تحلیل سازه‌ها ۲

اجزاء محدود – دو بعدی

مسائل دو بعدی تنش و کرنش صفحه‌ای

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده فنی و مهندسی

بخش عمران

سعید شجاعی

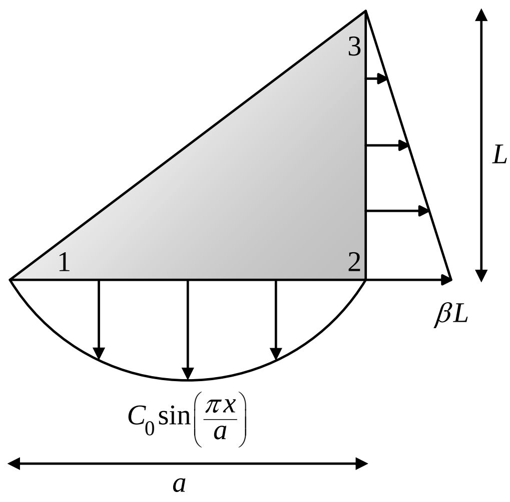
علیرضا قربی

وب سایت :

www.ghorbi.com

بارگذاری مثلث سه‌گره‌ای

مطلوب است تعیین بارهای وارد شده به گره‌ها در المان مثلثی ۳ گره‌ای زیر:



$$f_s = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = f_{s12} + f_{s23} =$$

$$= \int_{s12} \{N_{12}\}^T \begin{Bmatrix} T_{sx12} \\ T_{sy12} \end{Bmatrix} ds + \int_{s23} \{N_{23}\}^T \begin{Bmatrix} T_{sx23} \\ T_{sy23} \end{Bmatrix} ds$$

محاسبه توابع شکل:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & a & L \end{pmatrix} \xrightarrow{INVERSE} XI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \xrightarrow{TRANSPOSE} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} N_1 = 1 - \frac{x}{a} \\ N_2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{L} \\ N_3 = \frac{y}{L} \end{pmatrix} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a}-\frac{y}{L} & 0 & \frac{y}{L} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a}-\frac{y}{L} & 0 & \frac{y}{L} \end{pmatrix}$$

محاسبه توابع شکل در سطح 12 : y=0 و x متغیر

$$N_{12} = \begin{pmatrix} 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

محاسبه توابع شکل در سطح 23 : x=a و y متغیر

$$N_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\frac{y}{L} & 0 & \frac{y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{y}{L} & 0 & \frac{y}{L} \end{pmatrix}$$

معادله خط برای نیروی مثلثی:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = L \\ x_2 = \beta L & y_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) \Rightarrow y - L = \frac{0 - L}{\beta L - 0} x \Rightarrow x = \beta\left(L - y\right)$$

محاسبه نیروها و اسمبل:

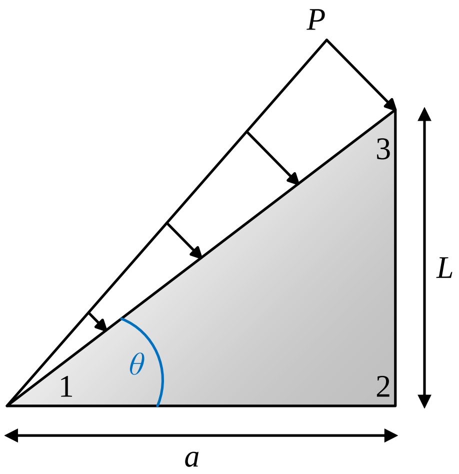
$$f_{s12} = \int_0^t \int_0^a \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -C_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{pmatrix} dxdz = t \times \int_0^a \begin{pmatrix} 1-\frac{x}{a} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{a} \\ \frac{x}{a} & 0 \\ 0 & \frac{x}{a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -C_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{C_0 at}{\pi} \\ 0 \\ -\frac{C_0 at}{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{s23} = \int_0^t \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta\left(L-y\right) \\ 0 \end{pmatrix} dydz = t \times \int_0^L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1-\frac{y}{L} & 0 \\ 0 & 1-\frac{y}{L} \\ \frac{y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{y}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\left(L-y\right) \\ 0 \end{pmatrix} dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^2 \beta t}{3} \\ 0 \\ \frac{L^2 \beta t}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_s = f_{s12} + f_{s23} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{C_0 at}{\pi} \\ \frac{L^2 \beta t}{3} \\ -\frac{C_0 at}{\pi} \\ \frac{L^2 \beta t}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

بارگذاری وتر مثلث قائم‌الزاویه سه گره‌ای

مطلوب است تعیین بارهای وارد شده به گره‌ها در المان مثلثی ۳ گره‌ای زیر:

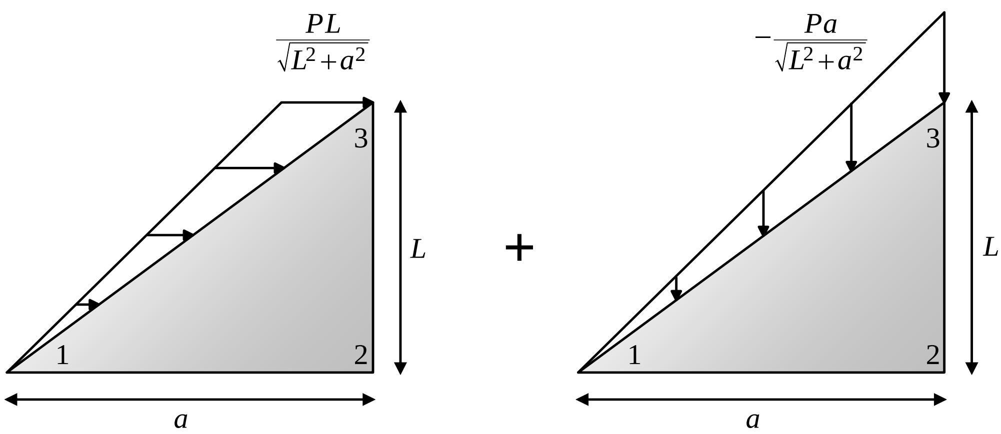


محاسبه توابع شکل:

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&a&L\end{pmatrix}\xrightarrow{INVERSE}XI=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{a}&\frac{1}{a}&0\\0&-\frac{1}{L}&\frac{1}{L}\end{pmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{a}&-\frac{1}{L}\\0&0&\frac{1}{L}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}N_1=1-\frac{x}{a}\\N_2=\frac{x}{a}-\frac{y}{L}\\N_3=\frac{y}{L}\end{pmatrix}\Rightarrow N=\begin{pmatrix}1-\frac{x}{a}&0&\frac{x}{a}-\frac{y}{L}&0&\frac{y}{L}&0\\0&1-\frac{x}{a}&0&\frac{x}{a}-\frac{y}{L}&0&\frac{y}{L}\end{pmatrix}$$

تجزیه نیروها در جهت x و y :



$$\sin(\theta)=\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{a}{\sqrt{L^2+a^2}}$$

معادله وتر:

$$\left.\begin{matrix} x_1=0 & y_1=0 \\ x_2=a & y_2=L \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \Rightarrow y-0=\frac{L-0}{a-0}(x-0)$$

بازنویسی معادله بالا برحسب x و برحسب y :

$$x=\frac{ay}{L} \quad , \quad y=\frac{Lx}{a}$$

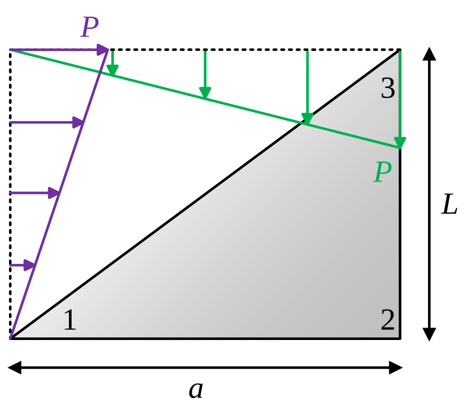
محاسبه توابع شکل در سطح 13 : $x=\frac{ay}{L}$ و y متغیر

$$N_{13}=\begin{pmatrix} 1-\frac{y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{L} & 0 \\ 0 & 1-\frac{y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{L} \end{pmatrix}$$

محاسبه توابع شکل در سطح 13 : $y=\frac{Lx}{a}$ و x متغیر

$$N_{13}=\begin{pmatrix} 1-\frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{a} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{a} \end{pmatrix}$$

تصویر نیروها به دو محور مجازی:



تصویر قائم:
$$\frac{-\frac{Pa}{\sqrt{L^2+a^2}}}{\cos(\theta)}=-P$$

تصویر افقی:
$$\frac{\frac{PL}{\sqrt{L^2+a^2}}}{\sin(\theta)}=P$$

معادله خط برای نیروی قائم:

$$\left.\begin{matrix} x_1=0 & y_1=0 \\ x_2=a & y_2=-P \end{matrix}\right\}\Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)\Rightarrow y=-\frac{Px}{a}$$

معادله خط برای نیروی افقی:

$$\left.\begin{matrix} x_1=0 & y_1=0 \\ x_2=P & y_2=L \end{matrix}\right\}\Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)\Rightarrow x=\frac{Py}{L}$$

محاسبه نیروها:

$$f_{sy13}=t\times\int_0^a\begin{pmatrix} 1-\frac{x}{a} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{x}{a} & 0 \\ 0 & \frac{x}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Px}{a} \end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{tPa}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{tPa}{3} \end{pmatrix}$$

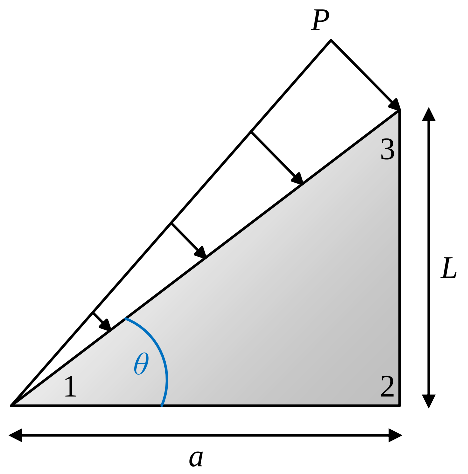
$$f_{sx13}=t\times\int_0^L\begin{pmatrix} 1-\frac{y}{L} & 0 \\ 0 & 1-\frac{y}{L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{y}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{Py}{L} \\ 0 \end{pmatrix}dy=\begin{pmatrix} \frac{tPL}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{tPL}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس از اسمبل نیروها خواهیم داشت:

$$f_s = f_{sx13} + f_{sy13} = \begin{pmatrix} \dfrac{tPL}{6} \\ -\dfrac{tPa}{6} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{tPL}{3} \\ -\dfrac{tPa}{3} \end{pmatrix}$$

بارگذاری وتر مثلث (قائم‌الزاویه، ساقین، متساوی‌الاضلاع و ...) سه گره‌ای

مطلوب است تعیین بارهای وارد شده به گره‌ها در المان مثلثی ۳ گره‌ای زیر:

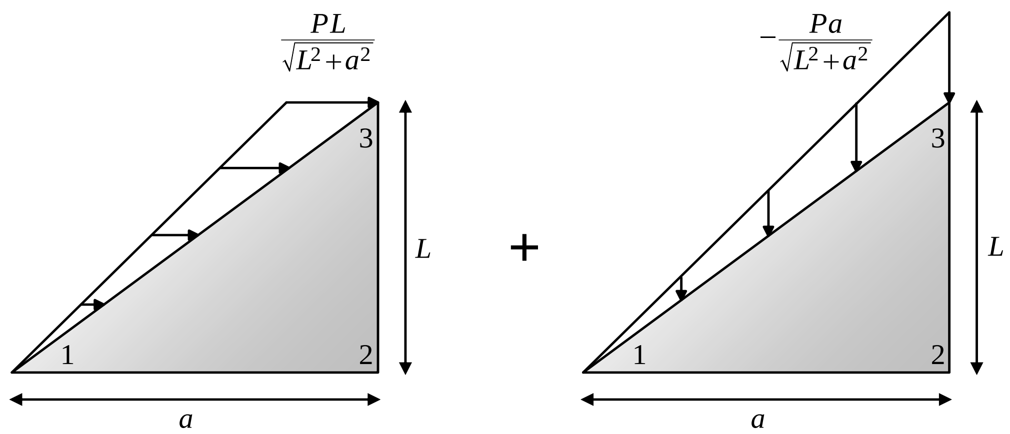


محاسبه توابع شکل:

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&a&L\end{pmatrix}\xrightarrow{INVERSE}XI=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{a}&\frac{1}{a}&0\\0&-\frac{1}{L}&\frac{1}{L}\end{pmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{a}&-\frac{1}{L}\\0&0&\frac{1}{L}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}N_1=1-\frac{x}{a}\\N_2=\frac{x}{a}-\frac{y}{L}\\N_3=\frac{y}{L}\end{pmatrix}\Rightarrow N=\begin{pmatrix}1-\frac{x}{a}&0&\frac{x}{a}-\frac{y}{L}&0&\frac{y}{L}&0\\0&1-\frac{x}{a}&0&\frac{x}{a}-\frac{y}{L}&0&\frac{y}{L}\end{pmatrix}$$

تجزیه نیروها در جهت x و y :



$$\sin(\theta)=\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{a}{\sqrt{L^2+a^2}}$$

چون بار مثلثی است با درون‌یابی نیروی ابتدا و انتها جهت به‌دست‌آوردن معادله نیرو در جهت x و y خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} T_{x1}=0 \\ T_{x3}=\dfrac{PL}{\sqrt{L^2+a^2}} \end{array}\right\}\rightarrow T_x=N_1T_{x1}+N_3T_{x3}\rightarrow T_x=\frac{Py}{\sqrt{L^2+a^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{y1}=0 \\ T_{y3}=-\dfrac{Pa}{\sqrt{L^2+a^2}} \end{array}\right\}\rightarrow T_x=N_1T_{y1}+N_3T_{y3}\rightarrow T_y=-\frac{Pay}{L\sqrt{L^2+a^2}}$$

$$T=\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{Py}{\sqrt{L^2+a^2}} \\ -\dfrac{Pay}{L\sqrt{L^2+a^2}} \end{bmatrix}$$

محاسبه نیروها به روش جامع با استفاده از انتگرال خط:

بایستی انتگرال $N^T\times T$ را روی خط بین گره ۱ و ۳ بگیریم. با استفاده از فرمول‌بندی انتگرال خط در ریاضی داریم:

$$f_{s13}=t\times\int_{line1-3}N^T\times T\times dl=t\times\int_0^1 N^T(\xi)\times T(\xi)\times|v(\xi)|\times d\xi$$

$$\frac{dl}{d\xi}=|v(\xi)|=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

چون انتگرال یک بعدی است ولی درون انتگرال دو متغیر x و y داریم بایستی معادله پارامتریک خط ۱-۳ را بنویسیم:

$$r(\xi)=(1-\xi)r_1+\xi r_3\qquad 0\le\xi\le 1$$
$$r(\xi)=(1-\xi)\langle 0,0\rangle+\xi\langle a,L\rangle$$
$$r(\xi)=\langle 0,0\rangle+\langle \xi a,\xi L\rangle$$
$$r(\xi)=\langle \xi a,\xi L\rangle$$

با استفاده از معادله پارامتریک بالا می‌توانیم به‌جای x و y مقادیر زیر را در معادلات جانشین کنیم:

$$\left.\begin{array}{ll} x=\xi a & \dfrac{dx}{d\xi}=a \\ y=\xi L & \dfrac{dy}{d\xi}=L \end{array}\right\}\rightarrow |v|=\sqrt{L^2+a^2}$$

در نتیجه:

$$N(\xi)=\begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix}$$

$$T(\xi)=\begin{bmatrix} \dfrac{PL\xi}{\sqrt{L^2+a^2}} \\ -\dfrac{Pa\xi}{\sqrt{L^2+a^2}} \end{bmatrix}$$

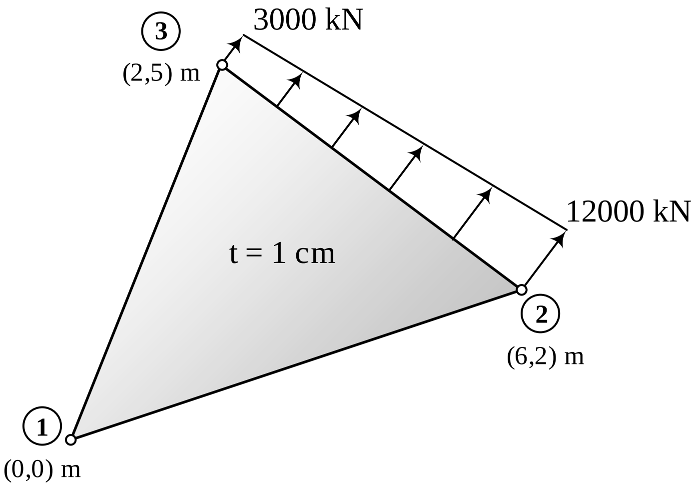
حال انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$N^T(\xi)\times T(\xi)\times\left|v(\xi)\right|\times t=\begin{bmatrix} LPt\xi-LPt\xi^2 \\ Pat\xi^2-Pat\xi \\ 0 \\ 0 \\ LPt\xi^2 \\ -Pat\xi^2 \end{bmatrix}$$

$$f_{s13}=\int_0^1\begin{bmatrix} LPt\xi-LPt\xi^2 \\ Pat\xi^2-Pat\xi \\ 0 \\ 0 \\ LPt\xi^2 \\ -Pat\xi^2 \end{bmatrix}d\xi=\begin{bmatrix} \dfrac{PLt}{6} \\ -\dfrac{Pat}{6} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{PLt}{3} \\ -\dfrac{Pat}{3} \end{bmatrix}$$

بارگذاری ضلع دلخواه مثلث (قائم‌الزاویه، ساقین، متساوی‌الاضلاع و ...) سه گره‌ای

در المان مثلثی زیر با توجه به نیروی داده شده که عمود بر ضلع ۲-۳ می‌باشد، بارهای گره‌ای را محاسبه نمایید.



حل:

محاسبه توابع شکل:

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&6&2\\1&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{INVERSE}XI=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{3}{26}&\frac{5}{26}&-\frac{1}{13}\\-\frac{2}{13}&-\frac{1}{13}&\frac{3}{13}\end{bmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{bmatrix}1&-\frac{3}{26}&-\frac{2}{13}\\0&\frac{5}{26}&-\frac{1}{13}\\0&-\frac{1}{13}&\frac{3}{13}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}N_1=1-\frac{2y}{13}-\frac{3x}{26}\\N_2=\frac{5x}{26}-\frac{y}{13}\\N_3=\frac{3y}{13}-\frac{x}{13}\end{pmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}1-\frac{2y}{13}-\frac{3x}{26}&0&\frac{5x}{26}-\frac{y}{13}&0&\frac{3y}{13}-\frac{x}{13}&0\\0&1-\frac{2y}{13}-\frac{3x}{26}&0&\frac{5x}{26}-\frac{y}{13}&0&\frac{3y}{13}-\frac{x}{13}\end{bmatrix}$$

$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad\cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

چون بار ذوزنقه‌ای است با درون‌یابی نیروی ابتدا و انتها جهت بدست آوردن معادله نیرو در جهت x و y خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} T_{x2} &= 12000\cos(\theta) \\ T_{x3} &= 3000\cos(\theta) \end{aligned}\right\} \rightarrow T_x = N_2 T_{x2} + N_3 T_{x3} \rightarrow T_x = \frac{21600x}{13} - \frac{2400y}{13}$$

$$\left.\begin{aligned} T_{y2} &= 12000\sin(\theta) \\ T_{y3} &= 3000\sin(\theta) \end{aligned}\right\} \rightarrow T_y = N_2 T_{y2} + N_3 T_{y3} \rightarrow T_y = \frac{16200x}{13} - \frac{1800y}{13}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21600x}{13} - \frac{2400y}{13} \\ \frac{16200x}{13} - \frac{1800y}{13} \end{bmatrix}$$

محاسبه نیروها به روش جامع با استفاده از انتگرال خط:

بایستی انتگرال $N^T \times T$ را روی خط بین گره ۲ و ۳ بگیریم. با استفاده از فرمول‌بندی انتگرال خط در ریاضی داریم:

$$f_{s23} = t \times \int_{line\,2-3} N^T \times T \times dl = t \times \int_0^1 N^T(\xi) \times T(\xi) \times |v(\xi)| \times d\xi$$

$$\frac{dl}{d\xi} = |v(\xi)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

چون انتگرال یک بعدی است ولی درون انتگرال دو متغیر x و y داریم بایستی معادله پارامتریک خط ۲-۳ را بنویسیم:

$$r(\xi) = (1-\xi) r_2 + \xi r_3 \qquad 0 \le \xi \le 1$$

$$r(\xi) = (1-\xi)\langle 6,2\rangle + \xi\langle 2,5\rangle$$

$$r(\xi) = \langle 6-6\xi, 2-2\xi\rangle + \langle 2\xi, 5\xi\rangle$$

$$r(\xi) = \langle 6-4\xi, 2+3\xi\rangle$$

با استفاده از معادله پارامتریک بالا می‌توانیم به‌جای x و y مقادیر زیر را در معادلات جانشین کنیم:

$$\begin{aligned} x &= 6-4\xi \qquad & \frac{dx}{d\xi} &= -4 \\ y &= 2+3\xi \qquad & \frac{dy}{d\xi} &= 3 \end{aligned} \Bigg\} \rightarrow |v| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

در نتیجه:

$$N(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & \xi \end{bmatrix}$$

$$T(\xi) = \begin{bmatrix} 9600 - 7200\xi \\ 7200 - 5400\xi \end{bmatrix}$$

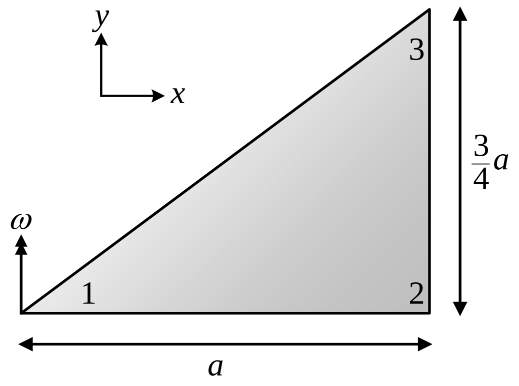
حال انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$N^T(\xi)\times T(\xi)\times|v(\xi)|\times t=\begin{bmatrix}0\\0\\360\xi^2-840\xi+480\\270\xi^2-630\xi+360\\480\xi-360\xi^2\\360\xi-270\xi^2\end{bmatrix}$$

$$f_{s23}=\int_0^1\begin{bmatrix}0\\0\\360\xi^2-840\xi+480\\270\xi^2-630\xi+360\\480\xi-360\xi^2\\360\xi-270\xi^2\end{bmatrix}d\xi=\begin{bmatrix}0\\0\\180\\135\\120\\90\end{bmatrix}$$

سرعت زاویه‌ای در المان مثلثی

در مسئله تنش صفحه‌ای زیر چنان چه المان با چگالی جرمی ρ و سرعت زاویه‌ای ω در مبدأ مختصات (گره ۱) حول محور y دوران کند مطلوب است محاسبه بار در هرگره :



محاسبه توابع شکل:

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&a&\frac{3a}{4}\end{bmatrix}\xrightarrow{INVERSE}XI=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{a}&\frac{1}{a}&0\\0&-\frac{4}{3a}&\frac{4}{3a}\end{bmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{a}&-\frac{4}{3a}\\0&0&\frac{4}{3a}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\x\\y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}N_1=1-\frac{x}{a}\\N_2=\frac{x}{a}-\frac{4y}{3a}\\N_3=\frac{4y}{3a}\end{bmatrix}\Rightarrow N=\begin{bmatrix}1-\frac{x}{a}&0&\frac{x}{a}-\frac{4y}{3a}&0&\frac{4y}{3a}&0\\0&1-\frac{x}{a}&0&\frac{x}{a}-\frac{4y}{3a}&0&\frac{4y}{3a}\end{bmatrix}$$

نیروی اینرسی ناشی از سرعت زاویه‌ای حول محور y برابر است با:

$$\left.\begin{matrix}bx=\rho\omega^2x\\by=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=\begin{bmatrix}\rho\omega^2x\\0\end{bmatrix}$$

محاسبه نیروها:

$$F_B=\iiint_V N^TbdV\quad\Rightarrow\quad F_B=\int_0^a\int_0^{\frac{3x}{4}}\int_0^t N^Tbdzdydx\quad\Rightarrow\quad F_B=t\int_0^a\int_0^{\frac{3x}{4}}N^Tbdydx$$

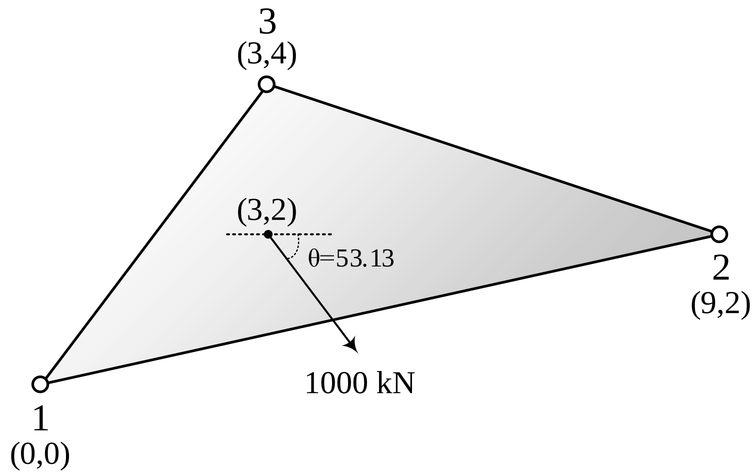
توجه: برای انتگرال‌گیری محور y بایستی سطح بین خط ۱-۲ و ۱-۳ را محاسبه نماییم. در سطح ۱-۲ معادله خط برابر است با y=0 و برای سطح ۱-۳ معادله خط برابر است با $y=\frac{3x}{4}$

$$F_B = t\int_0^a\int_0^{\frac{3x}{4}} \begin{bmatrix} \omega^2\rho x\left(1-\frac{x}{a}\right) \\ 0 \\ \omega^2\rho x\left(\frac{x}{a}-\frac{4y}{3a}\right) \\ 0 \\ \frac{4\rho xy}{3a}\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} dy\,dx = \begin{bmatrix} \frac{\rho t}{16}a^3\omega^2 \\ 0 \\ \frac{3\rho}{32}a^3\omega^2 t \\ 0 \\ \frac{3\rho}{32}a^3\omega^2 t \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{a^3\omega^2\rho t}{32}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مجموع کلیه نیروها برابر است با: $\frac{a^3\omega^2\rho t}{4}$

توزیع بار متمرکز روی گره‌ها در مسائل تنش صفحه‌ای

در المان مثلثی زیر با فرض یکنواخت بودن ضخامت در سطح، بارهای گره‌ای ناشی از بار متمرکز درون صفحه‌ای نشان داده شده را محاسبه نمایید. (گره‌ها و مختصات آن‌ها بر روی شکل مشخص شده‌اند)



محاسبه توابع شکل:

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&9&2\\1&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{INVERSE} XI=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{15}&\frac{2}{15}&-\frac{1}{15}\\-\frac{1}{5}&-\frac{1}{10}&\frac{3}{10}\end{bmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{15}&-\frac{1}{5}\\0&\frac{2}{15}&-\frac{1}{10}\\0&-\frac{1}{15}&\frac{3}{10}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}N_1=1-\frac{y}{5}-\frac{x}{15}\\N_2=\frac{2x}{15}-\frac{y}{10}\\N_3=\frac{3y}{10}-\frac{x}{15}\end{pmatrix}\Rightarrow N=\begin{bmatrix}1-\frac{y}{5}-\frac{x}{15}&0&\frac{2x}{15}-\frac{y}{10}&0&\frac{3y}{10}-\frac{x}{15}&0\\0&1-\frac{y}{5}-\frac{x}{15}&0&\frac{2x}{15}-\frac{y}{10}&0&\frac{3y}{10}-\frac{x}{15}\end{bmatrix}$$

حال مختصات نقطه (3,2) را در N قرار می‌دهیم:

$$N_{(3,2)}=\begin{bmatrix}0.4&0&0.2&0&0.4&0\\0&0.4&0&0.2&0&0.4\end{bmatrix}$$

تجزیه نیرو متمرکز در راستای x و y:

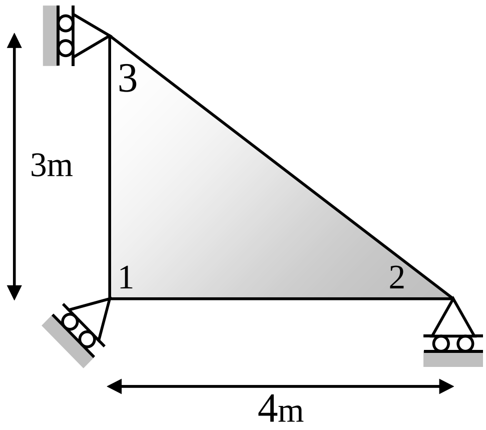
$$F_x=1000\times\cos(53.13)=600$$
$$F_y=-1000\times\sin(53.13)=-800$$

تبدیل نیروی متمرکز به گره‌ای:

$$F_{nodes} = N_{(3,2)}^{T} \times \begin{Bmatrix} 600 \\ -800 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 240 \\ -320 \\ 120 \\ -160 \\ 240 \\ -320 \end{Bmatrix} kN$$

تکیه‌گاه مورب و نیروی وزنی در المان مثلثی

در المان مثلثی زیر با فرض تنش صفحه‌ای، چنان چه سازه تحت اثر نیروی وزن خودش قرار داشته باشد و گره ۱ به مقدار ۴۵ درجه چرخیده باشد، مطلوب است تعیین جابه‌جایی گره‌ها:



$E=170\,GPa$

$\upsilon = 0.31$

$t = 5\,cm$

$\rho = 8890\ {}^{kg}/_{m^3}$

$g = 9.80665\ {}^{m}/_{s^2}$

راهنمایی: در تبدیل واحدها دقت شود. $1N = 1\dfrac{kg \times m}{s^2}$

حل:

$$D=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}=188073901.9803\times\begin{bmatrix}1 & 0.31 & 0\\ 0.31 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-0.31}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$D=\begin{pmatrix}188073901.9803 & 58302909.6139 & 0\\ 58302909.6139 & 188073901.9803 & 0\\ 0 & 0 & 64885496.18321\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{INVERSE} XI=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & 0\\ -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{1}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{3}\\ 0 & \dfrac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}N_1=1-\dfrac{y}{3}-\dfrac{x}{4}\\ N_2=\dfrac{x}{4}\\ N_3=\dfrac{y}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow\quad N=\begin{pmatrix}1-\dfrac{y}{3}-\dfrac{x}{4} & 0 & \dfrac{x}{4} & 0 & \dfrac{y}{3} & 0\\ 0 & 1-\dfrac{y}{3}-\dfrac{x}{4} & 0 & \dfrac{x}{4} & 0 & \dfrac{y}{3}\end{pmatrix}$$

برای محاسبه سختی نیاز به ماتریس B داریم که از مشتقات N قابل محاسبه است:

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس سختی المان:

$$K=t\times A\times B^{T}\times D\times B\Rightarrow$$

$$K=\begin{pmatrix} 5689235.535 & 3079710.145 & -3526385.662 & -1622137.405 & -2162849.873 & -1457572.74 \\ 3079710.145 & 7485733.119 & -1457572.74 & -1216603.053 & -1622137.405 & -6269130.066 \\ -3526385.662 & -1457572.74 & 3526385.662 & 0 & 0 & 1457572.74 \\ -1622137.405 & -1216603.053 & 0 & 1216603.053 & 1622137.405 & 0 \\ -2162849.873 & -1622137.405 & 0 & 1622137.405 & 2162849.873 & 0 \\ -1457572.74 & -6269130.066 & 1457572.74 & 0 & 0 & 6269130.066 \end{pmatrix}$$

شرایط تکیه‌گاه مورب در گره ۱ با استفاده از روش ماتریس تبدیل (چرخاندن مختصات گره) انجام می‌شود. لازم به ذکر است که سایر روش‌ها همچون ضرایب لاگرانژ و Master-Slave و پنالتی نیز قابل استفاده هستند.

ماتریس تبدیل برای چرخاندن گره ۱ از محورهای اصلی (منطبق با سیستم مختصات کلی) به محورهای ثانویه (فرض می‌کنیم تکیه‌گاه ۱ افقی بوده و سپس ۴۵ درجه پادساعتگرد چرخیده است در نتیجه جهت x محور ثانویه گره ۱ را در نهایت بایستی قفل نماییم):

$$T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K^{*}=T\times K\times T^{T}$$

$$K^{*}=\begin{pmatrix} 9667194.472 & 898248.7923 & -3524190.784 & -2007292.628 & -2676390.171 & -5463603.951 \\ 898248.7923 & 3507774.182 & 1462871.646 & 286756.0897 & 382341.4529 & -3402284.813 \\ -3524190.784 & 1462871.646 & 3526385.662 & 0 & 0 & 1457572.74 \\ -2007292.628 & 286756.0897 & 0 & 1216603.053 & 1622137.405 & 0 \\ -2676390.171 & 382341.4529 & 0 & 1622137.405 & 2162849.873 & 0 \\ -5463603.951 & -3402284.813 & 1457572.74 & 0 & 0 & 6269130.066 \end{pmatrix}$$

روش ۱ محاسبه نیروها (روش طولانی):

$$bx = 0$$

$$by = -\rho g = -8890 \times 9.80665 = -87181.1185 \frac{kg \times m}{m^3 \times s^2} = -87181.1185 \frac{N}{m^3} = -87.1811185 \frac{kN}{m^3}$$

$$\Rightarrow b = \begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix}$$

$$F_B = \iiint_V N^T b dV \quad \Rightarrow \quad F_B = \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3x}{4}} \int_0^t N^T b dz dy dx \quad \Rightarrow \quad F_B = t \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3x}{4}} N^T b dy dx$$

توجه: برای انتگرال‌گیری محور y بایستی سطح بین خط ۱-۲ و ۲-۳ را محاسبه نماییم. در سطح ۱-۲ معادله خط برابر است با y=0 و برای سطح ۲-۳ معادله خط برابر است با $y = 3 - \frac{3x}{4}$

$$F_B = 0.05 \times \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3x}{4}} \begin{bmatrix} 0 \\ 21.7952796x + 29.0603728y - 87.1811185 \\ 0 \\ -21.7952796x \\ 0 \\ -29.0603728y \end{bmatrix} dy dx = \begin{bmatrix} 0 \\ -8.71811185 \\ 0 \\ -8.71811185 \\ 0 \\ -8.71811185 \end{bmatrix}$$

روش ۲ محاسبه نیروها (روش کوتاه):

$$F_B = \frac{tA}{3} \begin{Bmatrix} bx \\ by \\ bx \\ by \\ bx \\ by \end{Bmatrix} = \frac{0.05 \times 6}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ -87.1811185 \\ 0 \\ -87.1811185 \\ 0 \\ -87.1811185 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8.71811185 \\ 0 \\ -8.71811185 \\ 0 \\ -8.71811185 \end{pmatrix}$$

اعمال شرایط تکیه‌گاه مورب بر روی نیروها با استفاده از روش چرخاندن سیستم مختصات گره:

$$F_B^* = T \times F_B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -8.71811185 \\ 0 \\ -8.71811185 \\ 0 \\ -8.71811185 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.16463601 \\ -6.16463601 \\ 0 \\ -8.71811185 \\ 0 \\ -8.71811185 \end{pmatrix}$$

در ماتریس سختی برای اعمال شرایط مرزی سطر و ستون ۱، ۴ و ۵ را حذف می‌نماییم و در بردار نیرو برای اعمال

شرایط مرزی سطر ۱، ۴ و ۵ را حذف می‌نماییم، دستگاه حاصل به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} 3507774.182 & 1462871.646 & -3402284.813 \\ 1462871.646 & 3526385.662 & 1457572.74 \\ -3402284.813 & 1457572.74 & 6269130.066 \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1y}^{*} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -6.16463601 \\ 0 \\ -8.71811185 \end{pmatrix}$$

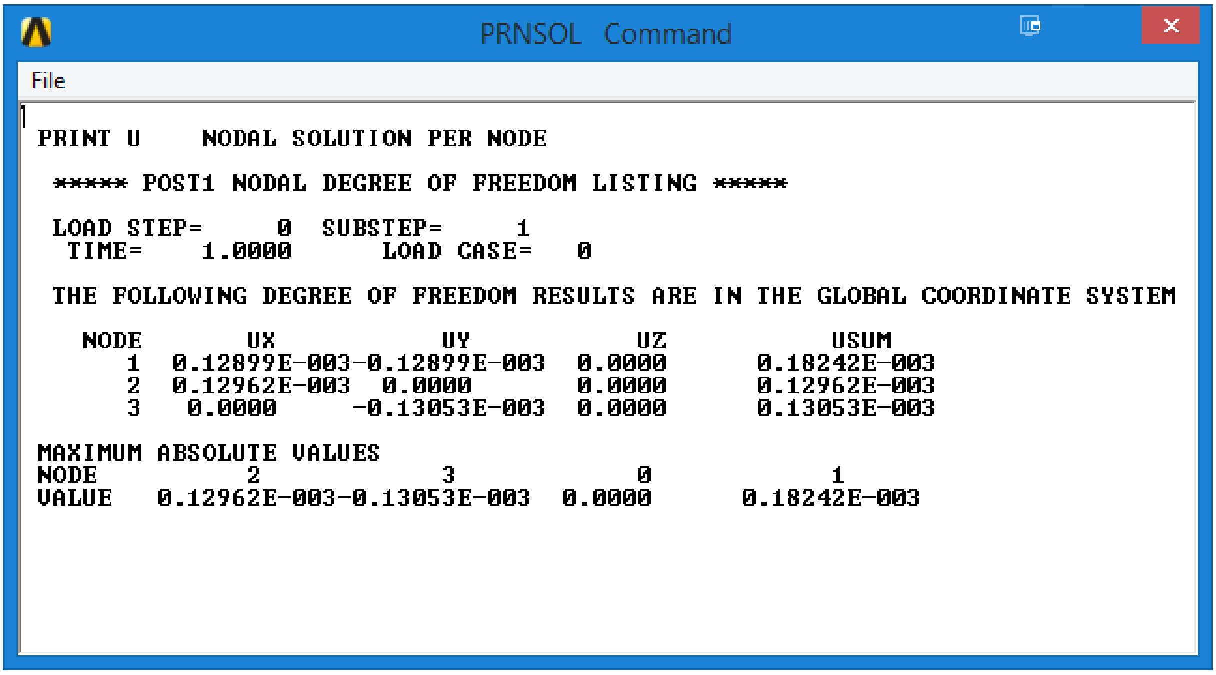
در نتیجه:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1y}^{*} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00018242 \\ 0.00012962 \\ -0.00013053 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \end{matrix}$$

کلیه جابه‌جایی در مختصات Global برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = T^{T} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{1x}^{*} = 0 \\ \Delta_{1y}^{*} = -0.00018242 \\ \Delta_{2x} = 0.00012962 \\ \Delta_{2y} = 0 \\ \Delta_{3x} = 0 \\ \Delta_{3y} = -0.00013053 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00012899 \\ -0.00012899 \\ 0.00012962 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00013053 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

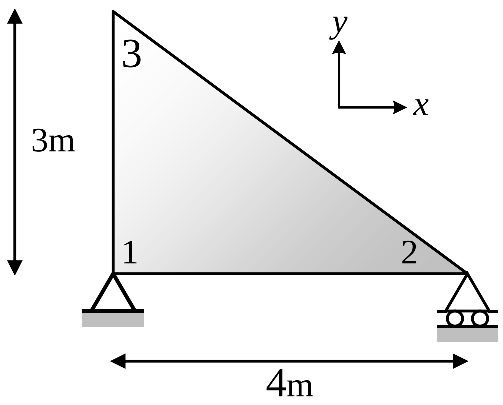
پاسخ نرم‌افزار ANSYS:




```
PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

 ***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

 LOAD STEP=     0  SUBSTEP=     1
  TIME=    1.0000      LOAD CASE=   0

 THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

   NODE       UX           UY           UZ           USUM
      1   0.12899E-003-0.12899E-003  0.0000      0.18242E-003
      2   0.12962E-003  0.0000       0.0000      0.12962E-003
      3    0.0000      -0.13053E-003  0.0000      0.13053E-003

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE          2            3            0            1
VALUE    0.12962E-003-0.13053E-003  0.0000      0.18242E-003
```

شرایط مرزی اجباری در المان مثلثی

در المان مثلثی زیر با فرض تنش صفحه‌ای، مطلوب است تعیین جابه‌جایی گره‌ها با شرایط مشخص شده زیر:



$$2\Delta_{2x} - \Delta_{3x} = 3\,cm$$
$$E=170\,GPa$$
$$\upsilon = 0.31$$
$$t = 2\,cm$$

حل:

محاسبه ماتریس مصالح در حالت تنش صفحه‌ای:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = 188073901.9803 \times \begin{bmatrix} 1 & 0.31 & 0 \\ 0.31 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0.31}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} 188073901.9803 & 58302909.6139 & 0 \\ 58302909.6139 & 188073901.9803 & 0 \\ 0 & 0 & 64885496.18321 \end{pmatrix}$$

محاسبه N ها:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{INVERSE} XI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{TRANSPOSE} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 = 1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{4} \\ N_2 = \frac{x}{4} \\ N_3 = \frac{y}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1-\frac{y}{3}-\frac{x}{4} & 0 & \frac{x}{4} & 0 & \frac{y}{3} & 0 \\ 0 & 1-\frac{y}{3}-\frac{x}{4} & 0 & \frac{x}{4} & 0 & \frac{y}{3} \end{pmatrix}$$

برای محاسبه سختی نیاز به ماتریس B داریم که از مشتقات N قابل محاسبه است:

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس سختی المان:

$$K=t\times A\times B^T\times D\times B\Rightarrow$$

$$K=\begin{pmatrix} 2275694.214 & 1231884.058 & -1410554.2649 & -648854.96183 & -865139.94911 & -583029.09614 \\ 1231884.058 & 2994293.2478 & -583029.09614 & -486641.22137 & -648854.96183 & -2507652.0264 \\ -1410554.2649 & -583029.09614 & 1410554.2649 & 0 & 0 & 583029.09614 \\ -648854.96183 & -486641.22137 & 0 & 486641.22137 & 648854.96183 & 0 \\ -865139.94911 & -648854.96183 & 0 & 648854.96183 & 865139.94911 & 0 \\ -583029.09614 & -2507652.0264 & 583029.09614 & 0 & 0 & 2507652.0264 \end{pmatrix}$$

بردار نیرو گرهی:

$$F=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

حال با توجه به معادله جابه‌جایی داده شده در مسئله خواهیم داشت:

$$2\Delta_{2x}-\Delta_{3x}=0.03m \quad\Rightarrow\quad \Delta_{3x}=2\Delta_{2x}-0.03$$

در نتیجه تصمیم به حذف Δ_{3x} از معادلات داریم و بایستی ماتریس تبدیل (برای سختی و نیرو) و بردار جابجایی معینی را تعریف کنیم تا معادله بالا بدست آید، پس خواهیم داشت :

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix}=\left(\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{T}\times\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.03 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

حال ماتریس سختی را با استفاده از ماتریس بالا تبدیل می‌کنیم:

$$K_{New}=T^{T}\times K_{6\times6}\times T=$$
$$\begin{pmatrix} 2275694.214 & 1231884.058 & -3140834.163 & -648854.9618 & -583029.0961\\ 1231884.058 & 2994293.248 & -1880739.02 & -486641.2214 & -2507652.026\\ -3140834.163 & -1880739.02 & 4871114.061 & 1297709.924 & 583029.0961\\ -648854.9618 & -486641.2214 & 1297709.924 & 486641.2214 & 0\\ -583029.0961 & -2507652.026 & 583029.0961 & 0 & 2507652.026 \end{pmatrix}$$

حال بردار نیرو را با استفاده از ماتریس بالا و جابه‌جایی معین شده اجباری تبدیل می‌کنیم:

$$F_{New}=T^{T}\times\left(F_{6\times1}-K_{6\times6}\times\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\-0.03\\0\end{Bmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-25954.19847\\-19465.64885\\51908.39695\\19465.64885\\0\end{pmatrix}$$

با تبدیل نیرو و ماتریس سختی و اعمال شرایط ذکر شده در مسئله حال می‌توانیم جابه‌جایی‌ها را محاسبه کنیم. با توجه به قفل بودن $\Delta_{1x}=\Delta_{1y}=\Delta_{2y}=0$ سطر و ستون‌های ۱، ۲ و ۴ از ماتریس سختی و نیرو خواهیم داشت :

$$\Delta_f=\begin{pmatrix}4871114.061 & 583029.0961\\ 583029.0961 & 2507652.026\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}51908.39695\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.01096140671\\-0.002548527061\end{pmatrix}\begin{matrix}\Delta_{2x}\\\Delta_{3y}\end{matrix}$$

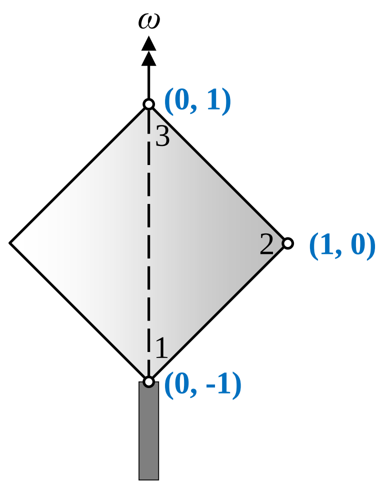
با به دست آمدن دو جابه‌جایی مجهول می‌توانیم با استفاده از معادله اولیه جابه‌جایی Δ_{3x} را نیز محاسبه کنیم :

$$\Delta_{3x}=2\Delta_{2x}-0.03\Rightarrow\Delta_{3x}=-0.008077186572$$

سرعت زاویه‌ای در المان مثلثی

ورق زیر حول قطر نشان داده شده با سرعت زاویه‌ای ثابت $200\, {rad}/_{sec}$ دوران می‌کند. گوشه پایین ورق بر روی تکیه‌گاه نصب شده‌است. با فرض شرایط تنش صفحه‌ای مطلوبست تعیین جابجایی گره‌های آزاد

راهنمایی: برای ساده‌سازی محاسبات از تقارن سازه استفاده نمایید.



$$E = 2\times 10^{10}\,\frac{kgf}{m^2}$$
$$\upsilon = 0$$
$$\rho = 7500\,\frac{kg}{m^3}$$
$$t = 1cm$$

قسمت اول: محاسبه نیرو

پس از تقارن درجات 1x, 1y, 3x قفل می‌باشند و 2x, 2y, 3y آزاد هستند.

$$A=\frac{2\times 1}{2}=1\,m^2$$

$$N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{y}{2}-\frac{x}{2} & x & \frac{y}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$F_B=\begin{Bmatrix}\rho\omega^2 x\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}7500\times 200^2\times x\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}300000000x\\ 0\end{Bmatrix}$$

معادله ساق شیب‌دار پایین مثلث برای بازه انتگرال‌گیری:

$$y=x-1$$

معادله ساق شیب‌دار بالا مثلث برای بازه انتگرال‌گیری:

$$y=1-x=-(x-1)$$

با توجه به درجات آزادی نیروها را می‌توان فقط برای درجات آزادی مورد نیاز محاسبه می‌کنیم (قرمز رنگ):

$$F_B=\iiint_V N^T b dV \;\;\Rightarrow\;\; F_B=\int_0^1\int_{x-1}^{-(x-1)}\int_0^t N^T b\,dz\,dy\,dx \;\;\Rightarrow\;\; F_B=t\int_0^1\int_{x-1}^{-(x-1)} N^T b\,dy\,dx$$

$$F_B = \frac{1}{100}\int_0^1\int_{x-1}^{-(x-1)} N^T \begin{Bmatrix} 300000000x \\ 0 \end{Bmatrix} dy\,dx \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 250000 \\ 0 \\ 500000 \\ 0 \\ 250000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

قسمت دوم: ماتریس مصالح

$$D = \begin{bmatrix} 20000000000 & 0 & 0 \\ 0 & 20000000000 & 0 \\ 0 & 0 & 10000000000 \end{bmatrix}$$

قسمت سوم: محاسبه سختی

- ازآنجایی‌که 2x, 2y, 3y آزاد هستند فقط همین ستون‌ها را برای B محاسبه می‌کنیم (رنگ آبی و قرمز) سختی 3x3
- از طرفی نیرو در جهت y نداریم و با توجه به قفل بودن گره ۲ و ۳ در جهت x می‌توان گفت که جابه‌جایی‌ها در راستای y همگی صفر هستند و می‌توان B را فقط برای درجه آزادی 2x نوشت (قرمز رنگ) سختی 1x1

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$K = tAB^T DB$$

$$K = \begin{pmatrix} 75000000 & 25000000 & -100000000 & -50000000 & 25000000 & 25000000 \\ 25000000 & 75000000 & 0 & -50000000 & -25000000 & -25000000 \\ -100000000 & 0 & 200000000 & 0 & -100000000 & 0 \\ -50000000 & -50000000 & 0 & 100000000 & 50000000 & -50000000 \\ 25000000 & -25000000 & -100000000 & 50000000 & 75000000 & -25000000 \\ 25000000 & -25000000 & 0 & -50000000 & -25000000 & 75000000 \end{pmatrix}$$

در نتیجه برای حل دستگاه داریم (با در نظرگرفتن قسمت قرمز رنگ و آبی رنگ):

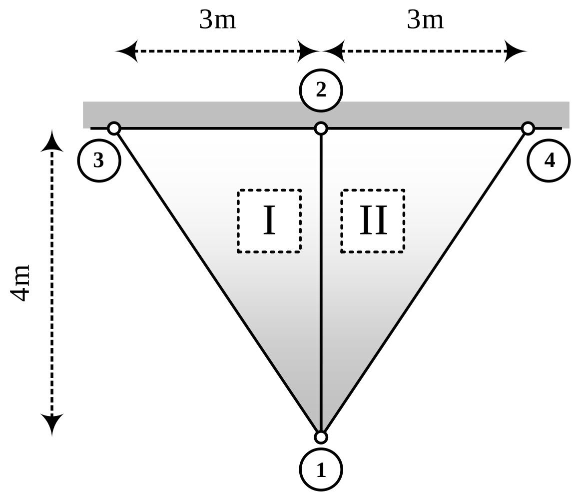
$$\begin{Bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 200000000 & 0 & 0 \\ 0 & 100000000 & -50000000 \\ 0 & -50000000 & 75000000 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 500000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0025 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

یا (با در نظرگرفتن قسمت قرمز رنگ):

$$\Delta_{2x} = \frac{500000}{200000000} = 0.0025m$$

نیروی وزنی در المان مثلثی

سازه زیر تحت اثر نیروی وزن خودش قرار دارد و گره ۱ مبدأ مختصات می‌باشد. با فرض شرایط تنش صفحه‌ای و با توجه به اطلاعات داده شده مطلوب است:



تنش در مختصات

$$\left| \begin{array}{l} x = 0.25\,m \\ y = 1.65\,m \end{array} \right.$$

$E = 180Gpa$

$\upsilon = 0.32$

$t = 5cm$

$\rho = 7850\ {kg}/{m^3}$

$g = 9.80665\ {m}/{s^2}$

حل: با استفاده از تقارن محاسبات را فقط برای عضو ۲ انجام می‌دهیم و چون نیرویی در راستای x نداریم سازه تنها یک درجه آزادی دارد Δ_{1y}. از طرفی چون المان مثلثی است تنش در تمامی نقاط المان یکسان است!

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200534759.36 & 64171122.995 & 0 \\ 64171122.995 & 200534759.36 & 0 \\ 0 & 0 & 68181818.182 \end{bmatrix}$$

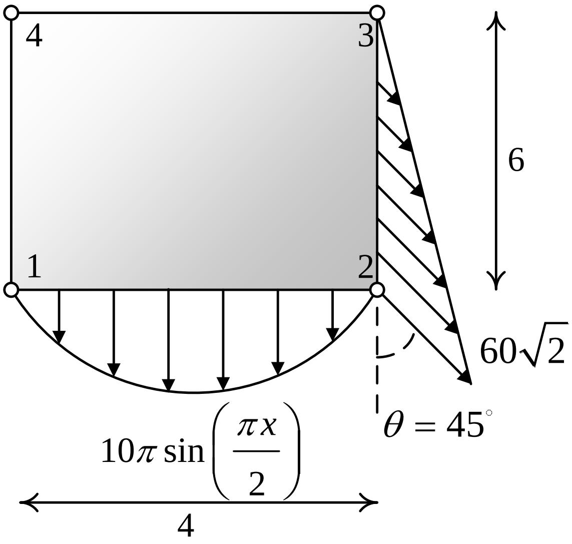
$$F_r = F_{1By} = -\frac{tA}{3}\frac{\rho g}{1000} = -\frac{0.05\times 6}{3}\times\frac{7850\times 9.80665}{1000} = -7.69822025\,kN$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1-\dfrac{y}{4} \\ B_r^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow\ K_r = tAB_r^T DB_r = 3760026.738\frac{kN}{m}\ \Rightarrow\ \Delta_{1y} = \frac{F_r}{K_r} = -2.047384\times 10^{-6}$$

$$\sigma = D\times\begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}\times\left(-2.047384\times 10^{-6}\right) = \begin{bmatrix} 32.8457 \\ 102.643 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بارگذاری المان چهارگوش منظم

ورق زیر با ضخامت t = 0.5 تحت اثر نیروهای درون صفحه‌ای نشان داده شده در شکل قرارگرفته است. با استفاده از فرمول‌بندی المان چهارگوش منظم نیروهای گره‌ای معادل را محاسبه کنید.



حل:

توابع پایه b = 2 و h = 3 :

$$N = \left[\frac{(x-2)(y-3)}{24} \quad -\frac{(x+2)(y-3)}{24} \quad \frac{(x+2)(y+3)}{24} \quad -\frac{(x-2)(y+3)}{24}\right]$$

تجزیه بار مثلثی مورب روی سطح ۲ به ۳ :

در راستای محور x :

$$60\sqrt{2}\times\sin 45^\circ = 60\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 60$$

در راستای محور y :

$$-60\sqrt{2}\times\cos 45^\circ = -60\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -60$$

حال معادله خط را برای بار مثلثی در راستای محور x و y می‌نویسیم. ازآنجاکه در سطح ۲ به ۳ مختصات x ثابت است و y متغیر، در نتیجه معادلات را برحسب x به دست آوردیم.

معادله خط برای بار مثلثی در راستای محور x:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 60 & y_1 = -3 \\ x_2 = 0 & y_2 = +3 \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = \frac{3+3}{0-60}(x-60)$$

$$\Rightarrow x = 10(3-y)$$

معادله خط برای بار مثلثی در راستای محور y:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=-60 & y_1=-3 \\ x_2=0 & y_2=+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right) \Rightarrow y+3=\frac{3+3}{0+60}\left(x+60\right)$$
$$\Rightarrow x=10\left(y-3\right)$$

$$T_{2-3}=\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 10\left(3-y\right) \\ 10\left(y-3\right) \end{Bmatrix}$$

در سطح ۱-۲ نیز معادله به‌صورت زیر است:

$$T_{1-2}=\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -10\pi\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \end{Bmatrix}$$

در سطح ۱-۲ داریم: y=-3 و x متغیر

$$N_{1-2}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{x}{4} & 0 & \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{x}{4} & 0 & \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در سطح ۲-۳ داریم: x=2 و y متغیر

$$N_{2-3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{y}{6} & 0 & \frac{y}{6}+\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{y}{6} & 0 & \frac{y}{6}+\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه نیرو:

$$f_{1-2}=t\int_{-2}^{2} N_{1-2}^{T}\begin{Bmatrix} 0 \\ -10\pi\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \end{Bmatrix}dx=\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

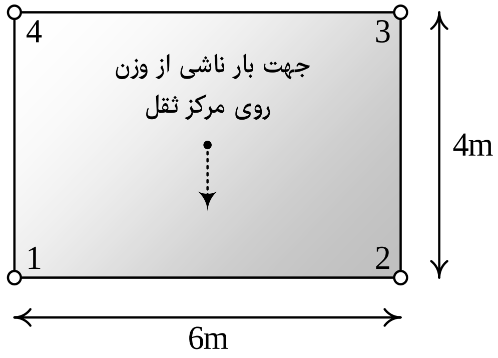
$$f_{2-3} = t\int_{-3}^{3} N_{2-3}^{T} \begin{Bmatrix} 10(3-y) \\ 10(y-3) \end{Bmatrix} dy = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ -60 \\ 30 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = f_{1-2} + f_{2-3}$$

بار حجمی المان چهارگوش منظم

دال بتنی زیر با استفاده از یک المان چهارگوش منظم مدل‌سازی شده است. اگر سازه تحت بار وزنی درون صفحه‌ای در مرکز ثقل خود و به جهت نشان داده شده در شکل قرار گرفته باشد، بارهای گره‌ای ناشی از آن را (به روش انتگرال‌گیری) برحسب $\frac{kN}{m}$ محاسبه نمایید.

راهنمایی: در تبدیل واحدها دقت شود که: $1N = 1\ \frac{kg\times m}{s^2}$



$$\rho = 2200\ \frac{kg}{m^3}$$

$$g = 9.81\ \frac{m}{s^2}$$

$$t = 20\ cm$$

محاسبه توابع شکل:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{INVERSE} XI = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{TRANSPOSE} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} N_1 = \frac{(x-3)(y-2)}{24} \\ N_2 = -\frac{(x+3)(y-2)}{24} \\ N_3 = \frac{(x+3)(y+2)}{24} \\ N_4 = -\frac{(x-3)(y+2)}{24} \end{pmatrix}$$

$$bx = 0$$

$$by = -\rho g = 2200\times 9.81 = -21582\frac{kg\times m}{m^3\times s^2} = -21582\frac{N}{m^3} = -21.582\frac{kN}{m^3}$$

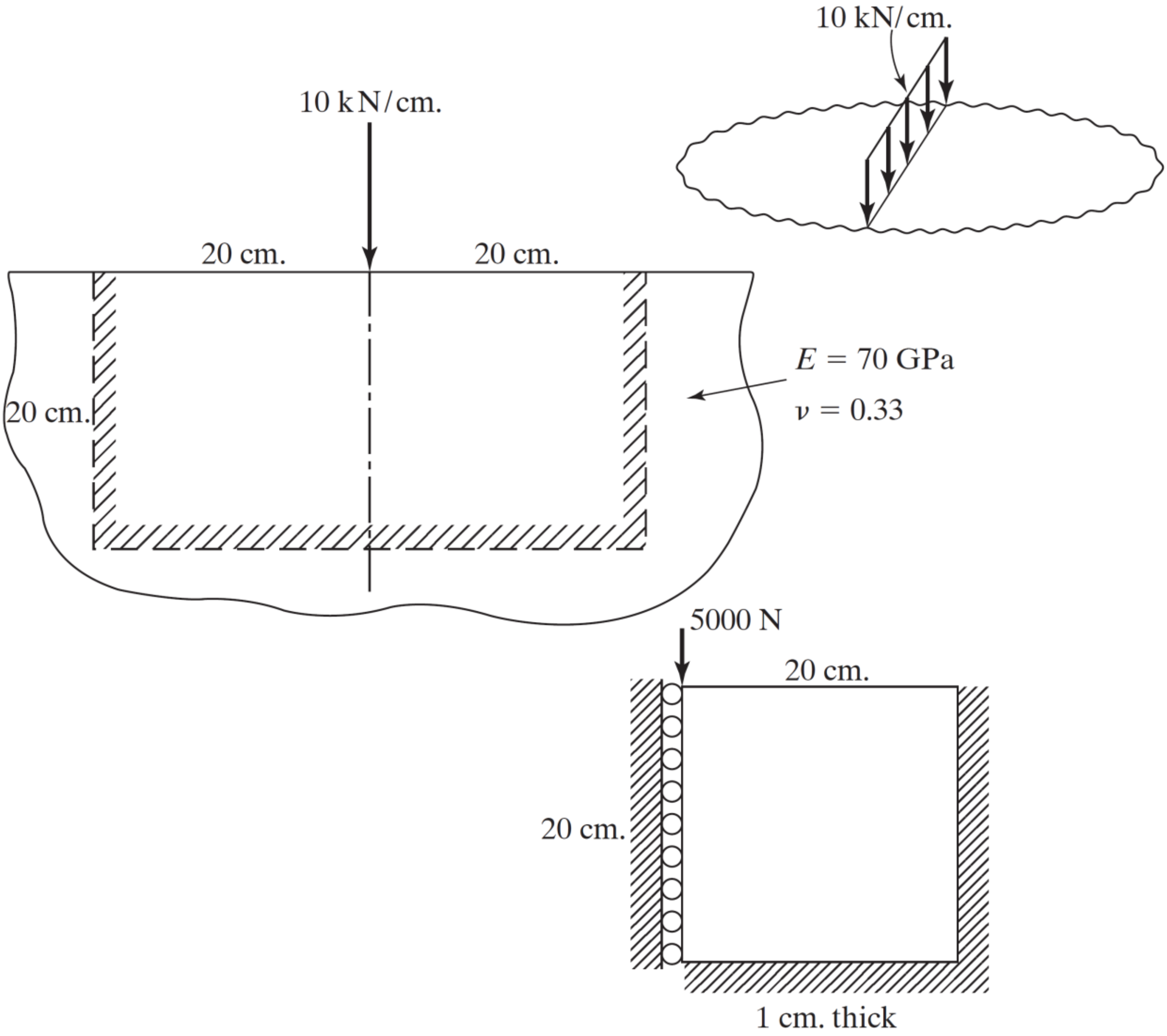
$$\Rightarrow b = \begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix}$$

$$F_B = \iiint_V N^T b dV \quad \Rightarrow \quad F_B = \int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{t} N^T b dz dy dx \quad \Rightarrow \quad F_B = t\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} N^T b dy dx$$

$$F_B = \frac{20}{100} \times \int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} \begin{bmatrix} -\frac{3597(x-3)(y-2)}{4000} \\ 0 \\ \frac{3597(x+3)(y-2)}{4000} \\ 0 \\ -\frac{3597(x+3)(y+2)}{4000} \\ 0 \\ \frac{3597(x-3)(y+2)}{4000} \\ 0 \end{bmatrix} dy dx = \begin{bmatrix} -25.8984 \\ 0 \\ -25.8984 \\ 0 \\ -25.8984 \\ 0 \\ -25.8984 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

المان چهارگوش منظم در حالت کرنش صفحه‌ای

یک حجم بزرگ از جنس آلومینیوم با سطح صاف تحت بار خطی $10\,kN/cm$ قرار گرفته است. با فرض شرایط کرنش صفحه‌ای، قسمتی از محدوده را همانند شکل در نظر بگیرید و تغییر شکل سطح و توزیع تنش را برای آن مشخص نمایید. (اعضایی کوچک نزدیک به بار انتخاب کنید و فرض شود جابجایی‌های به فاصله ۲۰ سانتی‌متر دورتر از محل بارگذاری قابل صرف‌نظر هستند).

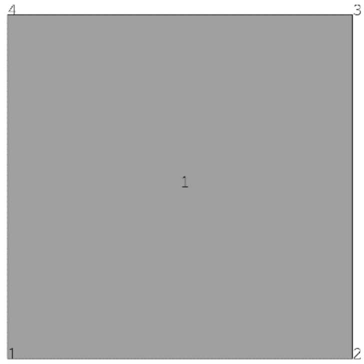


$$E = 70\,GPa = 7\times10^6\,\frac{N}{cm^2}$$

نکته: اصولاً در مسائل کرنش صفحه‌ای ضخامت یک واحد از طول سازه است. به طور مثال در این مسئله طول و عرض مورد بررسی سازه پس از تقارن ۲۰ سانتی‌متر است، در نتیجه ضخامت یک سانتی‌متر خواهد بود.

حل: با استفاده از تقارن محاسبات را فقط برای نصفه سمت راست سازه انجام می‌دهیم و سازه تنها یک درجه آزادی Δ_{4y} دارد.

شماره‌گذاری گره‌ها و المان‌ها در مش‌بندی ۱×۱ به صورت زیر می‌باشد:



ELEMENT	NODE NUMBERS			
1	1	2	3	4

طول و عرض عضو ۲۰ سانتی‌متر است، در نتیجه:

$$2b = 20\,cm \Rightarrow b = 10\,cm$$
$$2h = 20\,cm \Rightarrow h = 10\,cm$$

ماتریس مصالح (D) برای سازه:

$$D = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10371517.028 & 5108359.133 & 0 \\ 5108359.133 & 10371517.028 & 0 \\ 0 & 0 & 2631578.947 \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس کرنش - جابه‌جایی (B) برای عضو:

ازآنجاکه فقط گره ۴ در راستای y آزاد است، می‌توانیم سایر درجات را از ماتریس B حذف نماییم. به عبارتی فقط ستون هشتم از ماتریس B مورد نیاز است.

$$\begin{array}{cc} 1\cdots 7 & 8 \end{array}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cdots & 0 \\ \cdots & \frac{1}{40}-\frac{x}{400} \\ \cdots & -\frac{y}{400}-\frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی کاهش یافته عضو و سازه:

$$K_r = t\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} B^T DB dxdy$$

$$K_r \simeq \int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} \begin{matrix} (6578.9474y + 65789.474)(0.0025y + 0.025) + \dots \\ (25928.793x - 259287.93)(0.0025x - 0.025)\,dxdy \end{matrix}$$

$$K_r = 4334365.3250774 \frac{N}{cm}$$

بردار نیروی کاهش یافته سازه:

$$F_r = -5000\,N$$

محاسبه جابه‌جایی زیر بار:

$$\Delta_{4y} = \frac{F_r}{K_r} = \frac{-5000}{4334365.3250774} \simeq -0.001154\,cm$$

محاسبه معادله کرنش در عضو:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 0.00000288393x - 0.0000288393 \\ 0.00000288393y + 0.0000288393 \end{bmatrix}$$

کرنش درگره‌های عضو:

NODE	EX	EY	EXY
1	0	-5.7679E-05	0
2	0	0	0
3	0	0	5.7679E-05
4	0	-5.7679E-05	5.7679E-05

محاسبه معادله تنش در عضو:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 14.7321x - 147.321 \\ 29.9107x - 299.107 \\ 7.58929y + 75.8929 \end{bmatrix}$$

تنش درگره‌های عضو:

NODE	SX	SY	SXY
1	-294.643	-598.214	0
2	0	0	0
3	0	0	151.786
4	-294.643	-598.214	151.786

اگر مسئله را با تعداد المان‌های بیشتر حل نماییم پاسخ جابه‌جایی زیر بار و تنش‌ها و کرنش‌ها دقیق‌تر می‌شوند. به طور مثال جدول زیر پاسخ جابه‌جایی نقطه زیر بار برای مش‌بندی‌های مختلف است. ازآنجایی‌که بار به صورت متمرکز در مسئله اعمال شده، همگرایی پاسخ کند است.

MESH	1×1	2×2	5×5	10×10	25×25

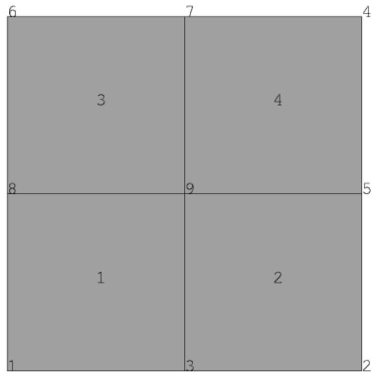
Max $\|\Delta_y\|$	0.001154	0.001732	0.002466	0.003026	0.003769

به عنوان نمونه اگر شماره‌گذاری گره‌ها و المان‌ها در مش‌بندی ۲×۲ به صورت زیر باشد:

ELEMENT	**NODE NUMBERS**			
1	1	3	9	8
2	3	2	5	9
3	8	9	7	6
4	9	5	4	7

مدل دارای ۹ گره است، در نتیجه ۱۸ درجه حرکتی انتقالی دارد که از این بین تنها درجات زیر آزاد هستند:

۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۶ ۱۷ ۱۸

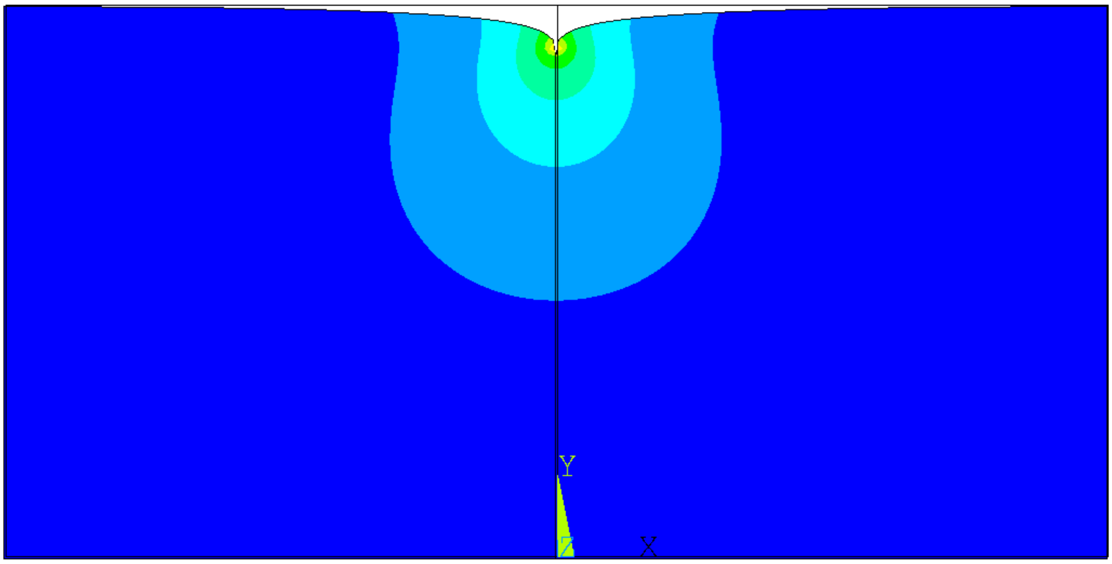


درجات آزاد سیستم ماتریس سختی اسمبل شده و کاهش یافته سازه به همراه بردار نیروهای کاهش یافته گره‌ای به صورت زیر خواهند بود و با حل سیستم می‌توان بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای را محاسبه کرد که با نتایج جدول فوق برای مش‌بندی ذکر شده مطابقت دارد:

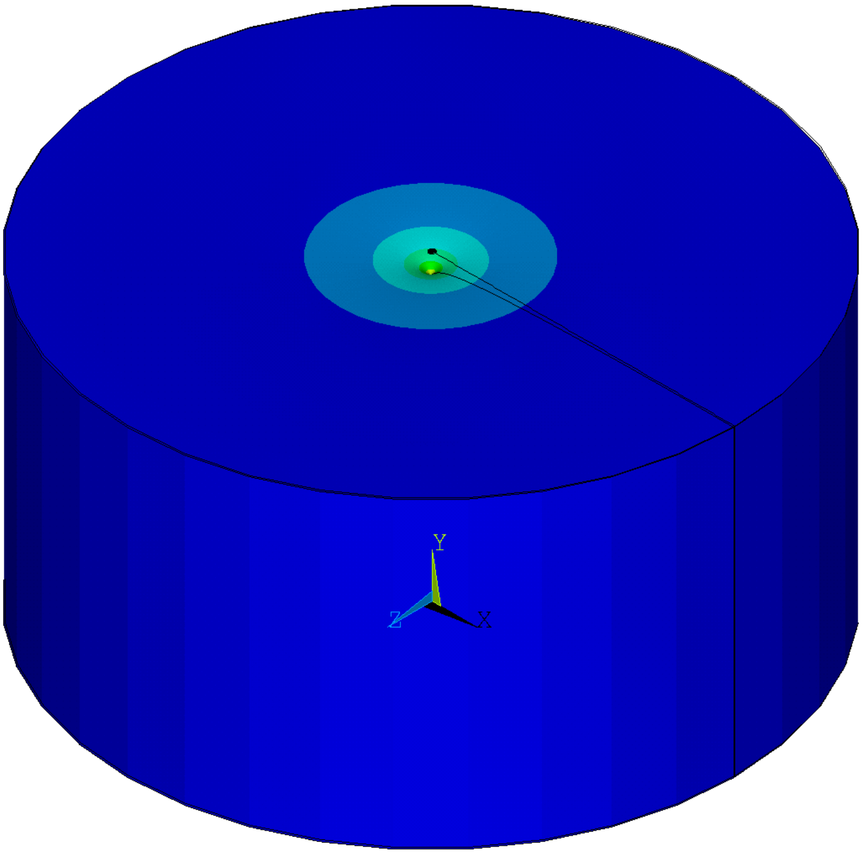
$$K_r = \begin{bmatrix} 4334365.33 & 619195.046 & 851393.189 & -3018575.85 & 1934984.52 & -2167182.66 \\ 619195.046 & 8668730.65 & 0 & -1934984.52 & 1702786.38 & 0 \\ 851393.189 & 0 & 8668730.65 & -2167182.66 & 0 & -6037151.7 \\ -3018575.85 & -1934984.52 & -2167182.66 & 8668730.65 & 0 & 1702786.38 \\ 1934984.52 & 1702786.38 & 0 & 0 & 17337461.3 & 0 \\ -2167182.66 & 0 & -6037151.7 & 1702786.38 & 0 & 17337461.3 \end{bmatrix}$$

$$F_r = \begin{bmatrix} -5000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta = K_r^{-1} \times F_r \simeq \begin{bmatrix} -0.0017323 \\ -0.000050326 \\ -0.0001196 \\ -0.00060532 \\ 0.00019828 \\ -0.00019874 \end{bmatrix} cm$$

تغییر شکل سازه (بدون تقارن) با مش‌بندی خیلی نرم در حالت نمایش ۲ بعدی:



نمونه‌ای از تغییر شکل سازه (بدون تقارن) با مش‌بندی خیلی نرم در حالت نمایش ۳ بعدی:



پیوست ۱

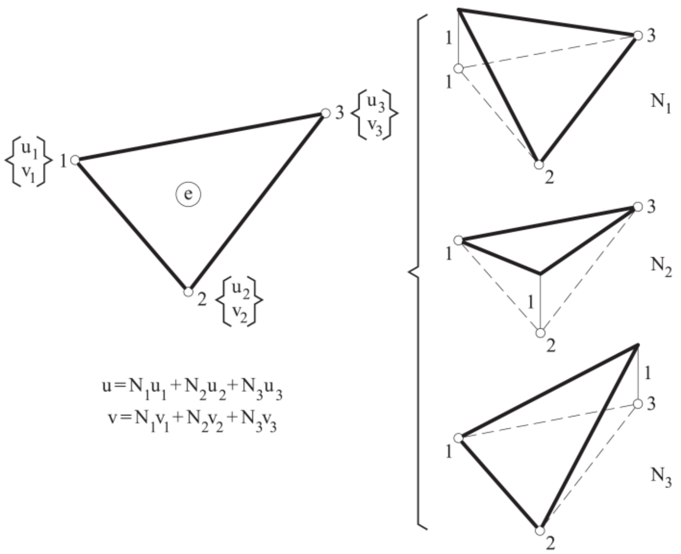
المان مثلث ۳ گره‌ای (درجه ۱)

$$A_{Triangle}=\frac{1}{2}\left(x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}\xrightarrow{INVERSE} X^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{x_2y_3-x_3y_2}{2A} & -\frac{x_1y_3-x_3y_1}{2A} & \frac{x_1y_2-x_2y_1}{2A}\\ \frac{y_2-y_3}{2A} & -\frac{y_1-y_3}{2A} & \frac{y_1-y_2}{2A}\\ -\frac{x_2-x_3}{2A} & \frac{x_1-x_3}{2A} & -\frac{x_1-x_2}{2A}\end{pmatrix}$$

$$XI=\frac{1}{2A}\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}\frac{1}{2A}\begin{pmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}N_1=\dfrac{C_{11}+C_{21}x+C_{31}y}{2A}\\ N_2=\dfrac{C_{12}+C_{22}x+C_{32}y}{2A}\\ N_3=\dfrac{C_{13}+C_{23}x+C_{33}y}{2A}\end{pmatrix}\Rightarrow N=\begin{pmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{pmatrix}$$



$$B=\begin{pmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x}\end{pmatrix}\Rightarrow B=\frac{1}{2A}\begin{pmatrix}C_{21} & 0 & C_{22} & 0 & C_{23} & 0\\ 0 & C_{31} & 0 & C_{32} & 0 & C_{33}\\ C_{31} & C_{21} & C_{32} & C_{22} & C_{33} & C_{23}\end{pmatrix}$$

المان چهارگوش منظم ۴ گره‌ای (درجه ۱)

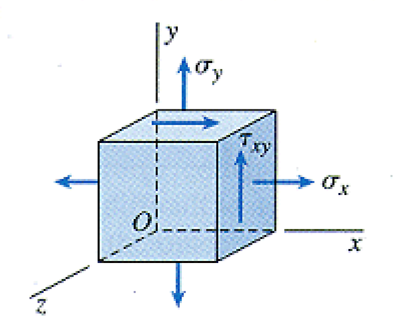
$$X=\begin{bmatrix}1 & -b & -h & bh\\ 1 & b & -h & -bh\\ 1 & b & h & bh\\ 1 & -b & h & -bh\end{bmatrix}\xrightarrow{INVERSE} X^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{1}{4b}\\ -\frac{1}{4h} & -\frac{1}{4h} & \frac{1}{4h} & \frac{1}{4h}\\ \frac{1}{4bh} & -\frac{1}{4bh} & \frac{1}{4bh} & -\frac{1}{4bh}\end{bmatrix}\xrightarrow{TRANSPOSE}$$

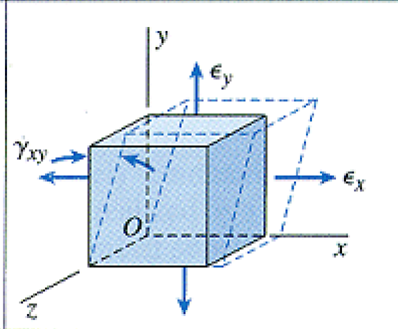
$$\left(X^{-1}\right)^{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4b} & -\frac{1}{4h} & \frac{1}{4bh}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4b} & -\frac{1}{4h} & -\frac{1}{4bh}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4h} & \frac{1}{4bh}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4b} & \frac{1}{4h} & -\frac{1}{4bh}\end{bmatrix}\xrightarrow{\times EXPANSION} N^{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4b} & -\frac{1}{4h} & \frac{1}{4bh}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4b} & -\frac{1}{4h} & -\frac{1}{4bh}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4h} & \frac{1}{4bh}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4b} & \frac{1}{4h} & -\frac{1}{4bh}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\\ xy\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}N_1=\dfrac{(b-x)(h-y)}{4bh}\\ N_2=\dfrac{(b+x)(h-y)}{4bh}\\ N_3=\dfrac{(b+x)(h+y)}{4bh}\\ N_4=\dfrac{(h+y)(b-x)}{4bh}\end{bmatrix}\Rightarrow N=\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{bmatrix}$$

پیوست ۲

تنش و کرنش صفحه‌ای



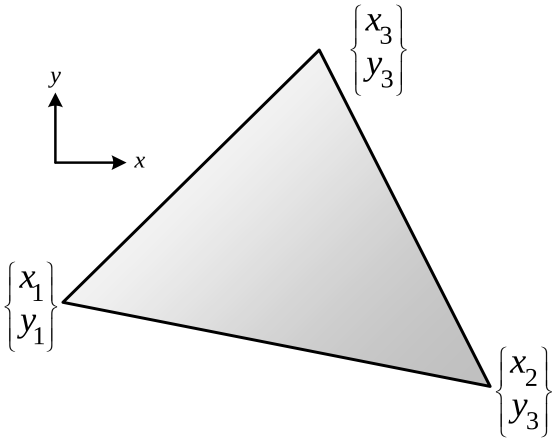


	Plane stress	Plane strain
Stresses	$\sigma_z = 0$ $\tau_{xz} = 0$ $\tau_{yz} = 0$ σ_x, σ_y, and τ_{xy} may have nonzero values	$\tau_{xz} = 0$ $\tau_{yz} = 0$ σ_x, σ_y, σ_z, and τ_{xy} may have nonzero values
Strains	$\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$ ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, and γ_{xy} may have nonzero values	$\epsilon_z = 0$ $\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$ ϵ_x, ϵ_y, and γ_{xy} may have nonzero values

مساحت مثلث

ثابت کنید که مساحت مثلث برابر است با:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2\right)$$



از کراس دو بردار استفاده می‌نماییم:

$$\vec{P_1P_2}=\langle x_2-x_1 \quad y_2-y_1 \quad 0\rangle$$
$$\vec{P_1P_3}=\langle x_3-x_1 \quad y_3-y_1 \quad 0\rangle$$

$$A_{Triangle}=\frac{\left|\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}\right|}{2}$$

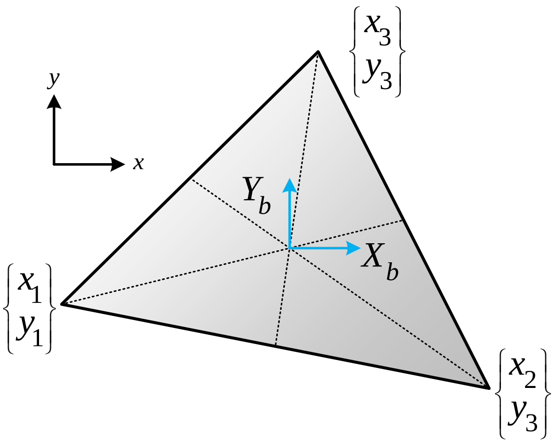
$$\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & 0\\ y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & 0\\ x_3-x_1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\langle 0 \quad 0 \quad x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2\rangle$$

$$\left|\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}\right|=x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2$$

$$A_{Triangle}=\frac{1}{2}\left(x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2\right)$$

بار حجمی در المان مثلثی

بارهای حجمی را در المان مثلثی زیر بدست آورید.



توابع شکل المان مثلثی:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(C_{11} + C_{21}x + C_{31}y\right)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left(C_{12} + C_{22}x + C_{32}y\right)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left(C_{13} + C_{23}x + C_{33}y\right)$$

جدول زیر حاصل دقیق انتگرال‌های المان مثلثی می‌باشد:

m	n	$I = \int_A x^m y^n \, dx \, dy$
0	0	$\int dA = A = [\, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \,]/2$
0	1	$\int y \, dA = A\bar{y} = A(y_1 + y_2 + y_3)/3$
1	0	$\int x \, dA = A\bar{x} = A(x_1 + x_2 + x_3)/3$
0	2	$\int y^2 \, dA = A(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9\bar{y}^2)/12$
1	1	$\int xy \, dA = A(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9\overline{x\,y})/12$
2	0	$\int x^2 \, dA = A(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9\bar{x}^2)/12$

محاسبه نیروهای حجمی وارد شده بر مرکز سطح در گره‌ها:

$$F_B = t\int_A N^T \times \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} dxdy = t\int_A \frac{1}{2A} \times \begin{bmatrix} C_{11} + C_{21}x + C_{31}y & 0 \\ 0 & C_{11} + C_{21}x + C_{31}y \\ C_{12} + C_{22}x + C_{32}y & 0 \\ 0 & C_{12} + C_{22}x + C_{32}y \\ C_{13} + C_{23}x + C_{33}y & 0 \\ 0 & C_{13} + C_{23}x + C_{33}y \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \times dA$$

$$=t\int_A \frac{1}{2A}\times\begin{Bmatrix}\left(C_{11}+C_{21}x+C_{31}y\right)X_b\\ \left(C_{11}+C_{21}x+C_{31}y\right)Y_b\\ \left(C_{12}+C_{22}x+C_{32}y\right)X_b\\ \left(C_{12}+C_{22}x+C_{32}y\right)Y_b\\ \left(C_{13}+C_{23}x+C_{33}y\right)X_b\\ \left(C_{13}+C_{23}x+C_{33}y\right)Y_b\end{Bmatrix}\times dA$$

با توجه به جدول خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2A}\int C_{1i}dA=\frac{C_{1i}\times A}{2A}=\frac{C_{1i}}{2}$$

$$\frac{1}{2A}\int C_{2i}xdA=\frac{C_{2i}\times A\bar{x}}{2A}=\frac{C_{2i}}{2}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2A}\int C_{3i}ydA=\frac{C_{3i}\times A\bar{y}}{2A}=\frac{C_{3i}}{2}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$F_B=t\begin{Bmatrix}\left(\frac{C_{11}}{2}+\frac{C_{21}}{2}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+\frac{C_{31}}{2}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)X_b\\ \left(\frac{C_{11}}{2}+\frac{C_{21}}{2}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+\frac{C_{31}}{2}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)Y_b\\ \left(\frac{C_{12}}{2}+\frac{C_{22}}{2}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+\frac{C_{32}}{2}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)X_b\\ \left(\frac{C_{12}}{2}+\frac{C_{22}}{2}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+\frac{C_{32}}{2}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)Y_b\\ \left(\frac{C_{13}}{2}+\frac{C_{23}}{2}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+\frac{C_{33}}{2}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)X_b\\ \left(\frac{C_{13}}{2}+\frac{C_{23}}{2}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+\frac{C_{33}}{2}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)Y_b\end{Bmatrix}=\frac{tA}{3}\begin{Bmatrix}X_b\\ Y_b\\ X_b\\ Y_b\\ X_b\\ Y_b\end{Bmatrix}$$

برای نمونه محاسبات درایه اول برابر است با:

$$t\left(\begin{array}{r}\frac{x_2y_3}{2}-\frac{x_3y_2}{2}+\frac{x_1y_2}{6}-\frac{x_1y_3}{6}+\frac{x_2y_2}{6}-\frac{x_2y_3}{6}+\frac{x_3y_2}{6}-\frac{x_3y_3}{6}+\\ \frac{x_3y_1}{6}-\frac{x_2y_2}{6}-\frac{x_2y_1}{6}-\frac{x_2y_3}{6}+\frac{x_3y_2}{6}+\frac{x_3y_3}{6}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{x_1y_2}{6}-\frac{x_2y_1}{6}-\frac{x_1y_3}{6}+\frac{x_3y_1}{6}+\frac{x_2y_3}{6}-\frac{x_3y_2}{6}=\frac{tA}{3}$$