \end{aligned}$$

$$FS_b = FS_e = 15$$

$$FM_b = -FM_e = 600$$

$$f^{(3)} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 600 \\ 15 \\ -600 \end{Bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 12.84 & 1540.63 & -12.84 & 1540.63 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1540.63 & 246500.00 & -1540.63 & 123250.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -12.84 & -1540.63 & 43.27 & 1198.26 & -30.43 & 2738.89 & 0.00 & 0.00 \\ 1540.63 & 123250.00 & 1198.26 & 575166.67 & -2738.89 & 164333.33 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -30.43 & -2738.89 & 43.27 & -1198.26 & -12.84 & 1540.63 \\ 0.00 & 0.00 & 2738.89 & 164333.33 & -1198.26 & 575166.67 & -1540.63 & 123250.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -12.84 & -1540.63 & 12.84 & -1540.63 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1540.63 & 123250.00 & -1540.63 & 246500.00 \end{bmatrix}$$

بردار نیرو گرهی اسمبل شده حاصل از بارگذاری های گسترده :

$$P^f = \begin{Bmatrix} 15 \\ 900 \\ 15 \\ -900 \\ 15 \\ 600 \\ 15 \\ -600 \end{Bmatrix}$$

با حل دستگاه زیر می توانیم مجهولات مسئله را بدست آوریم:

$$\begin{Bmatrix} P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2y} \\ M_{2z} = 0 \\ P_{3y} \\ M_{3y} = 0 \\ P_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.84 & 1540.63 & -12.84 & 1540.63 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1540.63 & 246500.00 & -1540.63 & 123250.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -12.84 & -1540.63 & 43.27 & 1198.26 & -30.43 & 2738.89 & 0.00 & 0.00 \\ 1540.63 & 123250.00 & 1198.26 & 575166.67 & -2738.89 & 164333.33 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -30.43 & -2738.89 & 43.27 & -1198.26 & -12.84 & 1540.63 \\ 0.00 & 0.00 & 2738.89 & 164333.33 & -1198.26 & 575166.67 & -1540.63 & 123250.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -12.84 & -1540.63 & 12.84 & -1540.63 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1540.63 & 123250.00 & -1540.63 & 246500.00 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1y} = 0 \\ \theta_{1z} = 0 \\ \Delta_{2y} = 0 \\ \theta_{2z} \\ \Delta_{3y} = 0 \\ \theta_{3z} \\ \Delta_{4y} = 0 \\ \theta_{4z} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 15 \\ 900 \\ 15 \\ -900 \\ 15 \\ 600 \\ 15 \\ -600 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = (K_{ff})^{-1} (P_f - P_f^f - (K_{fs} \times \Delta_s))$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 575166.667 & 164333.333 \\ 164333.333 & 575166.667 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} 1540.625 & 123250.000 & 1198.264 & -2738.889 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 2738.889 & -1198.264 & -1540.625 & 123250.000 \end{bmatrix}$$

$$P_f^f = \begin{Bmatrix} -900 \\ 600 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{bmatrix} 575166.667 & 164333.333 \\ 164333.333 & 575166.667 \end{bmatrix}^{-1} \times \dots$$

$$\left( \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -900 \\ 600 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1540.625 & 123250.000 & 1198.264 & -2738.889 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 2738.889 & -1198.264 & -1540.625 & 123250.000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_f = \begin{bmatrix} 575166.667 & 164333.333 \\ 164333.333 & 575166.667 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 900 \\ -600 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0020284 \\ -0.0016227 \end{Bmatrix} \begin{matrix} rad \\ rad \end{matrix}$$

قسمت ب :

$$P_s = K_{sf} \Delta_f + K_{ss} \Delta_s + P_s^f$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} 1540.625 & 0.000 \\ 123250.000 & 0.000 \\ 1198.264 & 2738.889 \\ -2738.889 & -1198.264 \\ 0.000 & -1540.625 \\ 0.000 & 123250.000 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 12.839 & 1540.625 & -12.839 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1540.625 & 246500.000 & -1540.625 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -12.839 & -1540.625 & 43.271 & -30.432 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -30.432 & 43.271 & -12.839 & 1540.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -12.839 & 12.839 & -1540.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1540.625 & -1540.625 & 246500.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2y} \\ P_{3y} \\ P_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1540.625 & 0.000 \\ 123250.000 & 0.000 \\ 1198.264 & 2738.889 \\ -2738.889 & -1198.264 \\ 0.000 & -1540.625 \\ 0.000 & 123250.000 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.0020284 \\ -0.0016227 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12.839 & 1540.625 & -12.839 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1540.625 & 246500.000 & -1540.625 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -12.839 & -1540.625 & 43.271 & -30.432 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -30.432 & 43.271 & -12.839 & 1540.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -12.839 & 12.839 & -1540.625 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1540.625 & -1540.625 & 246500.000 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 15 \\ 900 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ -600 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2y} \\ P_{3y} \\ P_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18.125 \\ 1150.000 \\ 12.986 \\ 11.389 \\ 17.500 \\ -800.000 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :

محاسبه نیروی داخلی اعضا :

$$f_{Local}^{(e)} = \left( K \times \Delta \right)^{(e)} + f^f{}^{(e)}$$

محاسبه نیروی داخلی عضو ۳ :

$$f_{Local}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 12.8385 & 1540.6250 & -12.8385 & 1540.6250 \\ 1540.6250 & 246500.0000 & -1540.6250 & 123250.0000 \\ -12.8385 & -1540.6250 & 12.8385 & -1540.6250 \\ 1540.6250 & 123250.0000 & -1540.6250 & 246500.0000 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0016227 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 15 \\ 600 \\ 15 \\ -600 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 12.5 \\ 200 \\ 17.5 \\ -800 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN.m \\ kN \\ kN.m \end{matrix}$$

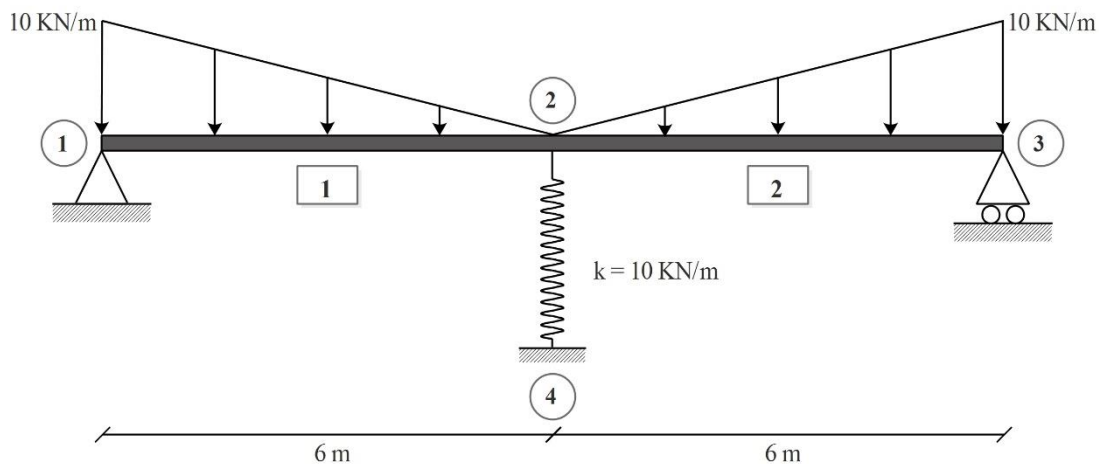
## تیر با اثر فنر و بار مثلثی

در تیر نشان داده شده مطلوبست :

الف) تعیین تغییر مکان هر گره

ب) تعیین عکس العمل تکیه گاه

ج) تعیین نیروی داخلی هر عضو و نیروی فنر



$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

واحدهای حل مسئله همگی بر حسب متر و کیلو نیوتن می باشند.

برای تمامی اعضا جهت چپ به راست انتخاب شده است (محور Global)

**نکته:** به دلیل تقارن در سازه می توان متوجه شد که شیب دیاگرام مماس در گره ۲ صفر است در نتیجه  $\theta_2$  صفر است. به عبارتی می توان فرض کرد که چرخش گره ۲ بسته است.

قسمت الف :

روش اول : در نظر گرفتن کل سازه و استفاده از روابط اصلی

حل با استفاده از فرمول اصلی :

$$K^{(e)} = \frac{E \times I}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی هر المان :

$$K^{(1)} = K^{(2)} = \begin{bmatrix} 4666.67 & 14000.00 & -4666.67 & 14000.00 \\ 14000.00 & 56000.00 & -14000.00 & 28000.00 \\ -4666.67 & -14000.00 & 4666.67 & -14000.00 \\ 14000.00 & 28000.00 & -14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix}$$

$$K^3 = 10 \text{ KN/m} \rightarrow v_2$$

اسمبل کردن ماتریس سختی :

$$K = \begin{bmatrix} 4666.67 & 14000.00 & -4666.67 & 14000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 14000.00 & 56000.00 & -14000.00 & 28000.00 & 0.00 & 0.00 \\ -4666.67 & -14000.00 & 9333.33+10 & 0.00 & -4666.67 & 14000.00 \\ 14000.00 & 28000.00 & 0.00 & 112000.00 & -14000.00 & 28000.00 \\ 0.00 & 0.00 & -4666.67 & -14000.00 & 4666.67 & -14000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 14000.00 & 28000.00 & -14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 4666.67 & 14000.00 & -4666.67 & 14000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 14000.00 & 56000.00 & -14000.00 & 28000.00 & 0.00 & 0.00 \\ -4666.67 & -14000.00 & 9343.33 & 0.00 & -4666.67 & 14000.00 \\ 14000.00 & 28000.00 & 0.00 & 112000.00 & -14000.00 & 28000.00 \\ 0.00 & 0.00 & -4666.67 & -14000.00 & 4666.67 & -14000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 14000.00 & 28000.00 & -14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

تبدیل بارگذاری روی اعضا به بار گره ای :

المان ۱ :

$$\left. \begin{matrix} FS_1 = \frac{7wL}{20} \\ FM_1 = \frac{wL^2}{20} \\ FS_2 = \frac{3wL}{20} \\ FM_2 = \frac{-wL^2}{30} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_1^f = \begin{Bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \\ -12 \end{Bmatrix}$$

المان ۲ :

$$\left. \begin{matrix} FS_2 = \frac{3wL}{20} \\ FM_2 = \frac{wL^2}{30} \\ FS_3 = \frac{7wL}{20} \\ FM_3 = \frac{-wL^2}{20} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_2^f = \begin{Bmatrix} 9 \\ 12 \\ 21 \\ -18 \end{Bmatrix}$$

جمع بندی اطلاعات مورد نیاز برای حل دستگاه :



$$P_f = K_{ff} \{\Delta_f\} + K_{fs} \{\Delta_s\} + P_f^f$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} 21 \\ 18 \\ 18 \\ 0 \\ 21 \\ -18 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} FS_1 \\ FM_1 \\ FS_2 \\ FM_2 \\ FS_3 \\ FM_3 \end{Bmatrix} \rightarrow P_f^f = \begin{Bmatrix} 18 \\ 18 \\ -18 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} FM_1 \\ FS_2 \\ FM_3 \end{Bmatrix} \quad \& \quad P_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ F_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 56000.00 & -14000.00 & 0.00 \\ -14000.00 & 9343.33 & 14000.00 \\ 0.00 & 14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{fs} = \begin{bmatrix} 14000.00 & 28000.00 & 0.00 \\ -4666.67 & 0.00 & -4666.67 \\ 0.00 & 28000.00 & -14000.00 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \Delta_s = \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

حل دستگاه :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 56000.00 & -14000.00 & 0.00 \\ -14000.00 & 9343.33 & 14000.00 \\ 0.00 & 14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \right) + \left( \begin{bmatrix} 14000.00 & 28000.00 & 0.00 \\ -4666.67 & 0.00 & -4666.67 \\ 0.00 & 28000.00 & -14000.00 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 18 \\ 18 \\ -18 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 56000.00 & -14000.00 & 0.00 \\ -14000.00 & 9333.33 & 14000.00 \\ 0.00 & 14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} -18 \\ -18 \\ 18 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta_f\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0032019 \text{ rad} \\ -0.011522 \text{ m} \\ 0.0032019 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

قسمت ب :

به دست آوردن عکس العمل تکیه گاه :

$$P_s = K_{sf} \{\Delta_f\} + K_{ss} \{\Delta_s\} + P_s^f$$

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} 14000.00 & -4666.67 & 0.00 \\ 28000.00 & 0.00 & 28000.00 \\ 0.00 & -4666.67 & -14000.00 \end{bmatrix}$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} 21 \\ 18 \\ 18 \\ 0 \\ 21 \\ -18 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} FS_1 \\ FM_1 \\ FS_2 \\ FM_2 \\ FS_3 \\ FM_3 \end{Bmatrix} \rightarrow P_s^f = \begin{Bmatrix} 21 \\ 0 \\ 21 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} FS_1 \\ FM_2 \\ FS_3 \end{Bmatrix}$$

$$P_s = \left( \begin{bmatrix} 14000.00 & -4666.67 & 0.00 \\ 28000.00 & 0.00 & 28000.00 \\ 0.00 & -4666.67 & -14000.00 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.0032019 \text{ rad} \\ -0.011522 \text{ m} \\ 0.0032019 \text{ rad} \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 21 \\ 0 \\ 21 \end{Bmatrix}$$

$$P_s = \begin{Bmatrix} 29.9424 \\ 0 \\ 29.9424 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :

نیروهای داخلی عضو ۱ :

$$\{f\} = K^{(e)} \{\Delta\} + \{F^f\}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \left( K^{(1)} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0032019 \\ -0.011522 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \\ -12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29.942 \\ 0 \\ 0.0576 \\ 59.654 \end{Bmatrix}$$

نیروهای عضو ۲ :

$$\begin{Bmatrix} f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3y} \\ m_3 \end{Bmatrix} = \left( K^{(2)} \times \begin{Bmatrix} -0.011522 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0032019 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 9 \\ 12 \\ 21 \\ -18 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0576 \\ -59.654 \\ 29.942 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

نیروی فنر :

$$F_{spring} = 10 \text{ KN/m} \times 0.011522 \text{ m} = 0.11522 \text{ KN}$$

روش دوم : در نظر گرفتن کل سازه و استفاده از روابط اصلاح شده

ماتریس سختی ابتدا مفصل :

$$K^{(e)} = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی انتها مفصل :

$$K^{(e)} = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی هر المان :

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1166.67 & 0.00 & -1166.67 & 7000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1166.67 & 0.00 & 1166.67 & -7000.00 \\ 7000.00 & 0.00 & -7000.00 & 42000.00 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1166.67 & 7000.00 & -1166.67 & 0.00 \\ 7000.00 & 42000.00 & -7000.00 & 0.00 \\ -1166.67 & -7000.00 & 1166.67 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$K^3 = 10 \text{ KN/m} \rightarrow v_2$$

اسمبل ماتریس سختی :

$$K = \begin{bmatrix} 1166.67 & 0.00 & -1166.67 & 7000.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1166.67 & 0.00 & 2333.33+10 & 0.00 & -1166.67 & 0.00 \\ 7000.00 & 0.00 & 0.00 & 84000.00 & -7000.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1166.67 & -7000.00 & 1166.67 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

تبدیل بارگذاری روی اعضا به بار گره ای و اصلاح آن ها :

المان ۱ :

$$\left. \begin{array}{l} FS_1 = \frac{7wL}{20} \\ FS_1 = \frac{3wL}{20} \end{array} \right\} \begin{array}{l} FM_1 = \frac{wL^2}{20} \\ FM_1 = \frac{-wL^2}{30} \end{array} \rightarrow F_1^f = \begin{Bmatrix} FS_1 - \frac{3}{2L} FM_1 \\ 0 \\ FS_2 + \frac{3}{2L} FM_1 \\ FM_2 - \frac{1}{2} FM_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16.5 \\ 0 \\ 13.5 \\ -21 \end{Bmatrix}$$

المان ۲ :

$$\left. \begin{array}{l} FS_2 = \frac{3wL}{20} \\ FS_3 = \frac{7wL}{20} \end{array} \right\} \begin{array}{l} FM_2 = \frac{wL^2}{30} \\ FM_3 = \frac{-wL^2}{20} \end{array} \rightarrow F_2^f = \begin{Bmatrix} FS_2 - \frac{3}{2L} FM_3 \\ FM_2 - \frac{1}{2} FM_3 \\ FS_3 + \frac{3}{2L} FM_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.5 \\ 21 \\ 16.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

جمع بندی اطلاعات مورد نیاز برای حل دستگاه :

$$F^f = \begin{Bmatrix} 16.5 \\ 0 \\ 27 \\ 0 \\ 16.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} FS_1 \\ FM_1 \\ FS_2 \\ FM_2 \\ FS_3 \\ FM_3 \end{Bmatrix} \rightarrow P_f^f = \{27\} FS_2$$

$$K_{ff} = [2343.33]$$

$$\Delta_f = \{v_2\}$$

حل دستگاه :

$$P_f = K_{ff} \{\Delta_f\} + K_{fs} \{\Delta_s\} + P_f^f$$

جا به جایی قائم گره ۲ بدست خواهد آمد :

$$v_2 = \frac{-27}{2343.33} = -0.011522$$

حال برای بدست آوردن چرخش گره ۱ و ۳ خواهیم داشت :

چرخش گره ۱ :

$$u_2 = \frac{3}{2L}(-u_1 + u_3) - \frac{1}{2}u_4 - \frac{L}{4EI}FM_b$$

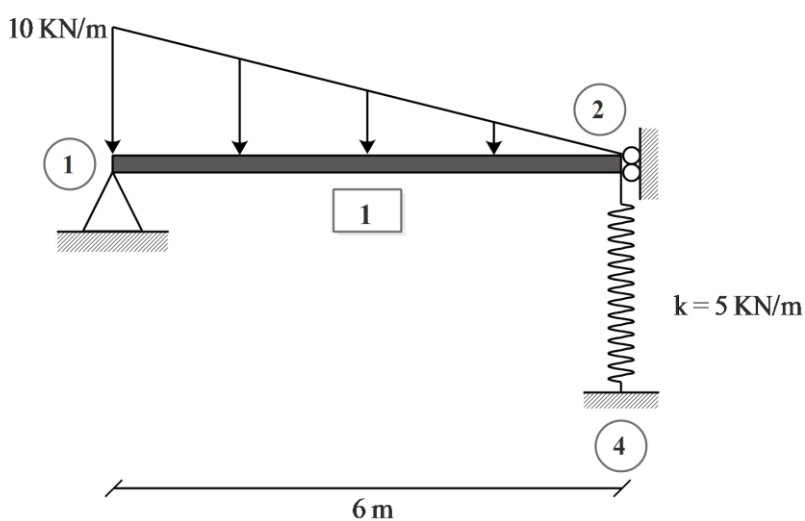
$$\theta_1 = \frac{3}{2 \times 6}(0 - 0.011522) - \frac{1}{2}(0) - \frac{6 \times 18}{4 \times 210 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-4}} = -0.0032019$$

چرخش گره ۳ :

$$u_4 = \frac{3}{2L}(-u_1 + u_3) - \frac{1}{2}u_2 - \frac{L}{4EI}FM_e$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2 \times 6}(0 + 0.011522) - \frac{1}{2}(0) - \frac{6 \times (-18)}{4 \times 210 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-4}} = +0.0032019$$

روش سوم : در نظر گرفتن تقارن سازه و استفاده از روابط اصلی :



ماتریس سختی هر المان :

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 4666.67 & 14000.00 & -4666.67 & 14000.00 \\ 14000.00 & 56000.00 & -14000.00 & 28000.00 \\ -4666.67 & -14000.00 & 4666.67 & -14000.00 \\ 14000.00 & 28000.00 & -14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = 5 \text{ kN/m} \rightarrow v_2$$

اسمبل کردن ماتریس سختی :

$$K = \begin{bmatrix} 4666.67 & 14000.00 & -4666.67 & 14000.00 \\ 14000.00 & 56000.00 & -14000.00 & 28000.00 \\ -4666.67 & -14000.00 & 4666.67 + 5 & -14000.00 \\ 14000.00 & 28000.00 & -14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 4666.67 & 14000.00 & -4666.67 & 14000.00 \\ 14000.00 & 56000.00 & -14000.00 & 28000.00 \\ -4666.67 & -14000.00 & 4671.67 & -14000.00 \\ 14000.00 & 28000.00 & -14000.00 & 56000.00 \end{bmatrix}$$

تبدیل بارگذاری روی اعضا به بار گره ای :

المان ۱ :

$$\left. \begin{aligned} FS_1 &= \frac{7wL}{20} & FM_1 &= \frac{wL^2}{20} \\ FS_1 &= \frac{3wL}{20} & FM_1 &= \frac{-wL^2}{30} \end{aligned} \right\} \rightarrow F_1^f = \begin{Bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \\ -12 \end{Bmatrix}$$

جمع بندی اطلاعات مورد نیاز برای حل دستگاه :

$$P_f = K_{ff} \{\Delta_f\} + K_{fs} \{\Delta_s\} + P_f^f$$

$$F^f = \begin{Bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \\ -12 \end{Bmatrix} \rightarrow P_f^f = \begin{Bmatrix} 18 \\ 9 \end{Bmatrix} \quad \& \quad P_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 56000.00 & -14000.00 \\ -14000.00 & 4671.67 \end{bmatrix} \quad K_{fs} = \begin{bmatrix} 14000.00 & 28000.00 \\ -4666.67 & -14000.00 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \Delta_s = \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

حل دستگاه :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 56000.00 & -14000.00 \\ -14000.00 & 4671.67 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \right) + \left( \begin{bmatrix} 14000.00 & 28000.00 \\ -4666.67 & -14000.00 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 18 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

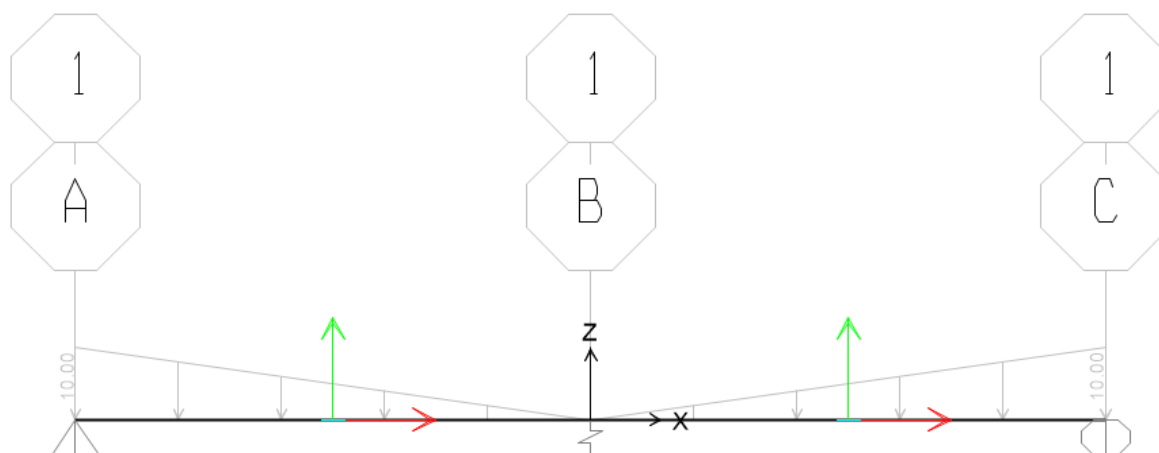
$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 56000.00 & -14000.00 \\ -14000.00 & 4671.67 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} -18 \\ -9 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta_f\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0032019 \text{ rad} \\ -0.011522 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

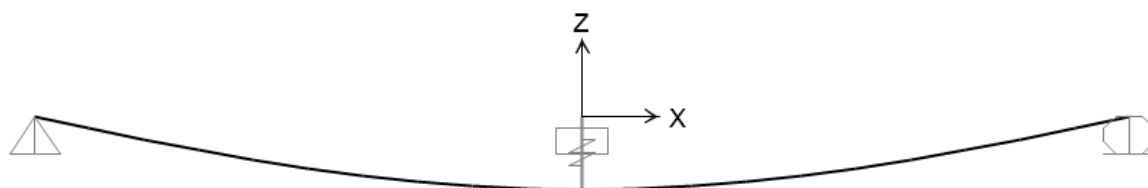
و با استفاده از تقارن سازه می توان فهمید که چرخش گره ۳ برابر است با قرینه چرخش گره ۱

## مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری SAP2000 v17.1.1

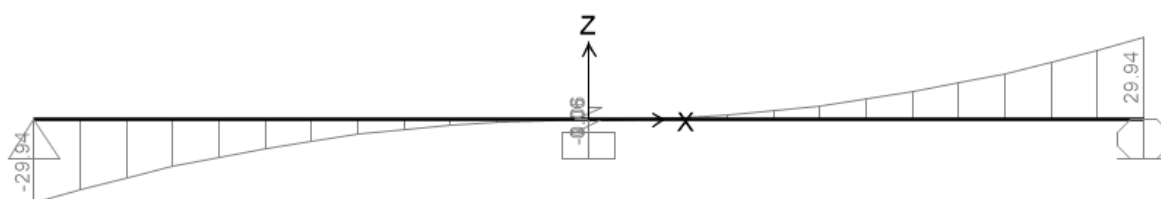
مدل سازه و نمایش محورهای محلی و مختصات کلی :



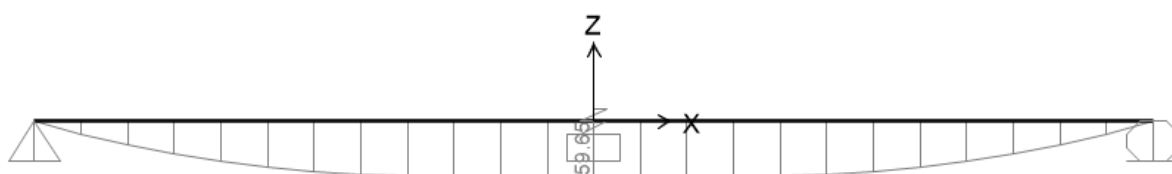
سازه تغییر شکل یافته :



دیاگرام برش :



دیاگرام ممان :





نتایج جا به جایی گره ها :

**Joint Displacements**

File View Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted Joint Displacements

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	U1 m	U2 m	U3 m	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0.003202	0
	2	DEAD	LinStatic	0	0	-0.011523	0	0	0
	3	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	-0.003202	0
	2~Link	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0

Record: << < 1 > >> of 4 Add Tables... Done

نتایج عکس العمل تکیه گاه :

**Joint Reactions**


File View Format-Filter-Sort Select Options

Units: As Noted Joint Reactions

	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	F1 KN	F2 KN	F3 KN	M1 KN-m	M2 KN-m	M3 KN-m
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	29.942	0	0	0
	2	DEAD	LinStatic	0	0	0.115	0	0	0
	3	DEAD	LinStatic	0	0	29.942	0	0	0

Record: << < 1 > >> of 3 Add Tables... Done

نتایج نیروهای داخلی هر عضو :



Element Forces - Frames

FileViewFormat-Filter-SortSelectOptions

Units: As Noted

Element Forces - Frames

Filter: Station NOT BETWEEN 0.1 And 5.9

	Frame Text	Station m	OutputCase	CaseType Text	P KN	V2 KN	V3 KN	T KN-m	M2 KN-m	M3 KN-m
▶	1	0	DEAD	LinStatic	0	-29.942	0	0	0	0
	1	6	DEAD	LinStatic	0	0.058	0	0	0	59.6543
	2	0	DEAD	LinStatic	0	-0.058	0	0	0	59.6543
	2	6	DEAD	LinStatic	0	29.942	0	0	0	4.063E-14

Record:

<<

<

1

>

>>

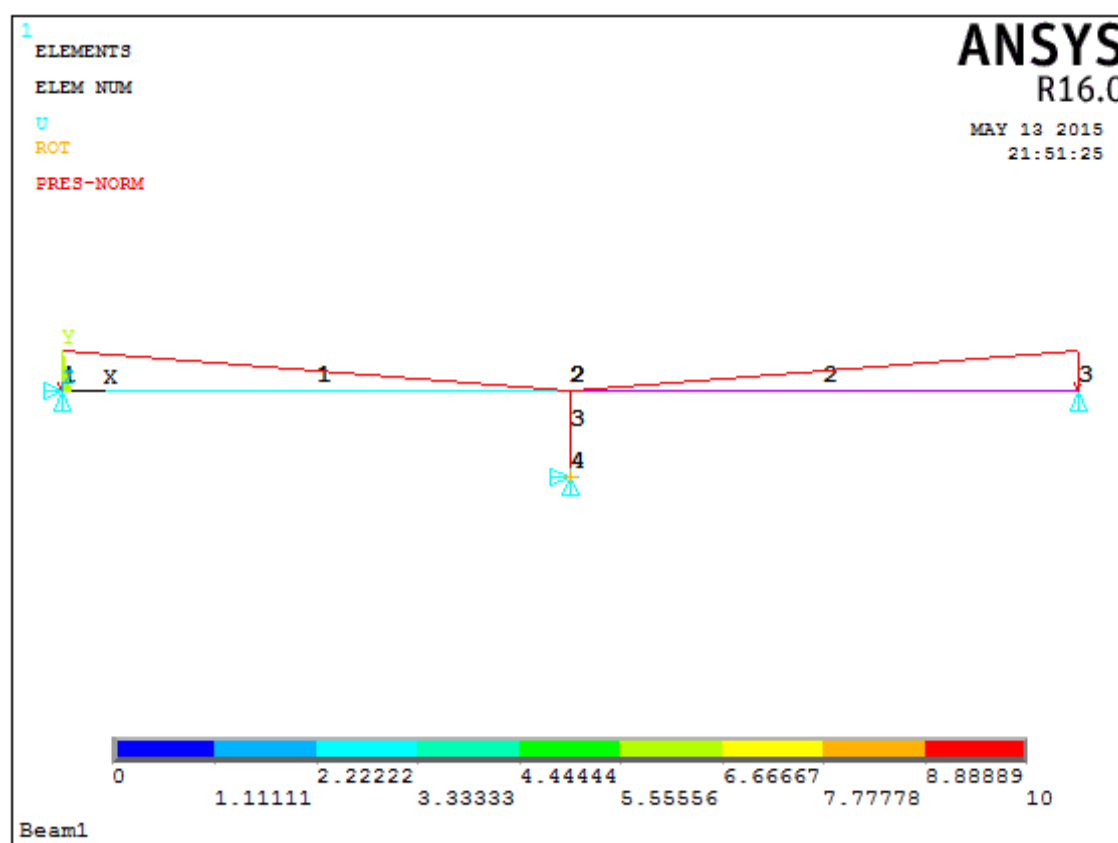
of 4

Add Tables...

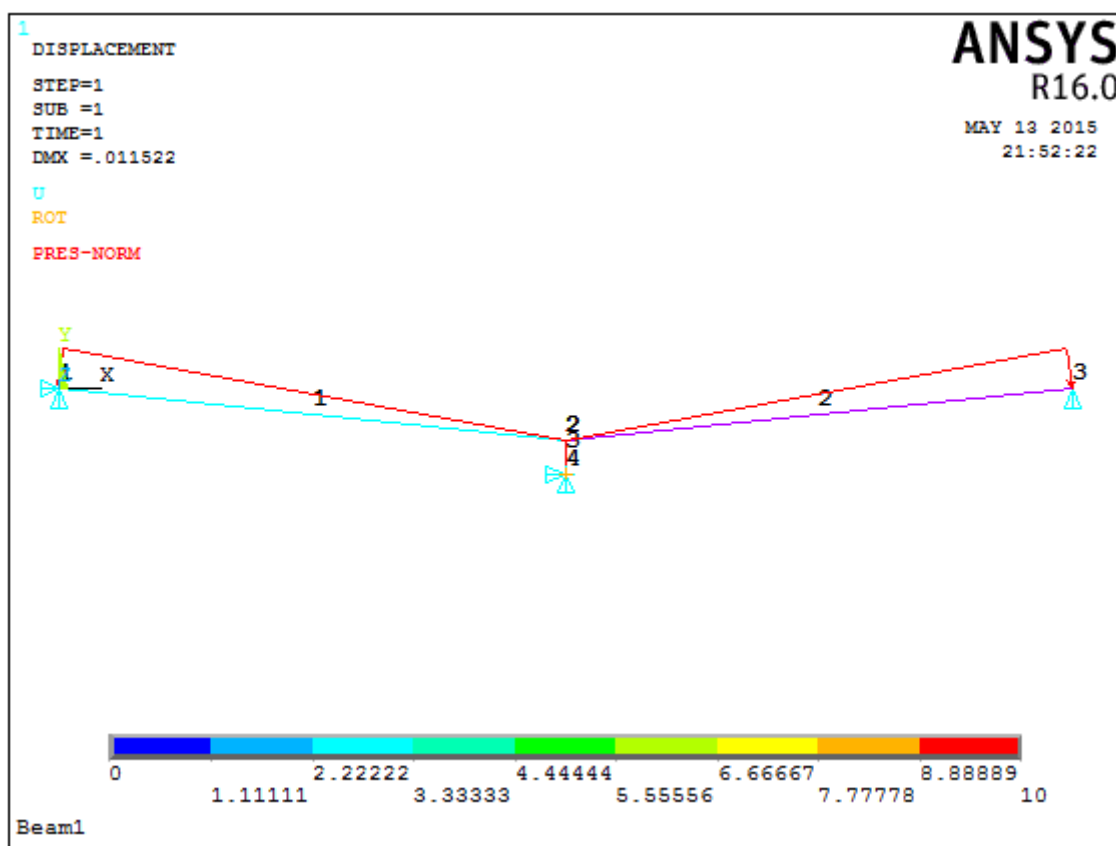
Done

مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری ANSYS v16

مدل سازه :



سازه تغییر شکل یافته :



نتایج جا به جایی گره ها :

PRNSOL Command

File

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	-0.11522E-01	0.0000	0.11522E-01
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	0	2	0	2
VALUE	0.0000	-0.11522E-01	0.0000	0.11522E-01

```

PRNSOL Command
File
PRINT ROT  NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=      0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE
GLOBAL COORDINATE SYSTEM

      NODE      ROTZ
      1 -0.32019E-02
      2  0.00000
      3  0.32019E-02
      4  0.00000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      3
VALUE      0.32019E-02
    
```

نتایج نیروهای داخلی هر عضو :

```

PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****

      STAT      CURRENT      CURRENT      CURRENT      CURRENT      CURRENT      CURRENT
      ELEM      SMIS1      SMIS2      SMIS6      SMIS7      SMIS8      SMIS12
      1      0.00000      -29.942      -0.14211E-13  0.00000      0.57610E-01  59.654
      2      0.00000      -0.57610E-01  59.654      0.00000      29.942      0.00000
      3     -0.11522      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000

MINIMUM VALUES
ELEM      3      1      1      1      3      2
VALUE     -0.11522     -29.942     -0.14211E-13  0.00000      0.00000      0.00000

MAXIMUM VALUES
ELEM      1      3      2      1      2      1
VALUE      0.00000      0.00000      59.654      0.00000      29.942      59.654
    
```

ماتریس سختی و بردار نیرو کلی محاسبه شده توسط ANSYS :

```

***** LOAD VECTOR NUMBER 1 *****

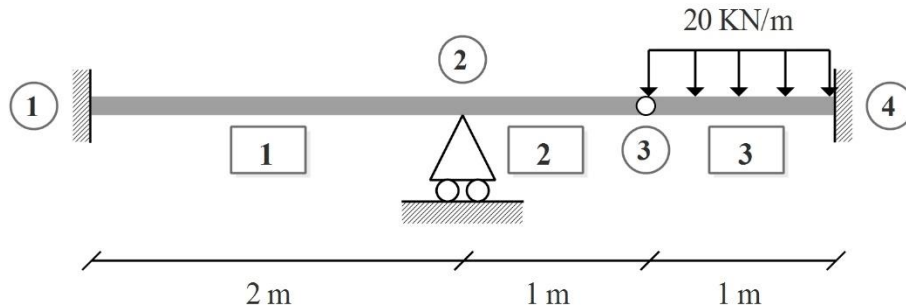
ROW  NODE  DIR  VALUE
1     1    ROTZ -18.00000
2     2     UX   0.00000
3     2     UY -18.00000
4     2    ROTZ  0.00000
5     3     UX   0.00000
6     3    ROTZ  18.00000
    
```

\*\*\*\*\* STIFFNESS MATRIX \*\*\*\*\*

ROW	1	NODE	1	DEG. OF. FR. =	ROTZ						
	1			0.56000000E+05		2		0.00000000E+00		3	-0.14000000E+05
						4		0.28000000E+05		5	0.00000000E+00
						6		0.00000000E+00			
ROW	2	NODE	2	DEG. OF. FR. =	UX						
	1			0.00000000E+00		2		0.70000000E-12		3	0.00000000E+00
						4		0.00000000E+00		5	-0.35000000E-12
						6		0.00000000E+00			
ROW	3	NODE	2	DEG. OF. FR. =	UY						
	1			-0.14000000E+05		2		0.00000000E+00		3	0.93433333E+04
						4		0.00000000E+00		5	0.00000000E+00
						6		0.14000000E+05			
ROW	4	NODE	2	DEG. OF. FR. =	ROTZ						
	1			0.28000000E+05		2		0.00000000E+00		3	0.00000000E+00
						4		0.11200000E+06		5	0.00000000E+00
						6		0.28000000E+05			
ROW	5	NODE	3	DEG. OF. FR. =	UX						
	1			0.00000000E+00		2		-0.35000000E-12		3	0.00000000E+00
						4		0.00000000E+00		5	0.35000000E-12
						6		0.00000000E+00			
ROW	6	NODE	3	DEG. OF. FR. =	ROTZ						
	1			0.00000000E+00		2		0.00000000E+00		3	0.14000000E+05
						4		0.28000000E+05		5	0.00000000E+00
						6		0.56000000E+05			

## تیر با مفصل خمشی داخلی

در تیر نشان داده شده مطلوبست تعیین جا به جایی و چرخش هر گره :



$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

حل :

برای المان ۱ و ۳ با استفاده از ماتریس سختی حالت اصلی :

$$K^{(e)} = \frac{E \times I}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

برای المان ۲ با استفاده از ماتریس سختی انتها مفصل :

$$K^{(e)} = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی هر المان :

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 63000 & 63000 & -63000 & 63000 \\ 63000 & 84000 & -63000 & 42000 \\ -63000 & -63000 & 63000 & -63000 \\ 63000 & 42000 & -63000 & 84000 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 126000 & 126000 & -126000 & 0 \\ 126000 & 126000 & -126000 & 0 \\ -126000 & -126000 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K^{(3)} = \begin{bmatrix} 504000 & 252000 & -504000 & 252000 \\ 252000 & 168000 & -252000 & 84000 \\ -504000 & -252000 & 504000 & -252000 \\ 252000 & 84000 & -252000 & 168000 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 63000 & 63000 & -63000 & 63000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 63000 & 84000 & -63000 & 42000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -63000 & -63000 & 189000 & 63000 & -126000 & 0 & 0 & 0 \\ 63000 & 42000 & 63000 & 210000 & -126000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & -126000 & 630000 & 252000 & -504000 & 252000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 252000 & 168000 & -252000 & 84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -504000 & -252000 & 504000 & -252000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 252000 & 84000 & -252000 & 168000 \end{bmatrix}$$

تبدیل بارگذاری روی اعضا به بار گره‌ای :

برای المان ۳ :

$$\left. \begin{aligned} FS_3 &= \frac{wL}{2} & FM_3 &= \frac{wL^2}{12} \\ FS_4 &= \frac{wL}{2} & FM_4 &= \frac{-wL^2}{12} \end{aligned} \right\} \rightarrow F_3^f = \begin{bmatrix} 10 \\ 1.6667 \\ 10 \\ -1.6667 \end{bmatrix}$$

جمع بندی اطلاعات مورد نیاز برای حل دستگاه :

$$P_f = K_{ff} \{\Delta_f\} + K_{fs} \{\Delta_s\} + P_f^f$$

با توجه به اینکه نشست نداریم نیازی به نوشتن  $K_{fs} \{\Delta_s\}$  نیست.

$$F^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 1.6667 \\ 10 \\ -1.6667 \end{bmatrix} \rightarrow P_f^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 1.6667 \end{bmatrix} \begin{matrix} FM_2 \\ FS_3 \\ FM_3 \end{matrix} \quad \& \quad P_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{matrix}$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 210000 & -126000 & 0 \\ -126000 & 630000 & 252000 \\ 0 & 252000 & 168000 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_{3R} \end{Bmatrix}$$

حل دستگاه و به دست آوردن جا به جایی و چرخش گره های مجهول :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 210000 & -126000 & 0 \\ -126000 & 630000 & 252000 \\ 0 & 252000 & 168000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_{3R} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 1.6667 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_{3R} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 210000 & -126000 & 0 \\ -126000 & 630000 & 252000 \\ 0 & 252000 & 168000 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ -1.6667 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta_f\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_{3R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.000025510 \text{ rad} \\ -0.000042517 \text{ m} \\ 0.000053855 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

چرخش سمت چپ گره ۳ (فرمول چرخش انتها مفصل) :

$$u_4 = \frac{3}{2L}(-u_1 + u_3) - \frac{1}{2}u_2 - \frac{L}{4EI}FM_e$$

$$\theta_{3L} = \frac{3}{2 \times 1}(0 - 0.000042517) - \frac{1}{2}(-0.000025510) - \frac{1}{4 \times 210 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-4}}(0) = -0.0000510205 \text{ rad}$$

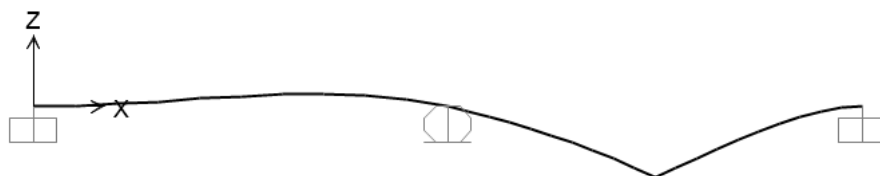
مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری **SAP2000 v17.1.1**

مدل سازه و نمایش محورهای محلی و مختصات کلی :

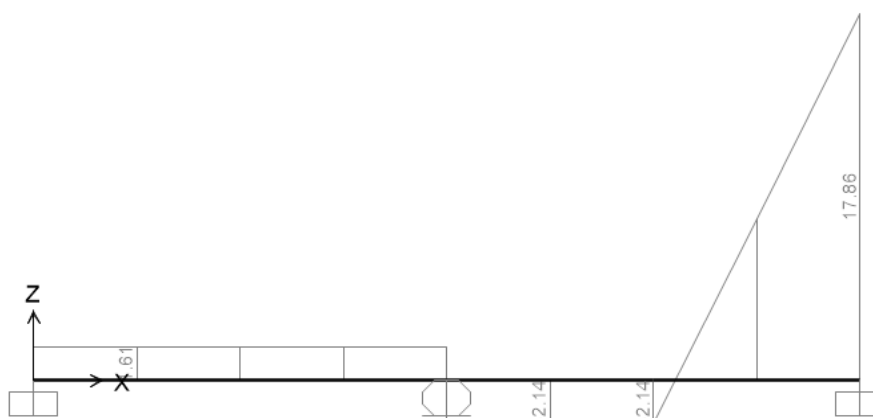




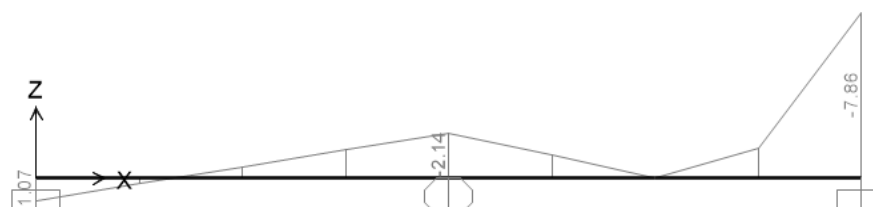
سازه تغییر شکل یافته :



دیاگرام برش :



دیاگرام ممان :



نتایج جا به جایی گره‌ها :

Joint Displacements									
File View Format-Filter-Sort Select Options									
Units: As Noted				Joint Displacements					
	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	U1 m	U2 m	U3 m	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	2	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	2.6E-05	0
	3	DEAD	LinStatic	0	0	-4.3E-05	0	-5.4E-05	0
	4	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0

Record: << < 1 > >> of 4

Add Tables... Done

نتایج عکس العمل تکیه گاه :

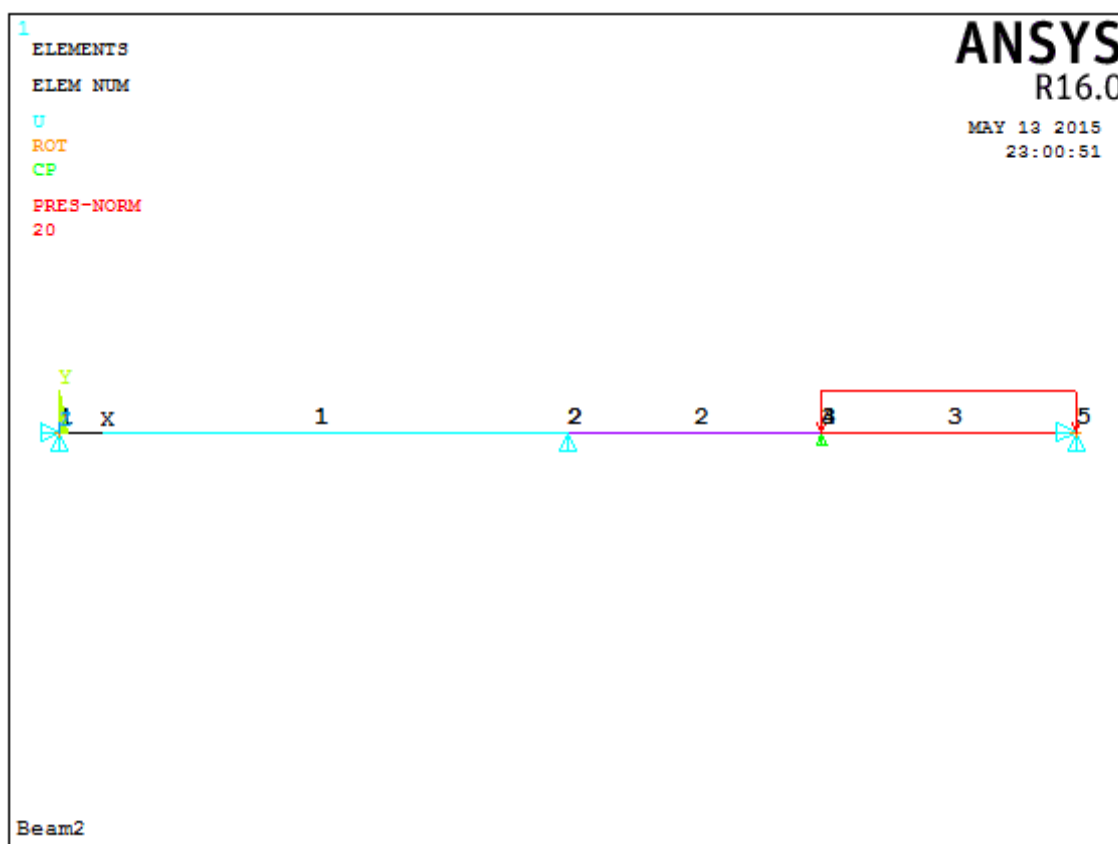
Joint Reactions										
File View Format-Filter-Sort Select Options										
Units: As Noted				Joint Reactions						
	Joint Text	OutputCase	CaseType Text	F1 KN	F2 KN	F3 KN	M1 KN-m	M2 KN-m	M3 KN-m	
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	-1.608	0	1.071	0	
	2	DEAD	LinStatic	0	0	3.751	0	0	0	
	4	DEAD	LinStatic	0	0	17.856	0	7.856	0	
Record: << < 1 > >> of 3										
								Add Tables...	Done	

نتایج نیروهای داخلی هر عضو :

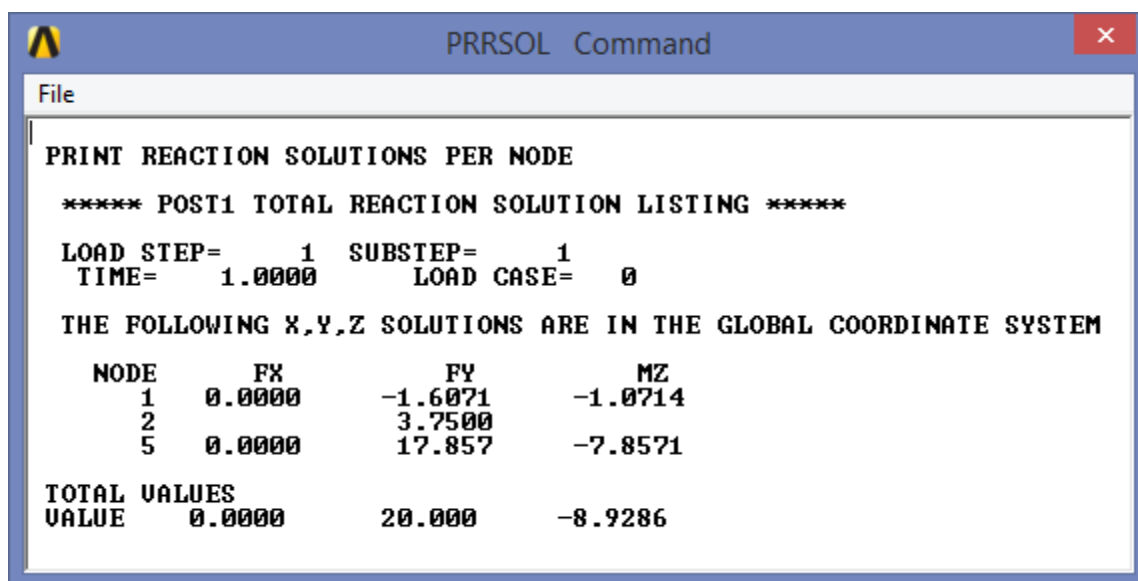
Element Forces - Frames										
File View Format-Filter-Sort Select Options										
Units: As Noted				Element Forces - Frames						
	Frame Text	Station m	OutputCase	CaseType Text	P KN	V2 KN	V3 KN	T KN-m	M2 KN-m	M3 KN-m
▶	1	0	DEAD	LinStatic	0	1.608	0	0	0	1.071
	1	0.5	DEAD	LinStatic	0	1.608	0	0	0	0.2673
	1	1	DEAD	LinStatic	0	1.608	0	0	0	-0.5365
	1	1.5	DEAD	LinStatic	0	1.608	0	0	0	-1.3402
	1	2	DEAD	LinStatic	0	1.608	0	0	0	-2.144
	2	0	DEAD	LinStatic	0	-2.144	0	0	0	-2.144
	2	0.5	DEAD	LinStatic	0	-2.144	0	0	0	-1.072
	2	1	DEAD	LinStatic	0	-2.144	0	0	0	4.441E-16
	3	0	DEAD	LinStatic	0	-2.144	0	0	0	0
	3	0.5	DEAD	LinStatic	0	7.856	0	0	0	-1.428
	3	1	DEAD	LinStatic	0	17.856	0	0	0	-7.856
Record: << < 1 > >> of 11										
								Add Tables...	Done	

## مقایسه نتایج با نرم افزار تجاری ANSYS v16

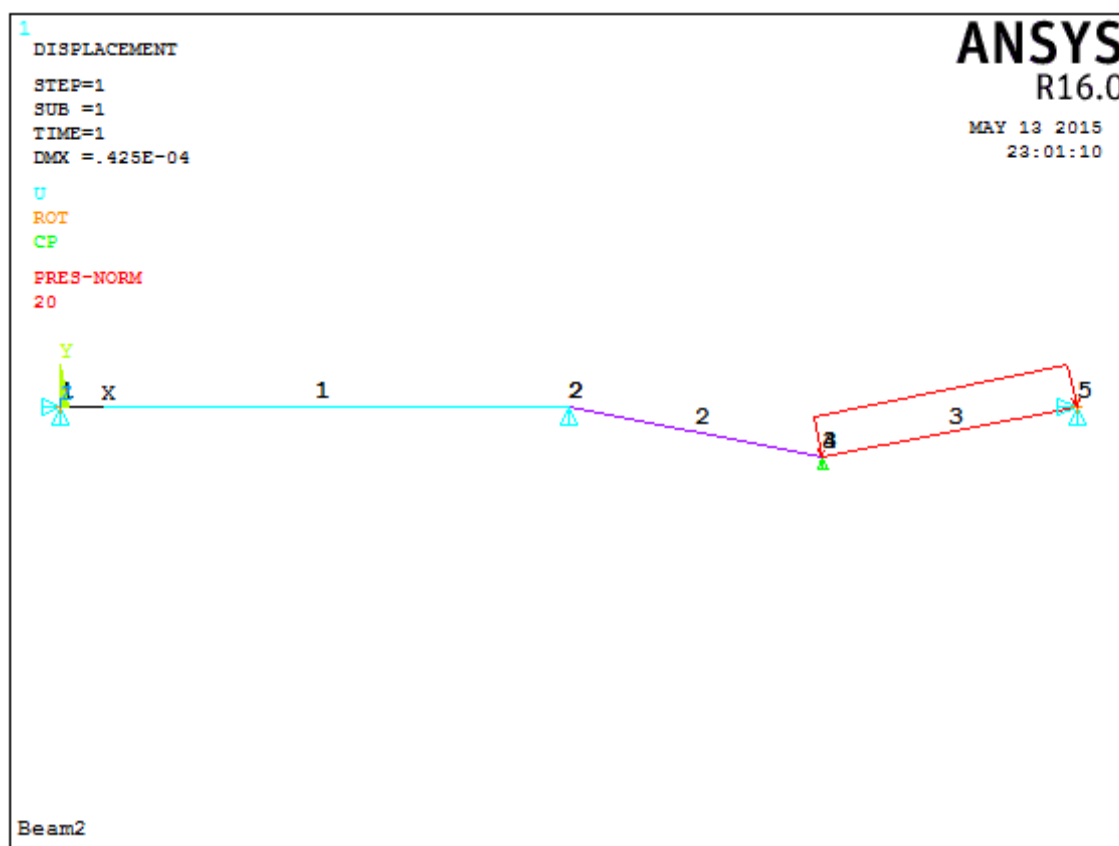
مدل سازه :



نتایج عکس العمل تکیه گاه :



سازه تغییر شکل یافته :



نتایج جا به جایی گره ها :

PRNSOL Command

File

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

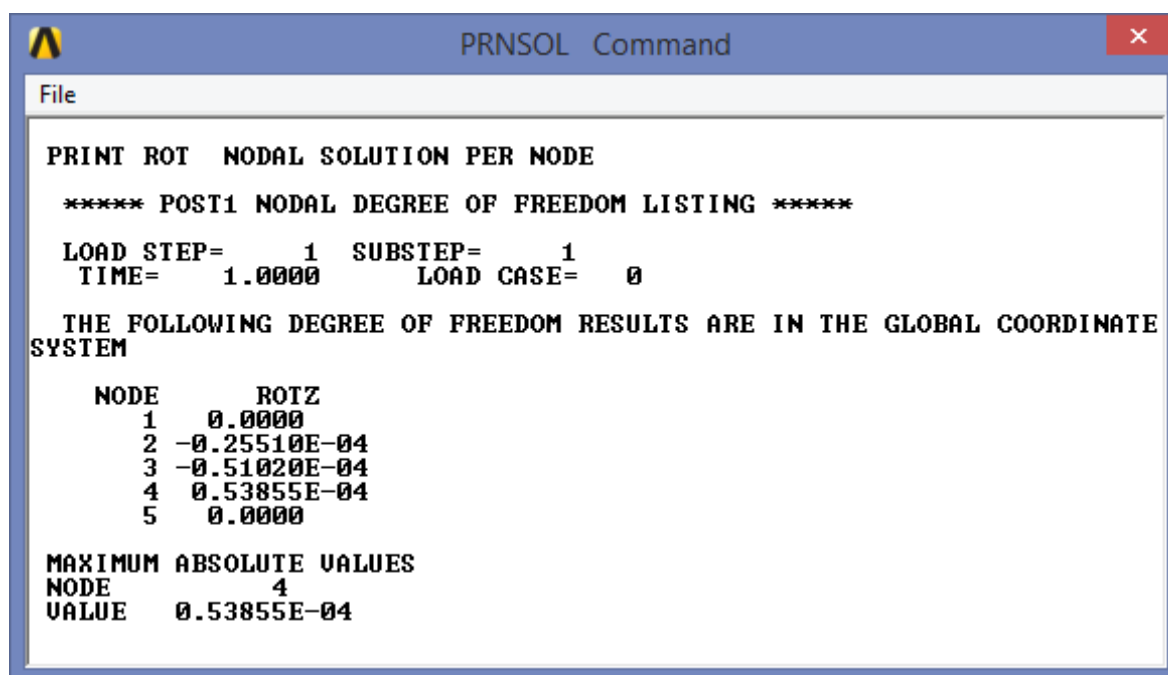
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	-0.42517E-04	0.0000	0.42517E-04
4	0.0000	-0.42517E-04	0.0000	0.42517E-04
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	0	3	0	3
VALUE	0.0000	-0.42517E-04	0.0000	0.42517E-04



```

PRNSOL Command
File

PRINT ROT  NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

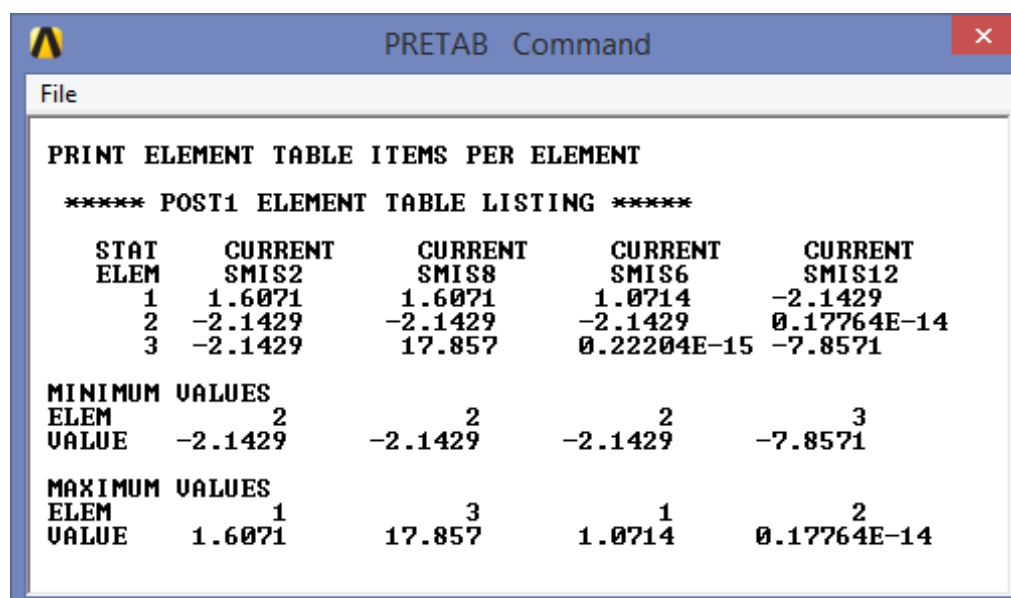
LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=      0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE
SYSTEM

  NODE      ROTZ
    1      0.0000
    2 -0.25510E-04
    3 -0.51020E-04
    4  0.53855E-04
    5      0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      4
VALUE     0.53855E-04
  
```

نتایج نیروهای داخلی هر عضو :



```

PRETAB Command
File

PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****

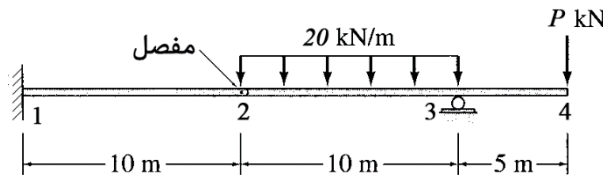
  STAT      CURRENT      CURRENT      CURRENT      CURRENT
  ELEM      SMIS2      SMIS8      SMIS6      SMIS12
    1      1.6071      1.6071      1.0714      -2.1429
    2     -2.1429     -2.1429     -2.1429     0.17764E-14
    3     -2.1429      17.857      0.22204E-15  -7.8571

MINIMUM VALUES
ELEM      2      2      2      3
VALUE     -2.1429     -2.1429     -2.1429     -7.8571

MAXIMUM VALUES
ELEM      1      3      1      2
VALUE      1.6071      17.857      1.0714     0.17764E-14
  
```

## تیر و دیاگرام برش و خمش

در تیر نشان داده شده تحت بارگذاری خاصی دیاگرام برش و خمش رسم شده است. اگر سختی عضو یک و دو به صورت اصلاح شده محاسبه شود، مطلوبست تعیین کلیه تغییر شکل‌ها (شماره گذاری المان‌ها به ترتیب از چپ به راست).



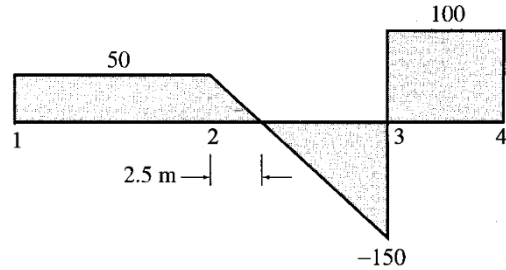
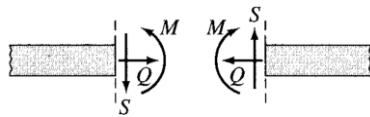
$$E=200 \text{ GPa}$$

$$I = 600(10^6) \text{ mm}^4$$

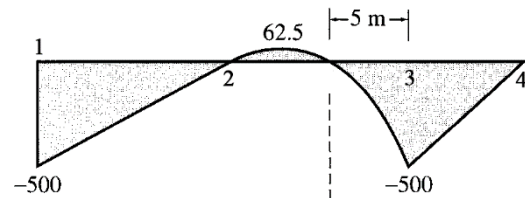
راهنمایی: قرارداد علامت در رسم دیاگرام به صورت زیر است

(همانند درس تحلیل سازه ۱) و مطابقت آن با علامت

نیروهای روش تحلیل ماتریسی بایستی لحاظ شود.



دیاگرام برش (kN)



دیاگرام لنگر خمشی (kN · m)

حل:

سختی اعضا برابر است با:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 360 & 3600 & -360 & 0 \\ 3600 & 36000 & -3600 & 0 \\ -360 & -3600 & 360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 360 & 0 & -360 & 3600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -360 & 0 & 360 & -3600 \\ 3600 & 0 & -3600 & 36000 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 11520 & 28800 & -11520 & 28800 \\ 28800 & 96000 & -28800 & 48000 \\ -11520 & -28800 & 11520 & -28800 \\ 28800 & 48000 & -28800 & 96000 \end{bmatrix}$$

با توجه به دیاگرام نیروهای هر عضو بدست می‌آید:

$$F_1 = \begin{Bmatrix} 50 \\ 500 \\ -50 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad F_2 = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ 150 \\ -500 \end{Bmatrix} \quad F_3 = \begin{Bmatrix} 100 \\ 500 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

تبدیل بار گسترده به گرهی برای عضو دو و اصلاح آن:

$$FEM_2 = \begin{Bmatrix} \frac{20 \times 10}{2} \\ \frac{20 \times 10^2}{12} \\ \frac{20 \times 10}{2} \\ -\frac{20 \times 10^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow FEM_2^* = \begin{Bmatrix} FS_b - \frac{3}{2L} FM_b \\ 0 \\ FS_e + \frac{3}{2L} FM_b \\ FM_e - \frac{1}{2} FM_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 0 \\ 125 \\ -250 \end{Bmatrix}$$

$$F_{Row3}^{(1)} = K_{Row3}^{(1)} \times \Delta_e^{(1)} \Rightarrow -50 = \begin{bmatrix} -360 & -3600 & 360 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = \frac{-50}{360} = -0.13889$$

$$F_{Row4}^{(2)} = \left( K_{Row4}^{(2)} \times \Delta_e^{(2)} \right) + FEM_{Row4}^{*(2)} \Rightarrow -500 = \begin{bmatrix} 3600 & -3600 & 36000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.13889 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + (-250)$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \frac{25}{3600} = 0.00694$$

$$F_{Row3,4}^{(3)} = K_{Row3,4}^{(3)} \times \Delta_e^{(3)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -11520 & -28800 & 11520 & -28800 \\ 28800 & 48000 & -28800 & 96000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00694 \\ \Delta_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -200 + 11520\Delta_4 - 28800\theta_4 = -100 \\ 333.333 - 28800\Delta_4 + 96000\theta_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_4 = 0 \\ \theta_4 = -0.00347 \end{cases}$$

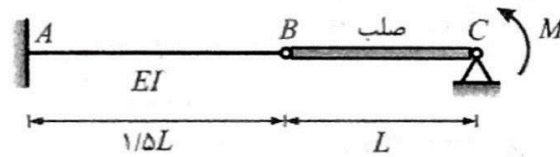
در نهایت برای محاسبه چرخش چپ و راست مفصل گره ۲ خواهیم داشت :

$$\theta_{2L} = \frac{3}{2L_1}(0 + \Delta_2) - \frac{1}{2}(0) - \frac{L_1}{4EI}(0) = -0.020833$$

$$\theta_{2R} = \frac{3}{2L_2}(-\Delta_2 + 0) - \frac{1}{2}(\theta_3) - \frac{L_2}{4EI}\left(\frac{500}{3}\right) = 0.013889$$

## تیر با عضو صلب و مفصل داخلی

در تیر نشان داده شده مطلوبست تعیین چرخش گره C



برای تمامی اعضا جهت چپ به راست انتخاب شده است (محور Global)

عضو ۱: گره A به B سختی اصلاح شده انتها مفصل

$$K^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{8EI_1}{9L^3} & \frac{4EI_1}{3L^2} & -\frac{8EI_1}{9L^3} & 0 \\ \frac{4EI_1}{3L^2} & \frac{2EI_1}{L} & -\frac{4EI_1}{3L^2} & 0 \\ -\frac{8EI_1}{9L^3} & -\frac{4EI_1}{3L^2} & \frac{8EI_1}{9L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عضو ۲: گره B به C سختی اصلاح شده ابتدا مفصل

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{3EI_2}{L^3} & \frac{3EI_2}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI_2}{L^3} & 0 & \frac{3EI_2}{L^3} & -\frac{3EI_2}{L^2} \\ \frac{3EI_2}{L^2} & 0 & -\frac{3EI_2}{L^2} & \frac{3EI_2}{L} \end{pmatrix}$$

از آنجا که نشست نداریم محاسبه  $K_{ff}$  کافی است. پس:

$$K_{ff} = \begin{pmatrix} \frac{8EI_1}{9L^3} + \frac{3EI_2}{L^3} & \frac{3EI_2}{L^2} \\ \frac{3EI_2}{L^2} & \frac{3EI_2}{L} \end{pmatrix}, \quad P_f = \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}$$

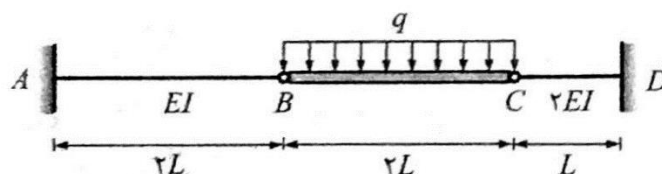
$$K_{ff}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9L^3}{8EI_1} & -\frac{9L^2}{8EI_1} \\ -\frac{9L^2}{8EI_1} & \frac{9L}{8EI_1} + \frac{L}{3EI_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{EI_2 \rightarrow \infty} K_{ff}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9L^3}{8EI_1} & -\frac{9L^2}{8EI_1} \\ -\frac{9L^2}{8EI_1} & \frac{9L}{8EI_1} \end{pmatrix}$$



$$\Delta_f = K_{ff}^{-1} P_f = \begin{pmatrix} \frac{9L^3}{8EI_1} & -\frac{9L^2}{8EI_1} \\ -\frac{9L^2}{8EI_1} & \frac{9L}{8EI_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9L^2 M}{8EI_1} \\ \frac{9LM}{8EI_1} \end{pmatrix}$$

## تیر با عضو صلب و مفصل داخلی

در تیر نشان داده شده مطلوبست تعیین چرخش قطعه صلب BC



برای تمامی اعضا جهت چپ به راست انتخاب شده است (محور Global)

عضو ۱: گره A به B سختی اصلاح شده انتها مفصل

$$^{(1)}K = \begin{pmatrix} \frac{3EI}{8L^3} & \frac{3EI}{4L^2} & -\frac{3EI}{8L^3} & 0 \\ \frac{3EI}{4L^2} & \frac{3EI}{2L} & -\frac{3EI}{4L^2} & 0 \\ -\frac{3EI}{8L^3} & -\frac{3EI}{4L^2} & \frac{3EI}{8L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

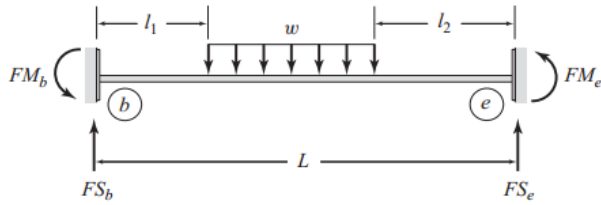
عضو ۲: گره B به C سختی اصلاح شده دو سر مفصل

$$^{(2)}K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عضو ۳: گره C به D سختی اصلاح شده ابتدا مفصل

$$^{(3)}K = \begin{pmatrix} \frac{6EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L} \end{pmatrix}$$

نیروهای عضو ۲ :



$$\begin{aligned} FS_b &= \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1}{L^4} (2L^3 - 2l_1^2 L + l_1^3) - \frac{l_2^3}{L^4} (2L - l_2) \right] \\ FM_b &= \frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^2}{L^4} (6L^2 - 8l_1 L + 3l_1^2) - \frac{l_2^3}{L^4} (4L - 3l_2) \right] \\ FSe &= \frac{wL}{2} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4} (2L - l_1) - \frac{l_2}{L^4} (2L^3 - 2l_2^2 L + l_2^3) \right] \\ FMe &= -\frac{wL^2}{12} \left[ 1 - \frac{l_1^3}{L^4} (4L - 3l_1) - \frac{l_2^2}{L^4} (6L^2 - 8l_2 L + 3l_2^2) \right] \end{aligned}$$

بردار نیرو اصلاح شده در حالت ۲ سر مفصل :

$$\begin{bmatrix} FS_b - \frac{1}{L} (FM_b + FMe) \\ 0 \\ FS_e + \frac{1}{L} (FM_b + FMe) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$FS_b = FS_e = qL$$

$$FM_b = -FMe = \frac{qL}{3}$$

$$f_f^{(2)} = \begin{pmatrix} qL \\ 0 \\ qL \\ 0 \end{pmatrix}$$

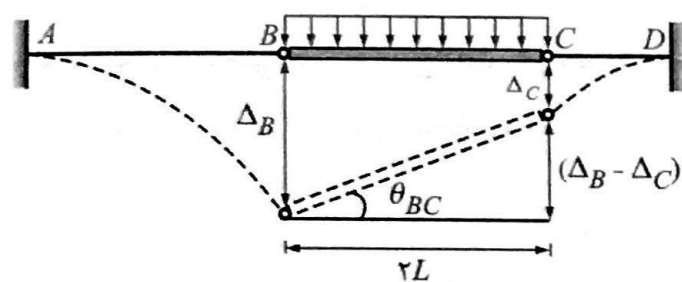
از آنجا که نشست نمی‌داریم محاسبه  $K_{ff}$  کافی است. پس :

$$K_{ff} = \begin{pmatrix} \frac{3EI}{8L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^3} \end{pmatrix}$$

$$P_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_f^f = \begin{pmatrix} qL \\ qL \end{pmatrix}$$

$$\Delta_f = K_{ff}^{-1} (P_f - P_f^f) = \begin{pmatrix} \frac{3EI}{8L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^3} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -qL \\ -qL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8L^4 q}{3EI} \\ -\frac{L^4 q}{6EI} \end{pmatrix}$$

از آنجا که عضو BC صلب است، با توجه به تغییر شکل تیر خواهیم داشت :



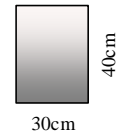
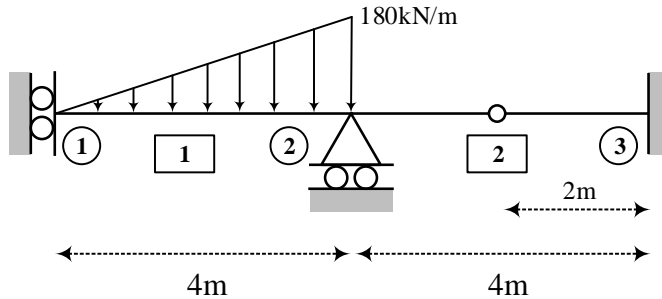
$$\theta_{BC} = \frac{\Delta_B - \Delta_C}{2L} = \frac{-\frac{8L^4 q}{3EI} + \frac{L^4 q}{6EI}}{2L} = -\frac{5L^3 q}{4EI}$$

## تیر با مفصل خمشی در طول عضو و مفصل برشی در ابتدا

در تیر زیر مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی با در نظر گرفتن تنها ۲ عضو برای حل مسئله: (۳۰ نمره)

$$E=90 \text{ GPa}$$

مشخصات مقطع کلیه اعضا یکسان و به صورت زیر است. فرض کنید که مقطع حول محور قوی خود مورد استفاده قرار گرفته است.



حل :

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 \times 0.4^3}{12} = 0.0016 \quad EI = 90 \times 10^6 \times 0.0016 = 144000 \text{ kN.m}^2$$

ماتریس اصلاح شده سختی اعضا (عضو ۱: ابتدا مفصل برشی، عضو ۲: مفصل خمشی در طول عضو) :

$$^{(1)}K = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36000 & 0 & -36000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36000 & 0 & 36000 \end{bmatrix}$$

$$^{(2)}K = \frac{3EI}{L_1^3 + L_2^3} \begin{bmatrix} 1 & L_1 & -1 & L_2 \\ L_1 & L_1^2 & -L_1 & L_1 L_2 \\ -1 & -L_1 & 1 & -L_2 \\ L_2 & L_1 L_2 & -L_2 & L_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27000 & 54000 & -27000 & 54000 \\ 54000 & 108000 & -54000 & 108000 \\ -27000 & -54000 & 27000 & -54000 \\ 54000 & 108000 & -54000 & 108000 \end{bmatrix}$$

تبدیل بارگذاری عضو ۱ به نیروهای گره‌ای :

$$\left. \begin{aligned} FS_1 &= \frac{3wL}{20} \\ FM_1 &= \frac{wL^2}{30} \\ FS_2 &= \frac{7wL}{20} \\ FM_2 &= \frac{-wL^2}{20} \end{aligned} \right\} \rightarrow F^f = \begin{bmatrix} 108 \\ 96 \\ 252 \\ -144 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Modify}} F^{f*} = \begin{bmatrix} 0 \\ -120 \\ 360 \\ -360 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه و محاسبه جابجایی گره‌ها :

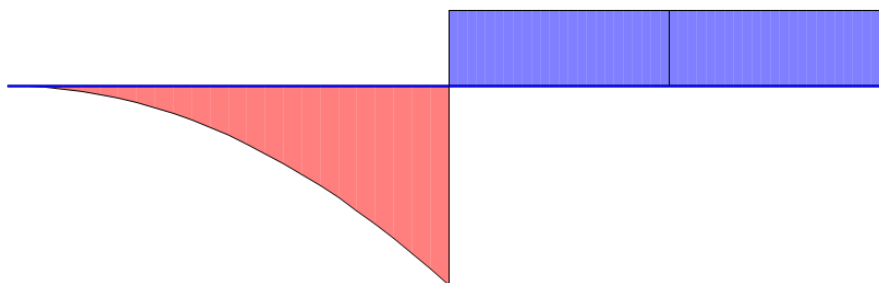
$$\theta_2 = K_{ff}^{-1} \times (0 - (-360)) = \frac{360}{144000} = 0.0025$$

محاسبه نیروی داخلی اعضا :

$$F^{(1)} = K^{(1)} \Delta^{(1)} + F^f{}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -210 \\ 360 \\ -270 \end{Bmatrix}$$

$$F^{(2)} = K^{(2)} \Delta^{(2)} + F^f{}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 135 \\ 270 \\ -135 \\ 270 \end{Bmatrix}$$

دیاگرام برش SAP2000 :



دیاگرام خمش SAP2000 :

