دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده فنی و مهندسی

بخش عمران

تحلیل سازه‌ها ۲

اجزاء محدود – ایزوپارامتریک

مسائل یک بعدی المان میله

مسائل دو بعدی تنش و کرنش صفحه‌ای

سعید شجاعی

علیرضا قربی

وب سایت :

www.ghorbi.com

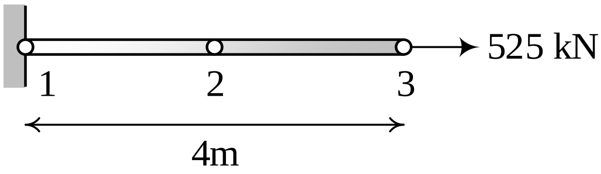
میله ایزوپارامتریک

در میله نشان داده شده با استفاده از فرمولبندی ایزوپارامتریک مطلوبست:

الف) محاسبه توابع پایه المان میله ۳ گرهی در مختصات r

ب) محاسبه ژاکوبین عضو

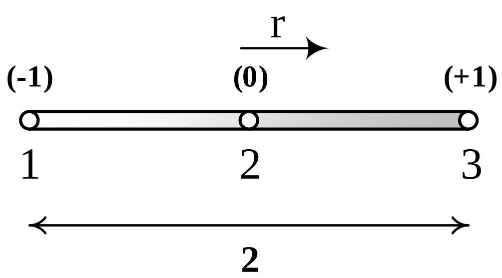
ج) با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی ۳ نقطه‌ای جابجایی گره‌های آزاد را محاسبه نمایید.



$E = 70GPa$

$A = 3000mm^2$

راهنمایی : المان مادر برای المان ۳ گره‌ای در حالت یک بعدی به صورت زیر می‌باشد :



قسمت الف :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Inverse} X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{Shape\ Functions} \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \frac{r(r-1)}{2} & 1-r^2 & \frac{r(r+1)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \begin{pmatrix} r-\frac{1}{2} & -2r & r+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

قسمت ب :

$$x_r = \sum_{i=1}^{3} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 2r + 2$$

$$J=\frac{\partial x}{\partial r}=2$$

قسمت ج :

$$GP=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}}\end{pmatrix}$$

$$GW=\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}$$

$$B=J^{-1}\times\frac{\partial N}{\partial r}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}r-\frac{1}{2} & -2r & r+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{r}{2}-\frac{1}{4} & -r & \frac{r}{2}+\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$K=\sum_{i=1}^{3}w_iB^TEABJ$$

با توجه به شرایط تکیه‌گاهی می‌توان محاسبات را تنها برای درجه آزادی ۲ و ۳ انجام داد (قسمت قرمز رنگ) :

$$B_1=\begin{bmatrix}-0.637298 & 0.774597 & -0.137298\end{bmatrix}$$

$$K_1=\begin{bmatrix}94768.1390 & -115184.8057 & 20416.6667\\ -115184.8057 & 140000.0000 & -24815.1943\\ 20416.6667 & -24815.1943 & 4398.5276\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}-0.25 & 0.00 & 0.25\end{bmatrix}$$

$$K_2=\begin{bmatrix}23333.3333 & 0.0000 & -23333.3333\\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000\\ -23333.3333 & 0.0000 & 23333.3333\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0.137298 & -0.774597 & 0.637298\end{bmatrix}$$

$$K_3=\begin{bmatrix}4398.5276 & -24815.1943 & 20416.6667\\ -24815.1943 & 140000.0000 & -115184.8057\\ 20416.6667 & -115184.8057 & 94768.1390\end{bmatrix}$$

$$K=K_1+K_2+K_3$$

$$K=\begin{bmatrix}122500 & -140000 & 17500\\ -140000 & 280000 & -140000\\ 17500 & -140000 & 122500\end{bmatrix}$$

با اعمال شرایط تکیه‌گاهی و حل دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{Bmatrix}\Delta_2\\ \Delta_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}280000 & -140000\\ -140000 & 122500\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{Bmatrix}0\\ 525\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.005\\ 0.01\end{Bmatrix}m$$

میله ایزوپارامتریک

در میله نشان داده شده با فرض یک المان ۴ گره‌ای، اگر بار متمرکزی در فاصله ۵ متری از تکیه‌گاه وارد شده باشد با استفاده از فرمول‌بندی ایزوپارامتریک مطلوب است :

الف) محاسبه توابع پایه المان میله ۴ گرهی در مختصات r

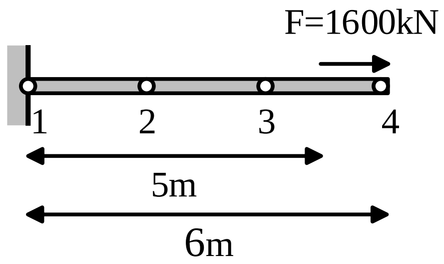
ب) محاسبه ژاکوبین عضو

ج) محاسبه بارهای گره‌ای

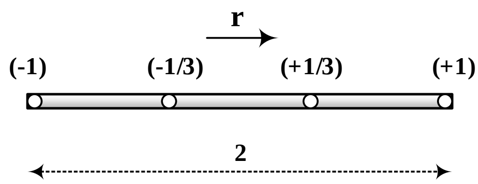
د) تعیین حداقل تعداد نقاط گوسی مورد نیاز از جدول زیر جهت به دست آوردن سختی عضو و جابجایی گره‌ها (دلیل خود را به صورت کوتاه بنویسید)

ه) محاسبه سختی عضو با حداقل تعداد نقاط گوسی ممکن

و) محاسبه جابجایی گره‌ها



راهنمایی : المان مادر برای المان ۴ گره‌ای در حالت یک بعدی به صورت زیر می‌باشد :



$E=200\,GPa$

$A=3000mm^2$

Number of points, n	Points, x_i		Weights, w_i	
1	0		2	
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	±0.57735...	1	
3	0		$\frac{8}{9}$	0.888889...
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	±0.774597...	$\frac{5}{9}$	0.555556...
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	±0.339981...	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	0.652145...
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	±0.861136...	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	0.347855...
5	0		$\frac{128}{225}$	0.568889...
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	±0.538469...	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	0.478629...
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	±0.90618...	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	0.236927...

حل:

قسمت الف

$$X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27}\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{INVERSE} XI=\begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16}\\ \frac{1}{16} & -\frac{27}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{1}{16}\\ \frac{9}{16} & -\frac{9}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{9}{16}\\ -\frac{9}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{27}{16} & \frac{9}{16}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{9}{16}\\ \frac{9}{16} & -\frac{27}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{27}{16}\\ \frac{9}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{9}{16} & -\frac{27}{16}\\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ r\\ r^2\\ r^3\end{pmatrix}\Rightarrow N^T=\begin{bmatrix}N_1=-\frac{9r^3}{16}+\frac{9r^2}{16}+\frac{r}{16}-\frac{1}{16}\\ N_2=\frac{27r^3}{16}-\frac{9r^2}{16}-\frac{27r}{16}+\frac{9}{16}\\ N_3=-\frac{27r^3}{16}-\frac{9r^2}{16}+\frac{27r}{16}+\frac{9}{16}\\ N_4=\frac{9r^3}{16}+\frac{9r^2}{16}-\frac{r}{16}-\frac{1}{16}\end{bmatrix}$$

قسمت ب

$$x(r)=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4=3r+3$$

$$J=\frac{\partial x}{\partial r}=3$$

قسمت ج

در نقطه x=5m نیرو وارد شده است و باید محل آن را در مختصات طبیعی بدست آوریم :

$$5=3r+3\rightarrow r=\frac{2}{3}$$

$$N^T\left(\frac{2}{3}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{16}\\ -\frac{5}{16}\\ \frac{15}{16}\\ \frac{5}{16}\end{bmatrix}\qquad \mathrm{F}_{Nodes}=\mathrm{N}^T\times F_{x=5}=\begin{pmatrix}\frac{1}{16}\\ -\frac{5}{16}\\ \frac{15}{16}\\ \frac{5}{16}\end{pmatrix}\times 1600=\begin{pmatrix}100\\ -500\\ 1500\\ 500\end{pmatrix}kN$$

قسمت د

زیرا بسط و جملات میله ۴ گرهی از درجه ۳ می‌باشند حداقل به گوس ۳ نقطه‌ای جهت محاسبه مناسب سختی و

جابجایی نیاز داریم.

قسمت ه

$$GP=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}}\end{pmatrix}$$

$$GW=\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}$$

$$B=J^{-1}\times\frac{\partial N}{\partial r}=\begin{bmatrix}-\frac{9r^2}{16}+\frac{3r}{8}+\frac{1}{48} & \frac{27r^2}{16}-\frac{3r}{8}-\frac{9}{16} & -\frac{27r^2}{16}-\frac{3r}{8}+\frac{9}{16} & \frac{9r^2}{16}+\frac{3r}{8}-\frac{1}{48}\end{bmatrix}$$

$$K=\sum_{i=1}^{3}w_iB^TEABJ$$

با توجه به شرایط تکیه‌گاهی می‌توان محاسبات را تنها برای درجه آزادی ۲ و ۳ و ۴ انجام داد :

$$B_1=\begin{bmatrix}-0.60714042 & 0.74047375 & -0.15952625 & 0.026192916\end{bmatrix}$$

$$K_1=\begin{bmatrix}368619.49 & -449571.54 & 96854.833 & -15902.778\\ -449571.54 & 548301.38 & -118125.0 & 19395.167\\ 96854.833 & -118125.0 & 25448.624 & -4178.4576\\ -15902.778 & 19395.167 & -4178.4576 & 686.06883\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0.020833333 & -0.5625 & 0.5625 & -0.020833333\end{bmatrix}$$

$$K_2=\begin{bmatrix}694.44444 & -18750.0 & 18750.0 & -694.44444\\ -18750.0 & 506250.0 & -506250.0 & 18750.0\\ 18750.0 & -506250.0 & 506250.0 & -18750.0\\ -694.44444 & 18750.0 & -18750.0 & 694.44444\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}-0.026192916 & 0.15952625 & -0.74047375 & 0.60714042\end{bmatrix}$$

$$K_3=\begin{bmatrix}686.06883 & -4178.4576 & 19395.167 & -15902.778\\ -4178.4576 & 25448.624 & -118125.0 & 96854.833\\ 19395.167 & -118125.0 & 548301.38 & -449571.54\\ -15902.778 & 96854.833 & -449571.54 & 368619.49\end{bmatrix}$$

$$K=K_1+K_2+K_3$$

$$K=\begin{bmatrix}370000 & -472500 & 135000 & -32500\\ -472500 & 1080000 & -742500 & 135000\\ 135000 & -742500 & 1080000 & -472500\\ -32500 & 135000 & -472500 & 370000\end{bmatrix}$$

قسمت و

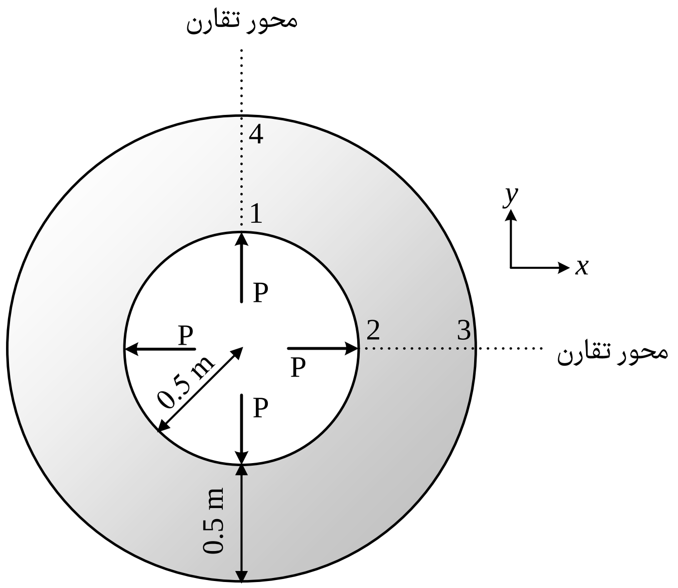
$$\begin{bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1080000 & -742500 & 135000 \\ -742500 & 1080000 & -472500 \\ 135000 & -472500 & 370000 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -500 \\ 1500 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0053772 \\ 0.0109191 \\ 0.0133333 \end{bmatrix} m$$

جابه‌جایی و تنش در مسائل تنش صفحه‌ای (ایزوپارامتریک)

دیسک توخالی زیر را در نظر بگیرید. چنانچه $P = 10000kN$ باشد، با فرض تنش صفحه ای و با استفاده از یک المان چهارگره‌ای و انتگرال‌گیری گوسی ۲ نقطه‌ای در هر راستا، مطلوب است محاسبه :

الف: جابه‌جایی گره‌های ۱ تا ۴ واقع بر روی محور تقارن.

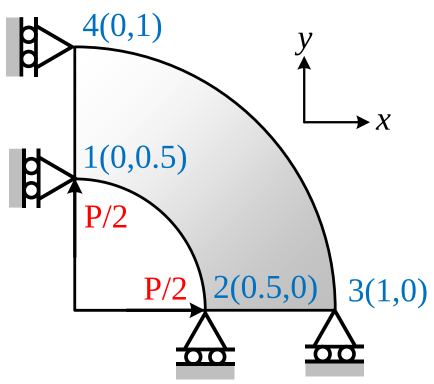
ب: تنش نقاط گوسی در المان.



$$E = 200GPa$$
$$\nu = 0.3$$
$$t = 10cm$$

قسمت الف:

پس از تقارن و در نظرگرفتن ربع دیسک مشخص شده خواهیم داشت:



$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4} \quad N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4} \quad N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \quad N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r :

$$\frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{1}{4}(s-1) \quad \frac{\partial N_2}{\partial r} = -\frac{1}{4}(s-1) \quad \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{1}{4}(s+1) \quad \frac{\partial N_4}{\partial r} = -\frac{1}{4}(s+1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} s-1 & -s+1 & s+1 & -s-1 \end{bmatrix}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به s :

$$\frac{\partial N_1}{\partial s}=\frac{1}{4}(r-1)\quad \frac{\partial N_2}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_3}{\partial s}=\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_4}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r-1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} r-1 & -r-1 & r+1 & -r+1\end{bmatrix}$$

ماتریس مصالح:

$$D=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}=219780219.78\times\begin{bmatrix} 1.00 & 0.30 & 0.00 \\ 0.30 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 219780219.780 & 65934065.934 & 0.000 \\ 65934065.934 & 219780219.780 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 76923076.923\end{bmatrix}$$

جدول گوس ۲ نقطه‌ای:

گوس	r	s	$\frac{\partial N_1}{\partial r}$	$\frac{\partial N_2}{\partial r}$	$\frac{\partial N_3}{\partial r}$	$\frac{\partial N_4}{\partial r}$	$\frac{\partial N_1}{\partial s}$	$\frac{\partial N_2}{\partial s}$	$\frac{\partial N_3}{\partial s}$	$\frac{\partial N_4}{\partial s}$
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.3943	0.3943	0.1057	-0.1057	-0.3943	-0.1057	0.1057	0.3943
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.3943	0.3943	0.1057	-0.1057	-0.1057	-0.3943	0.3943	0.1057
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.1057	0.1057	0.3943	-0.3943	-0.1057	-0.3943	0.3943	0.1057
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.1057	0.1057	0.3943	-0.3943	-0.3943	-0.1057	0.1057	0.3943

محاسبه ژاکوبین:

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4\end{bmatrix}$$

$$J_1=\begin{bmatrix} 0.3028 & -0.3028 \\ 0.0528 & 0.1972\end{bmatrix}\quad,\quad |J_1|=0.0757$$

$$J_2=\begin{bmatrix} 0.3028 & -0.3028 \\ 0.1972 & 0.0528\end{bmatrix}\quad,\quad |J_2|=0.0757$$

$$J_3=\begin{bmatrix} 0.4472 & -0.4472 \\ 0.1972 & 0.0528\end{bmatrix}\quad,\quad |J_3|=0.1118$$

$$J_4=\begin{bmatrix}0.4472 & -0.4472\\ 0.0528 & 0.1972\end{bmatrix} \quad , \quad |J_4|=0.1118$$

محاسبه ماتریس B :

$$B=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}-2.6043 & 0 & 0.6043 & 0 & 0.6978 & 0 & 1.3022 & 0\\ 0 & -1.3022 & 0 & -0.6978 & 0 & 0.3489 & 0 & 1.6511\\ -1.3022 & -2.6043 & -0.6978 & 0.6043 & 0.3489 & 0.6978 & 1.6511 & 1.3022\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}-0.6978 & 0 & -1.3022 & 0 & 1.6511 & 0 & 0.3489 & 0\\ 0 & 0.6043 & 0 & -2.6043 & 0 & 1.3022 & 0 & 0.6978\\ 0.6043 & -0.6978 & -2.6043 & -1.3022 & 1.3022 & 1.6511 & 0.6978 & 0.3489\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}-0.4726 & 0 & -1.5274 & 0 & 1.7637 & 0 & 0.2363 & 0\\ 0 & -0.2363 & 0 & -1.7637 & 0 & 0.8819 & 0 & 1.1181\\ -0.2363 & -0.4726 & -1.7637 & -1.5274 & 0.8819 & 1.7637 & 1.1181 & 0.2363\end{bmatrix}$$

$$B_4=\begin{bmatrix}-1.7637 & 0 & -0.2363 & 0 & 1.1181 & 0 & 0.8819 & 0\\ 0 & -1.5274 & 0 & -0.4726 & 0 & 0.2363 & 0 & 1.7637\\ -1.5274 & -1.7637 & -0.4726 & -0.2363 & 0.2363 & 1.1181 & 1.7637 & 0.8819\end{bmatrix}$$

توجه: برای سادگی محاسبات می‌توان ماتریس B را فقط برای درجات آزاد ۲، ۳، ۵ و ۸ نوشت.

$$B_1=\begin{bmatrix}0.0000 & 0.6043 & 0.6978 & 0.0000\\ -1.3022 & 0.0000 & 0.0000 & 1.6511\\ -2.6043 & -0.6978 & 0.3489 & 1.3022\end{bmatrix} \qquad B_2=\begin{bmatrix}0.0000 & -1.3022 & 1.6511 & 0.0000\\ 0.6043 & 0.0000 & 0.0000 & 0.6978\\ -0.6978 & -2.6043 & 1.3022 & 0.3489\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0.0000 & -1.5274 & 1.7637 & 0.0000\\ -0.2363 & 0.0000 & 0.0000 & 1.1181\\ -0.4726 & -1.7637 & 0.8819 & 0.2363\end{bmatrix} \qquad B_4=\begin{bmatrix}0.0000 & -0.2363 & 1.1181 & 0.0000\\ -1.5274 & 0.0000 & 0.0000 & 1.7637\\ -1.7637 & -0.4726 & 0.2363 & 0.8819\end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی K برای درجات آزاد ۲، ۳، ۵ و ۸ :

$$K=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i \times w_j \times B^T_{(r_i,s_j)} \times D \times B_{(r_i,s_j)} \times t \times \left|J_{(r_i,s_j)}\right|$$

$$K_1=\begin{bmatrix} 6771353.995 & 665563.113 & -982788.535 & -5552366.928 \\ 665563.113 & 891295.796 & 559916.398 & -31112.268 \\ -982788.535 & 559916.398 & 881167.435 & 839731.958 \\ -5552366.928 & -31112.268 & 839731.958 & 5523436.211 \end{bmatrix}$$

$$K_2=\begin{bmatrix} 891295.796 & 665563.113 & -31112.268 & 559916.398 \\ 665563.113 & 6771353.995 & -5552366.928 & -982788.535 \\ -31112.268 & -5552366.928 & 5523436.211 & 839731.958 \\ 559916.398 & -982788.535 & 839731.958 & 881167.435 \end{bmatrix}$$

$$K_3=\begin{bmatrix} 329237.720 & 982788.535 & -665563.113 & -745181.677 \\ 982788.535 & 8407098.117 & -7956366.102 & -1617239.381 \\ -665563.113 & -7956366.102 & 8311562.911 & 1632795.515 \\ -745181.677 & -1617239.381 & 1632795.515 & 3119843.586 \end{bmatrix}$$

$$K_4=\begin{bmatrix} 8407098.117 & 982788.535 & -1617239.381 & -7956366.102 \\ 982788.535 & 329237.720 & -745181.677 & -665563.113 \\ -1617239.381 & -745181.677 & 3119843.586 & 1632795.515 \\ -7956366.102 & -665563.113 & 1632795.515 & 8311562.911 \end{bmatrix}$$

$$K=K_1+K_2+K_3+K_4$$

$$K=\begin{bmatrix} 16398985.630 & 3296703.297 & -3296703.297 & -13693998.309 \\ 3296703.297 & 16398985.630 & -13693998.309 & -3296703.297 \\ -3296703.297 & -13693998.309 & 17836010.144 & 4945054.945 \\ -13693998.309 & -3296703.297 & 4945054.945 & 17836010.144 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه:

$$K\Delta=F$$

$$\begin{bmatrix} 16398985.630 & 3296703.297 & -3296703.297 & -13693998.309 \\ 3296703.297 & 16398985.630 & -13693998.309 & -3296703.297 \\ -3296703.297 & -13693998.309 & 17836010.144 & 4945054.945 \\ -13693998.309 & -3296703.297 & 4945054.945 & 17836010.144 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Delta_{1y}\\ \Delta_{2x}\\ \Delta_{3x}\\ \Delta_{4y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5000\\ 5000\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

جابه‌جایی گره‌های آزاد:

$$\begin{bmatrix}\Delta_{1y}\\ \Delta_{2x}\\ \Delta_{3x}\\ \Delta_{4y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.00071189\\ 0.00071189\\ 0.00053094\\ 0.00053094\end{bmatrix}\text{m}$$

قسمت ب:

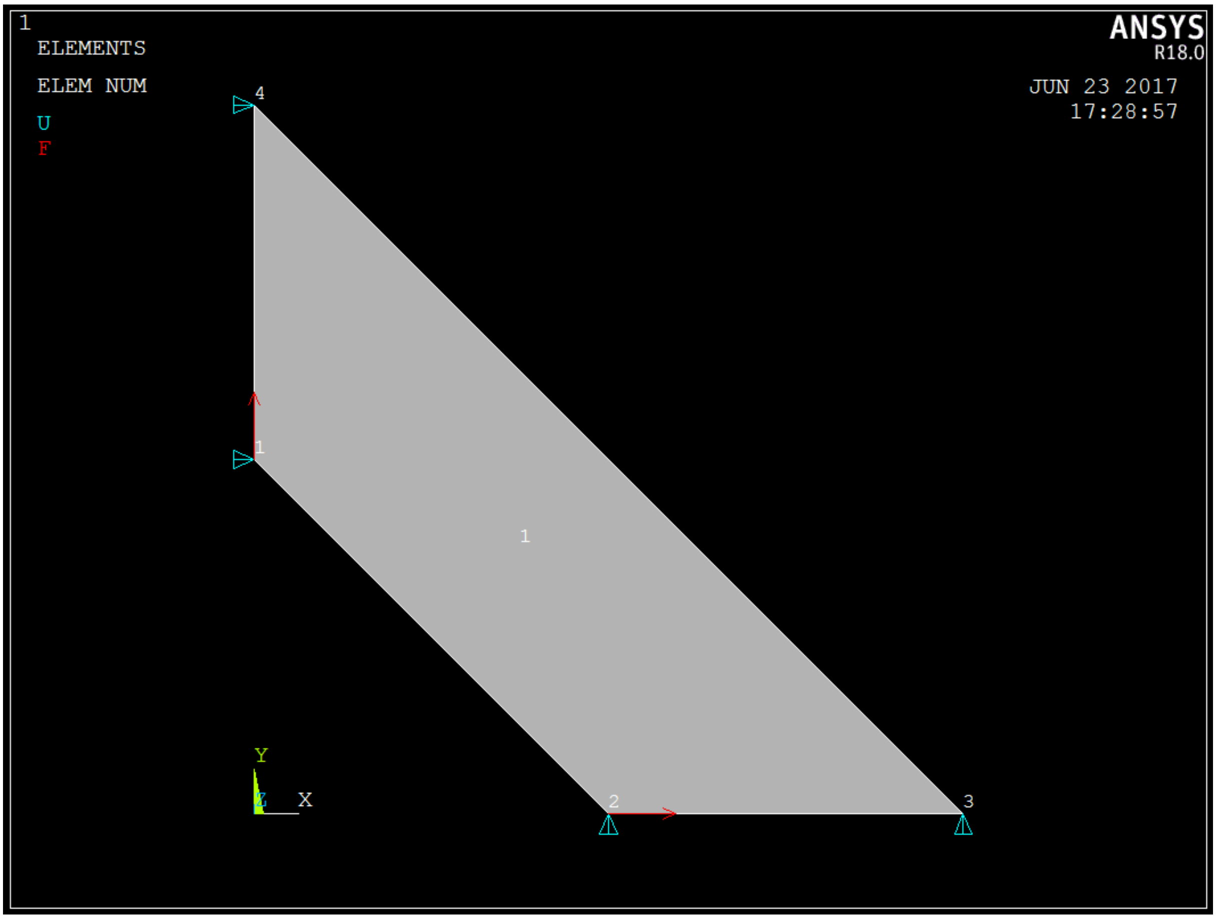
محاسبه تنش در نقاط گوسی:

$$\sigma_{(r_i,s_j)} = D \times B_{(r_i,s_j)} \times d$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.00071189 \\ 0.00071189 \\ 0 \\ 0.00053094 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00053094 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 172663.7396 \\ 41726.1789 \\ -113395.2538 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 41726.1789 \\ 172663.7396 \\ -113395.2538 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} -5116.5697 \\ 83556.8399 \\ -76793.4254 \end{bmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{bmatrix} 83556.8399 \\ -5116.5697 \\ -76793.4254 \end{bmatrix}$$

مدل‌سازی مسئله در نرم‌افزار ANSYS :



نتایج جابه‌جایی گره‌ها در نرم‌افزار ANSYS :

PRNSOL Command

File

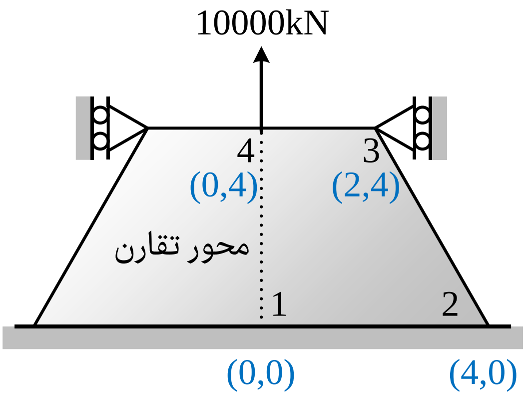
```
PRINT U     NODAL SOLUTION PER NODE

  ***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

  LOAD STEP=     1  SUBSTEP=     1
   TIME=    1.0000      LOAD CASE=   0

  THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

    NODE       UX           UY           UZ          USUM
       1   0.0000       0.71189E-003  0.0000      0.71189E-003
       2  0.71189E-003   0.0000       0.0000      0.71189E-003
       3  0.53094E-003   0.0000       0.0000      0.53094E-003
       4   0.0000       0.53094E-003  0.0000      0.53094E-003

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE          2            1            0            1
VALUE   0.71189E-003 0.71189E-003  0.0000      0.71189E-003
```

جابه‌جایی در مسائل تنش صفحه‌ای (ایزو پارامتریک)

در سازه زیر با فرض تنش صفحه‌ای و با استفاده از یک المان چهارگره‌ای و انتگرال‌گیری گوسی ۲ نقطه‌ای در هر راستا، مطلوب است محاسبه:

الف) جابه‌جایی گره‌ها

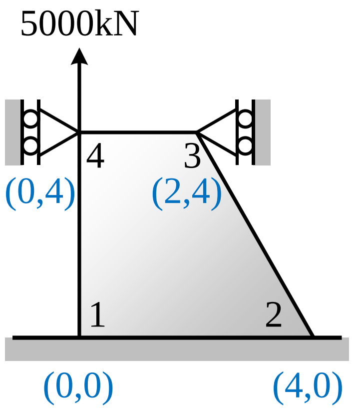
ب) جابه‌جایی نقطه با مختصات x=1m و y=3m



$$E=200\,GPa$$
$$\upsilon=0.3$$
$$t=1\,cm$$

قسمت الف:

پس از تقارن خواهیم داشت (فقط گره ۳ و ۴ در راستای y آزاد هستند):



$$N_1=\frac{(1-r)(1-s)}{4}\quad N_2=\frac{(1+r)(1-s)}{4}\quad N_3=\frac{(1+r)(1+s)}{4}\quad N_4=\frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r :

$$\frac{\partial N_1}{\partial r}=\frac{1}{4}(s-1)\quad \frac{\partial N_2}{\partial r}=-\frac{1}{4}(s-1)\quad \frac{\partial N_3}{\partial r}=\frac{1}{4}(s+1)\quad \frac{\partial N_4}{\partial r}=-\frac{1}{4}(s+1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial r}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} s-1 & -s+1 & s+1 & -s-1\end{bmatrix}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به s :

$$\frac{\partial N_1}{\partial s}=\frac{1}{4}(r-1)\quad \frac{\partial N_2}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_3}{\partial s}=\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_4}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r-1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} r-1 & -r-1 & r+1 & -r+1\end{bmatrix}$$

ماتریس مصالح:

$$D=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}=219780219.78\times\begin{bmatrix}1.00 & 0.30 & 0.00\\ 0.30 & 1.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}219780219.780 & 65934065.934 & 0.000\\ 65934065.934 & 219780219.780 & 0.000\\ 0.000 & 0.000 & 76923076.923\end{bmatrix}$$

جدول گوس ۲ نقطه‌ای:

گوس	r	s	$\frac{\partial N_1}{\partial r}$	$\frac{\partial N_2}{\partial r}$	$\frac{\partial N_3}{\partial r}$	$\frac{\partial N_4}{\partial r}$	$\frac{\partial N_1}{\partial s}$	$\frac{\partial N_2}{\partial s}$	$\frac{\partial N_3}{\partial s}$	$\frac{\partial N_4}{\partial s}$
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.3943	0.3943	0.1057	-0.1057	-0.3943	-0.1057	0.1057	0.3943
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.3943	0.3943	0.1057	-0.1057	-0.1057	-0.3943	0.3943	0.1057
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.1057	0.1057	0.3943	-0.3943	-0.1057	-0.3943	0.3943	0.1057
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.1057	0.1057	0.3943	-0.3943	-0.3943	-0.1057	0.1057	0.3943

محاسبه ژاکوبین:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r}\\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix}$$

$$J_1=\begin{pmatrix}1.78868 & 0\\ -0.211325 & 2.0\end{pmatrix}\quad,\quad |J_1|=3.57735$$

$$J_2=\begin{pmatrix}1.78868 & 0\\ -0.788675 & 2.0\end{pmatrix}\quad,\quad |J_2|=3.57735$$

$$J_3=\begin{pmatrix}1.21132 & 0\\ -0.788675 & 2.0\end{pmatrix}\quad,\quad |J_3|=2.42265$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1.21132 & 0 \\ -0.211325 & 2.0 \end{pmatrix} \quad , \quad |J_4| = 2.42265$$

محاسبه ماتریس B :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

توجه: برای سادگی محاسبات می‌توان ماتریس B را فقط برای درجات آزاد ۶ و ۸ نوشت.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.059073 & 0.190927 \\ 0.059073 & -0.059073 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.220463 & 0.0295365 \\ 0.059073 & -0.059073 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.325542 & -0.0755424 \\ 0.325542 & -0.325542 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.0872288 & 0.162771 \\ 0.325542 & -0.325542 \end{pmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی K برای درجات آزاد ۶ و ۸ :

$$K = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i \times w_j \times B^T_{(r_i,s_j)} \times D \times B_{(r_i,s_j)} \times t \times \left|J_{(r_i,s_j)}\right|$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 37039.24356 & 79073.31985 \\ 79073.31985 & 296208.3845 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 391743.5904 & 41594.39568 \\ 41594.39568 & 16461.88602 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 761777.3245 & -328439.3385 \\ -328439.3385 & 227882.9088 \end{pmatrix} \quad K_4 = \begin{pmatrix} 238011.2702 & -121898.7068 \\ -121898.7068 & 338567.6998 \end{pmatrix}$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$
$$K = \begin{pmatrix} 1428571.429 & -329670.3297 \\ -329670.3297 & 879120.8791 \end{pmatrix}$$

حل دستگاه و به دست آوردن جابه‌جایی درجات آزاد:

$$K\Delta = F$$

$$\begin{pmatrix} 1428571.429 & -329670.3297 \\ -329670.3297 & 879120.8791 \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.014368 \\ 0.062263 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \end{matrix}$$

مقایسه با نتایج نرم‌افزار ANSYS :

```
PRNSOL  Command
File

PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

 ***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

 LOAD STEP=     0  SUBSTEP=     1
  TIME=    1.0000      LOAD CASE=   0

 THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

   NODE       UX          UY          UZ          USUM
      1   0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
      2   0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
      3   0.0000     0.14368E-001 0.0000     0.14368E-001
      4   0.0000     0.62263E-001 0.0000     0.62263E-001

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE          0           4           0           4
VALUE    0.0000     0.62263E-001  0.0000     0.62263E-001
```

قسمت ب:

معادله جابه‌جایی برای المان با استفاده از درون‌یابی برابر است با:

$$\Delta x(r,s) = N_1\Delta x_1 + N_2\Delta x_2 + N_3\Delta x_3 + N_4\Delta x_4 = 0$$
$$\Delta y(r,s) = N_1\Delta y_1 + N_2\Delta y_2 + N_3\Delta y_3 + N_4\Delta y_4 \Rightarrow$$
$$\Delta y(r,s) = 0.0191579s - 0.0119737r - 0.0119737rs + 0.0191579$$

مختصات نقطه x=1m و y=3m در المان مادر:

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \Rightarrow 1 = \frac{3r}{2} - \frac{s}{2} - \frac{rs}{2} + \frac{3}{2}$$
$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \Rightarrow 3 = 2s + 2$$

با حل دو معادله فوق مختصات نقطه ذکر شده در المان مادر برابر است با:

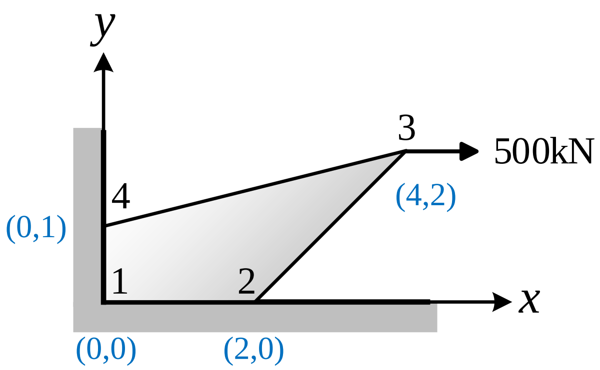
$$r_p = -\frac{1}{5} \qquad , \qquad s_p = \frac{1}{2}$$

با قراردادن مختصات فوق در معادله جابه‌جایی خواهیم داشت:

$$\Delta_{xp} = 0$$
$$\Delta_{yp} = 0.032329\ m$$

جابه‌جایی در مسائل تنش صفحه‌ای تحت بار وزنی (ایزو پارامتریک)

در سازه زیر با فرض تنش صفحه‌ای و اثر نیروی وزن در راستای محور y (به سمت پایین) و با استفاده از یک المان چهارگره‌ای و انتگرال‌گیری گوسی ۲ نقطه‌ای در هر راستا، مطلوب است محاسبه جابه‌جایی گره‌ها:



$E=200\,GPa$

$\upsilon=0.3$

$t=1\,cm$

$\rho=8890\,{kg}/{m^3}$

$g=9.80665\,{m}/{s^2}$

$1N=1\dfrac{kg\times m}{s^2}$

حل: واحدها همگی برحسب کیلو نیوتن و متر می‌باشند.

$$N_1=\frac{(1-r)(1-s)}{4}\quad N_2=\frac{(1+r)(1-s)}{4}\quad N_3=\frac{(1+r)(1+s)}{4}\quad N_4=\frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r :

$$\frac{\partial N_1}{\partial r}=\frac{1}{4}(s-1)\quad \frac{\partial N_2}{\partial r}=-\frac{1}{4}(s-1)\quad \frac{\partial N_3}{\partial r}=\frac{1}{4}(s+1)\quad \frac{\partial N_4}{\partial r}=-\frac{1}{4}(s+1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial r}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}s-1 & -s+1 & s+1 & -s-1\end{bmatrix}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به s :

$$\frac{\partial N_1}{\partial s}=\frac{1}{4}(r-1)\quad \frac{\partial N_2}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_3}{\partial s}=\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_4}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r-1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}r-1 & -r-1 & r+1 & -r+1\end{bmatrix}$$

ماتریس مصالح:

$$D=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}=219780219.78\times\begin{bmatrix}1.00 & 0.30 & 0.00\\ 0.30 & 1.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}219780219.780 & 65934065.934 & 0.000\\ 65934065.934 & 219780219.780 & 0.000\\ 0.000 & 0.000 & 76923076.923\end{bmatrix}$$

جدول گوس ۲ نقطه‌ای برای توابع پایه (محاسبه بردار نیرو):

گوس	r	s	N_1	N_2	N_3	N_4
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.62201	0.16667	0.04466	0.16667
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.16667	0.62201	0.16667	0.04466
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.04466	0.16667	0.62201	0.16667
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.16667	0.04466	0.16667	0.62201

جدول گوس ۲ نقطه‌ای برای مشتقات توابع پایه (محاسبه ژاکوبین و ماتریس سختی):

گوس	r	s	$\frac{\partial N_1}{\partial r}$	$\frac{\partial N_2}{\partial r}$	$\frac{\partial N_3}{\partial r}$	$\frac{\partial N_4}{\partial r}$	$\frac{\partial N_1}{\partial s}$	$\frac{\partial N_2}{\partial s}$	$\frac{\partial N_3}{\partial s}$	$\frac{\partial N_4}{\partial s}$
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.3943	0.3943	0.1057	-0.1057	-0.3943	-0.1057	0.1057	0.3943
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.3943	0.3943	0.1057	-0.1057	-0.1057	-0.3943	0.3943	0.1057
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.1057	0.1057	0.3943	-0.3943	-0.1057	-0.3943	0.3943	0.1057
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.1057	0.1057	0.3943	-0.3943	-0.3943	-0.1057	0.1057	0.3943

محاسبه ژاکوبین:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r}\\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix}$$

$$J_1=\begin{pmatrix}1.21132 & 0.105662\\ 0.211325 & 0.605662\end{pmatrix}\quad,\quad |J_1|=0.711325$$

$$J_2=\begin{pmatrix}1.21132 & 0.105662\\ 0.788675 & 0.894338\end{pmatrix}\quad,\quad |J_2|=1$$

$$J_3=\begin{pmatrix}1.78868 & 0.394338\\ 0.788675 & 0.894338\end{pmatrix}\quad,\quad |J_3|=1.28868$$

$$J_4=\begin{pmatrix}1.78868 & 0.394338\\ 0.211325 & 0.605662\end{pmatrix}\quad,\quad |J_4|=1$$

محاسبه ماتریس B :

$$B=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

توجه: ازآنجاکه فقط درجات ۵ و ۶ از گره سوم آزاد می‌باشند، محاسبه B را برای درجه آزادی ۵ و ۶ ادامه می‌دهیم:

$$B_1=\begin{pmatrix} 0.0742716 & 0 \\ 0 & 0.148543 \\ 0.148543 & 0.0742716 \end{pmatrix} \quad B_2=\begin{pmatrix} 0.0528312 & 0 \\ 0 & 0.394338 \\ 0.394338 & 0.0528312 \end{pmatrix}$$

$$B_3=\begin{pmatrix} 0.153001 & 0 \\ 0 & 0.306002 \\ 0.306002 & 0.153001 \end{pmatrix} \quad B_4=\begin{pmatrix} 0.197169 & 0 \\ 0 & 0.105662 \\ 0.105662 & 0.197169 \end{pmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی K برای درجات آزاد ۵ و ۶ :

$$K=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i \times w_j \times B^T_{(r_i,s_j)} \times D \times B_{(r_i,s_j)} \times t \times \left|J_{(r_i,s_j)}\right|$$

$$K_1=\begin{pmatrix} 20697.27043 & 11211.02148 \\ 11211.02148 & 37513.80265 \end{pmatrix} \qquad K_2=\begin{pmatrix} 125751.381 & 29761.90476 \\ 29761.90476 & 343909.9233 \end{pmatrix}$$

$$K_3=\begin{pmatrix} 159122.9094 & 86191.57592 \\ 86191.57592 & 288410.2733 \end{pmatrix} \qquad K_4=\begin{pmatrix} 94028.83876 & 29761.90476 \\ 29761.90476 & 54441.7251 \end{pmatrix}$$

$$K=K_1+K_2+K_3+K_4=\begin{pmatrix} 399600.3996 & 156926.4069 \\ 156926.4069 & 724275.7243 \end{pmatrix}$$

محاسبه بردار نیرو برای درجات آزاد ۵ و ۶ :

$$bx=0$$

$$by=-\rho g=-8890\times 9.80665=-87181.1185\frac{kg\times m}{m^3\times s^2}=-87181.1185\frac{N}{m^3}=-87.1811185\frac{kN}{m^3}$$

$$\Rightarrow F_B=\begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -87.1811185 \end{Bmatrix}$$

$$F=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i \times w_j \times N^T_{(r_i,s_j)} \times F_B \times t \times \left|J_{(r_i,s_j)}\right|$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02769437886 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1453018642 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.698814942 \end{pmatrix} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1453018642 \end{pmatrix}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.017113049 \end{pmatrix}$$

با توجه به وارد شدن بارگرهی ۵۰۰ کیلو نیوتن در راستای x خواهیم داشت:

$$F = \begin{pmatrix} 500 \\ -1.017113049 \end{pmatrix} kN$$

حل دستگاه:

$$K\Delta = F$$

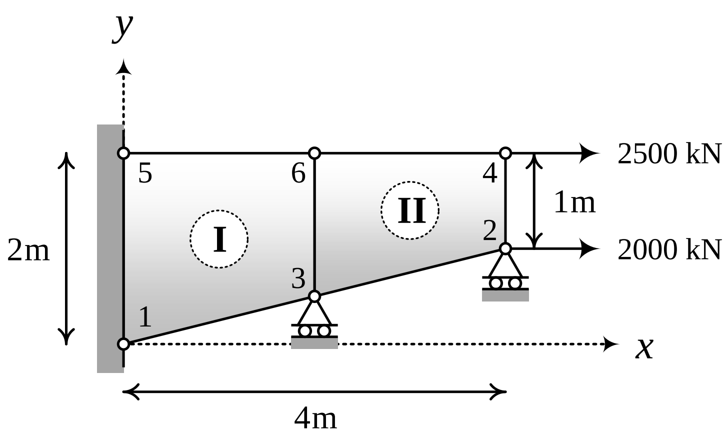
$$\begin{pmatrix} 399600.3996 & 156926.4069 \\ 156926.4069 & 724275.7243 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 500 \\ -1.017113049 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001368219\ m \\ -0.0002978517\ m \end{pmatrix} \begin{matrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{matrix}$$

ایزوپارامتریک دو المان و یک نقطه گوسی

سازه زیر از جنس برنز تحت شرایط تکیه‌گاهی و بارهای متمرکز نشان داده شده در شکل مفروض است. شماره گره‌ها و المان‌ها بر روی شکل مشخص شده است. همچنین سازه تحت شرایط تنش صفحه‌ای است. با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی Gaussian Quadrature و در نظرگرفتن یک نقطه گوسی جهت تقریب انتگرال‌ها مطلوب است تعیین:

الف) جابه‌جایی درجات آزاد سازه

ب) تنش‌ها در نقطه گوسی برای هر المان



$E = 100\ GPa$

$\nu = 0.34$

$t = 2\ cm$

حل: واحدها همگی برحسب کیلو نیوتن و متر می‌باشند.

$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4} \quad N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4} \quad N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \quad N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r :

$$\frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{1}{4}(s-1) \quad \frac{\partial N_2}{\partial r} = -\frac{1}{4}(s-1) \quad \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{1}{4}(s+1) \quad \frac{\partial N_4}{\partial r} = -\frac{1}{4}(s+1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} s-1 & -s+1 & s+1 & -s-1 \end{bmatrix}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به s :

$$\frac{\partial N_1}{\partial s} = \frac{1}{4}(r-1) \quad \frac{\partial N_2}{\partial s} = -\frac{1}{4}(r+1) \quad \frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{1}{4}(r+1) \quad \frac{\partial N_4}{\partial s} = -\frac{1}{4}(r-1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} r-1 & -r-1 & r+1 & -r+1 \end{bmatrix}$$

ماتریس مصالح:

$$D=\begin{bmatrix}113071008.593 & 38444142.922 & 0.000\\ 38444142.922 & 113071008.593 & 0.000\\ 0.000 & 0.000 & 37313432.836\end{bmatrix}$$

جدول گوس ۱ نقطه‌ای:

نقطه گوسی	r	s	w_i	w_j	$\frac{\partial N_1}{\partial r}$	$\frac{\partial N_2}{\partial r}$	$\frac{\partial N_3}{\partial r}$	$\frac{\partial N_4}{\partial r}$	$\frac{\partial N_1}{\partial s}$	$\frac{\partial N_2}{\partial s}$	$\frac{\partial N_3}{\partial s}$	$\frac{\partial N_4}{\partial s}$
GP1	0	0	2	2	-0.25	0.25	0.25	-0.25	-0.25	-0.25	0.25	0.25

ژاکوبین:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r}\\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس B :

$$B=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی K :

$$K=\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{1}w_i\times w_j\times B^T_{(r_i,s_j)}\times D\times B_{(r_i,s_j)}\times t\times\left|J_{(r_i,s_j)}\right|$$

عضو ۱:

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0.125\\ 0 & 0.875\end{bmatrix}\quad,\quad |J|=0.875$$

$$B=\begin{bmatrix}-0.21429 & 0 & 0.285714 & 0 & 0.214286 & 0 & -0.28571 & 0\\ 0 & -0.28571 & 0 & -0.28571 & 0 & 0.285714 & 0 & 0.285714\\ -0.28571 & -0.21429 & -0.28571 & 0.285714 & 0.285714 & 0.214286 & 0.285714 & -0.28571\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix} 576662.144 & 324675.325 & -271370.421 & -48459.004 & -576662.144 & -324675.325 & 271370.421 & 48459.004 \\ 324675.325 & 766056.083 & -59766.105 & 486205.337 & -324675.325 & -766056.083 & 59766.105 & -486205.337 \\ -271370.421 & -59766.105 & 859339.665 & -432900.433 & 271370.421 & 59766.105 & -859339.665 & 432900.433 \\ -48459.004 & 486205.337 & -432900.433 & 859339.665 & 48459.004 & -486205.337 & 432900.433 & -859339.665 \\ -576662.144 & -324675.325 & 271370.421 & 48459.004 & 576662.144 & 324675.325 & -271370.421 & -48459.004 \\ -324675.325 & -766056.083 & 59766.105 & -486205.337 & 324675.325 & 766056.083 & -59766.105 & 486205.337 \\ 271370.421 & 59766.105 & -859339.665 & 432900.433 & -271370.421 & -59766.105 & 859339.665 & -432900.433 \\ 48459.004 & -486205.337 & 432900.433 & -859339.665 & -48459.004 & 486205.337 & -432900.433 & 859339.665 \end{bmatrix}$$

عضو ۲:

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0.125 \\ 0 & 0.625 \end{bmatrix} \quad , \quad |J|=0.625$$

$$B=\begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0.2 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & -0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 \\ -0.4 & -0.2 & -0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix} 524649.480 & 303030.303 & -40705.563 & -70104.025 & -524649.480 & -303030.303 & 40705.563 & 70104.025 \\ 303030.303 & 979194.934 & -81411.126 & 792627.770 & -303030.303 & -979194.934 & 81411.126 & -792627.770 \\ -40705.563 & -81411.126 & 807327.001 & -454545.455 & 40705.563 & 81411.126 & -807327.001 & 454545.455 \\ -70104.025 & 792627.770 & -454545.455 & 1072478.517 & 70104.025 & -792627.770 & 454545.455 & -1072478.517 \\ -524649.480 & -303030.303 & 40705.563 & 70104.025 & 524649.480 & 303030.303 & -40705.563 & -70104.025 \\ -303030.303 & -979194.934 & 81411.126 & -792627.770 & 303030.303 & 979194.934 & -81411.126 & 792627.770 \\ 40705.563 & 81411.126 & -807327.001 & 454545.455 & -40705.563 & -81411.126 & 807327.001 & -454545.455 \\ 70104.025 & -792627.770 & 454545.455 & -1072478.517 & -70104.025 & 792627.770 & -454545.455 & 1072478.517 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده کاهش یافته:

$$K_r=\begin{bmatrix} 807327.001 & -40705.563 & 40705.563 & 81411.126 & -807327.001 & 454545.455 \\ -40705.563 & 1383989.145 & -524649.480 & -303030.303 & 312075.984 & 129870.130 \\ 40705.563 & -524649.480 & 524649.480 & 303030.303 & -40705.563 & -70104.025 \\ 81411.126 & -303030.303 & 303030.303 & 979194.934 & -81411.126 & 792627.770 \\ -807327.001 & 312075.984 & -40705.563 & -81411.126 & 1383989.145 & -129870.130 \\ 454545.455 & 129870.130 & -70104.025 & 792627.770 & -129870.130 & 1838534.600 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{Bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 2500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} kN$$

حل دستگاه:

$$K\Delta = F$$

$$\Delta = \begin{Bmatrix} 0.00495696 \\ 0.00211884 \\ 0.00776571 \\ -0.00187500 \\ 0.00252321 \\ -0.00009250 \end{Bmatrix} m$$

تنش عضو ۱ در نقطه گوسی:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} 128571.429 \\ 41071.429 \\ 3571.429 \end{Bmatrix}$$

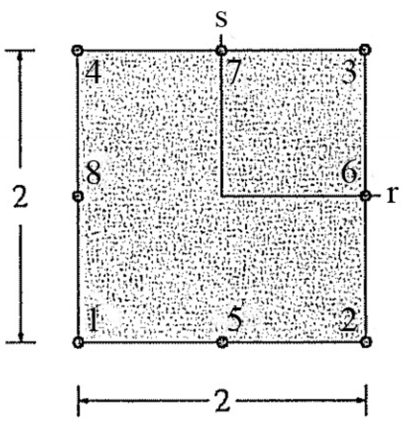
تنش عضو ۲ در نقطه گوسی:

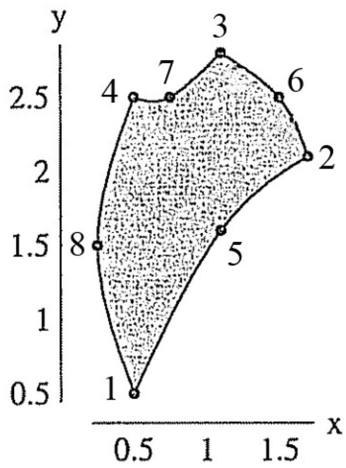
$$\sigma = \begin{Bmatrix} 180000 \\ -17500 \\ 35000 \end{Bmatrix}$$

ژاکوبین در المان ۸ گره‌ای (ایزو پارامتریک)

در سطح زیر با در نظر گرفتن یک المان چهارگوش ۸ گره‌ای مطلوب است تعیین ژاکوبی و دترمینان آن. توابع شکل المان ۸ گره‌ای ایزو پارامتریک به صورت زیر داده شده است:

المان مرجع





$$
N=\begin{pmatrix}
-\dfrac{(r-1)(s-1)(r+s+1)}{4}\\
\dfrac{(r+1)(s-1)(s-r+1)}{4}\\
\dfrac{(r+1)(s+1)(r+s-1)}{4}\\
\dfrac{(r-1)(s+1)(r-s+1)}{4}\\
\dfrac{(r^2-1)(s-1)}{2}\\
-\dfrac{(s^2-1)(r+1)}{2}\\
-\dfrac{(r^2-1)(s+1)}{2}\\
\dfrac{(s^2-1)(r-1)}{2}
\end{pmatrix}
$$

گره	x	y
1	0.5	0.5
2	1.7	2.1
3	1.1	2.8
4	0.5	2.5
5	1.1	1.6
6	1.5	2.5
7	0.75	2.5
8	0.25	1.5

حل:

برای محاسبه ژاکوبین نیاز به مشتقات توابع پایه و مختصات نقاط داریم. با توجه به معلوم بودن مختصات‌ها ابتدا مشتقات توابع پایه را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از عملیات ماتریسی زیر ژاکوبین به دست می‌آید.

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} & \frac{\partial N_5}{\partial r} & \frac{\partial N_6}{\partial r} & \frac{\partial N_7}{\partial r} & \frac{\partial N_8}{\partial r}\\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} & \frac{\partial N_5}{\partial s} & \frac{\partial N_6}{\partial s} & \frac{\partial N_7}{\partial s} & \frac{\partial N_8}{\partial s}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\\ x_5 & y_5\\ x_6 & y_6\\ x_7 & y_7\\ x_8 & y_8\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N}{\partial r}=\begin{pmatrix}-\frac{(2r+s)(s-1)}{4}\\ -\frac{(2r-s)(s-1)}{4}\\ \frac{(2r+s)(s+1)}{4}\\ \frac{(2r-s)(s+1)}{4}\\ r(s-1)\\ \frac{1}{2}-\frac{s^2}{2}\\ -r(s+1)\\ \frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad,\quad \frac{\partial N}{\partial s}=\begin{pmatrix}-\frac{(r+2s)(r-1)}{4}\\ -\frac{(r-2s)(r+1)}{4}\\ \frac{(r+2s)(r+1)}{4}\\ \frac{(r-2s)(r-1)}{4}\\ \frac{r^2}{2}-\frac{1}{2}\\ -s(r+1)\\ \frac{1}{2}-\frac{r^2}{2}\\ s(r-1)\end{pmatrix}$$

با ضرب ماتریسی پارامتری ژاکوبین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J=\begin{pmatrix}0.05r-0.15s+0.05rs-0.175s^2+0.625 & 0.45rs-0.325s-0.15r-0.025s^2+0.5\\ 0.15s-0.15r-0.35rs+0.025r^2-0.175 & 0.225r^2-0.05s-0.05rs-0.325r+0.45\end{pmatrix}$$

محاسبه دترمینان ژاکوبین:

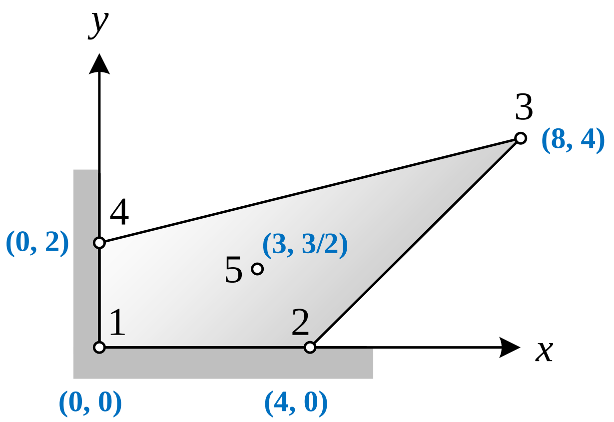
$$|J|=$$
$$0.015r^3+0.11625r^2s^2-0.029375r^2s\ldots$$
$$+0.089375r^2-0.123125rs^2+0.265rs\ldots$$
$$-0.131875r+0.0125s^3-0.026875s^2-0.230625s+0.36875$$

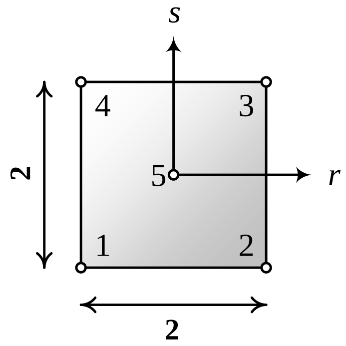
المان چهارگوش ۵ گره‌ای

ورق زیر با ضخامت t تحت اثر بار حجمی F_0 در راستای x قرار دارد. با استفاده از اطلاعات داده شده برای المان چهارگوش ۵ گره‌ای، مطلوب است:

الف) محاسبه ژاکوبین و دترمینان عضو برحسب r و s

ب) محاسبه نیروهای معادل درگره ۳ و ۵ با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی ۲ نقطه‌ای.





$$N_1 = \frac{1}{4}(-r-s+rs)+\frac{1}{8}(r^2+s^2)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(r-s-rs)+\frac{1}{8}(r^2+s^2)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(r+s+rs)+\frac{1}{8}(r^2+s^2)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(-r+s-rs)+\frac{1}{8}(r^2+s^2)$$
$$N_5 = 1-\frac{1}{2}(r^2+s^2)$$

قسمت الف:

$$\frac{\partial N}{\partial r}=\begin{pmatrix}\frac{r}{4}+\frac{s}{4}-\frac{1}{4} & \frac{r}{4}-\frac{s}{4}+\frac{1}{4} & \frac{r}{4}+\frac{s}{4}+\frac{1}{4} & \frac{r}{4}-\frac{s}{4}-\frac{1}{4} & -r\end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial N}{\partial s}=\begin{pmatrix}\frac{r}{4}+\frac{s}{4}-\frac{1}{4} & \frac{s}{4}-\frac{r}{4}-\frac{1}{4} & \frac{r}{4}+\frac{s}{4}+\frac{1}{4} & \frac{s}{4}-\frac{r}{4}+\frac{1}{4} & -s\end{pmatrix}$$

$$x_{r,s}=\sum_{i=1}^{5}N_i x_i=(r+1)(s+3)$$
$$y_{r,s}=\sum_{i=1}^{5}N_i y_i=\frac{(r+3)(s+1)}{2}$$

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}s+3 & \frac{s}{2}+\frac{1}{2}\\ r+1 & \frac{r}{2}+\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\left|J\right|=r+s+4$$

قسمت ب:

$$GP=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$GW=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$$

$$F=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}w_i\times w_j\times N_{(r_i,s_j)}^{T}\times F_B\times t\times\left|J_{(r_i,s_j)}\right|$$

ماتریس N فقط برای گره ۳ و ۵ نیاز است:

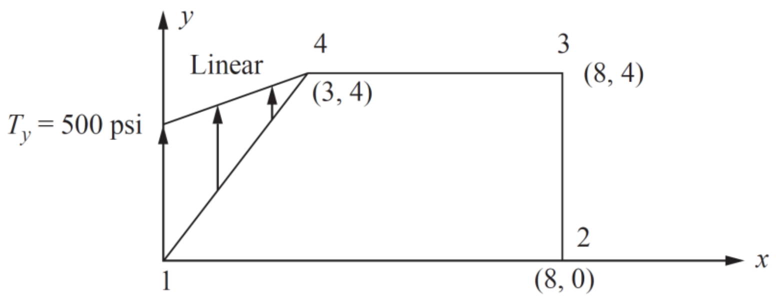
$$N_{(r_i,s_j)}^{T}\times F_B\times t\times\left|J_{(r_i,s_j)}\right|=\begin{pmatrix}N_3 & 0\\ 0 & N_3\\ N_5 & 0\\ 0 & N_5\end{pmatrix}\times\begin{Bmatrix}F_0\\ 0\end{Bmatrix}\times t\times(r+s+4)=\begin{pmatrix}F_0t(r+s+4)\left(\frac{r^2}{8}+\frac{rs}{4}+\frac{r}{4}+\frac{s^2}{8}+\frac{s}{4}\right)\\ 0\\ -F_0t(r+s+4)\left(\frac{r^2}{2}+\frac{s^2}{2}-1\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

حال مختصات نقاط گوسی و وزن آن‌ها را وارد می‌کنیم و نیروها را محاسبه می‌کنیم:

$$F=F_1+F_2+F_3+F_4=\begin{pmatrix}2F_0t\\ 0\\ \frac{32F_0t}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

المان چهارگوش ۴ گره‌ای بار سطحی

ورق با ضخامت 0.1 اینچ تحت اثر بار سطحی نشان داده شده در شکل قرار دارد. مطلوب است محاسبه نیروهای معادل گره‌ای با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی ۲ نقطه‌ای.



درسنامه:

فرمول تبدیل نیروی سطحی به گره‌ای:

$$F_s = h\int_c N_c^T \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} dc = h\int_{-1}^{1} N_c^T \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} J_c da = h\sum_{i=1}^{n} w_i N_c^T(a_i) \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} J_c(a_i)$$

C قسمتی از مرز است که نیروها روی آن وارد شده است. همانند مثال‌های بار سطحی در گذشته بایستی توابع پایه را در یک بعد که ثابت است محاسبه کنیم. برای این منظور r و s مناسب را در توابع پایه N(r, s) قرار می‌دهیم. مثلاً برای ضلع ۱ (side) خواهیم داشت: $r = a, s = -1$

dc در فاصله ضلع المان با طول آن قسمت da در ضلع المان مادر رابطه زیر را دارد:

$$dc = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

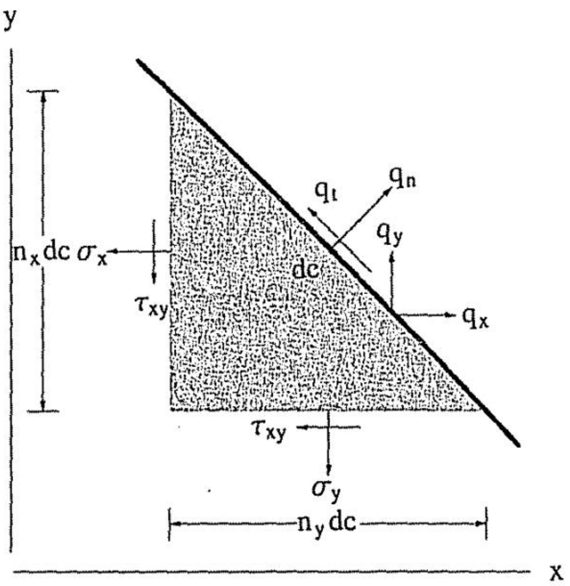
اگر دو سمت رابطه را بر da تقسیم کنیم:

$$\frac{dc}{da} = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2} \Rightarrow dc = J_c da$$

در نتیجه ژاکوبین ضلع المان برابر است با:

$$J_c = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2}$$

اگر نیروها در راستای x و y کلی باشند برای $\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ مشکلی نداریم. ولی در حالت کلی نیروها به مؤلفه نرمال q_n و مؤلفه مماس q_t به سطح همانند شکل زیر معرفی می‌شوند.



بین مؤلفه‌های نیروها در مختصات کلی $\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ و مختصات المان مادر $\begin{pmatrix} q_n \\ q_t \end{pmatrix}$ رابطه زیر بر قرار است :

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ q_t \end{pmatrix}$$

که در این رابطه n_x و n_y مؤلفه‌های یکه نرمال نسبت به مرزی هستند که نیرو روی آن اعمال شده است و به صورت زیر قابل محاسبه هستند :

$$n_x = \frac{dy/da}{J_c} \qquad n_y = \frac{dx/da}{J_c}$$

حل:

$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4} \quad N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4} \quad N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \quad N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r :

$$\frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{1}{4}(s-1) \quad \frac{\partial N_2}{\partial r} = -\frac{1}{4}(s-1) \quad \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{1}{4}(s+1) \quad \frac{\partial N_4}{\partial r} = -\frac{1}{4}(s+1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} s-1 & -s+1 & s+1 & -s-1 \end{bmatrix}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به s :

$$\frac{\partial N_1}{\partial s}=\frac{1}{4}(r-1)\quad \frac{\partial N_2}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_3}{\partial s}=\frac{1}{4}(r+1)\quad \frac{\partial N_4}{\partial s}=-\frac{1}{4}(r-1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} r-1 & -r-1 & r+1 & -r+1\end{bmatrix}$$

در اینجا نیرو روی ضلع ۴ وارد شده است. پس $r=-1, s=a$

در نتیجه ژاکوبین ضلع المان در این مسئله برابر است با:

$$J_c=\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2}\xrightarrow{a=s} J_c=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

یادآوری روابط گذشته:

$$x(r,s)=\sum_{i=1}^{4}N_i(r,s)x_i=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}\Rightarrow \frac{dx}{ds}=\begin{bmatrix}\frac{dN_1}{ds} & \frac{dN_2}{ds} & \frac{dN_3}{ds} & \frac{dN_4}{ds}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}$$

$$y(r,s)=\sum_{i=1}^{4}N_i(r,s)y_i=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{Bmatrix}\Rightarrow \frac{dy}{ds}=\begin{bmatrix}\frac{dN_1}{ds} & \frac{dN_2}{ds} & \frac{dN_3}{ds} & \frac{dN_4}{ds}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{Bmatrix}$$

در ادامه با قرار دادن r = -1 و s با توجه به جدول گوس ۲ نقطه‌ای خواهیم داشت:

- $s=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$N(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})=\begin{bmatrix}0.788675 & 0 & 0 & 0.211325\end{bmatrix}$$

$$\frac{dN}{da}(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{dN}{ds}(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{da}=\frac{dx}{ds}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\8\\8\\3\end{Bmatrix}=1.5$$

$$\frac{dy}{da}=\frac{dy}{ds}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\4\\4\end{Bmatrix}=2$$

$$J_c(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})=\sqrt{1.5^2+2^2}=2.5$$

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -250s+250 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 394.33757 \end{Bmatrix}$$

$$F_s(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.1\times 1\times \begin{bmatrix} 0.788675 & 0 \\ 0 & 0.788675 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.211325 & 0 \\ 0 & 0.211325 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 394.33757 \end{Bmatrix} \times 2.5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 77.751058 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20.833333 \end{bmatrix}$$

- $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$N(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{bmatrix} 0.211325 & 0 & 0 & 0.788675 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dN}{da}(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{dN}{ds}(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{da} = \frac{dx}{ds} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 3 \end{Bmatrix} = 1.5$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{ds} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = 2$$

$$J_c(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{1.5^2 + 2^2} = 2.5$$

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -250s+250 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 105.66243 \end{Bmatrix}$$

$$F_s(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.1\times 1\times \begin{bmatrix} 0.211325 & 0 \\ 0 & 0.211325 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.788675 & 0 \\ 0 & 0.788675 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 105.66243 \end{Bmatrix} \times 2.5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.5822748 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20.833333 \end{bmatrix}$$

نیروی سطحی نهایی:

$$F_s = F_s(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}) + F_s(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 83.333333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 41.666667 \end{bmatrix}$$

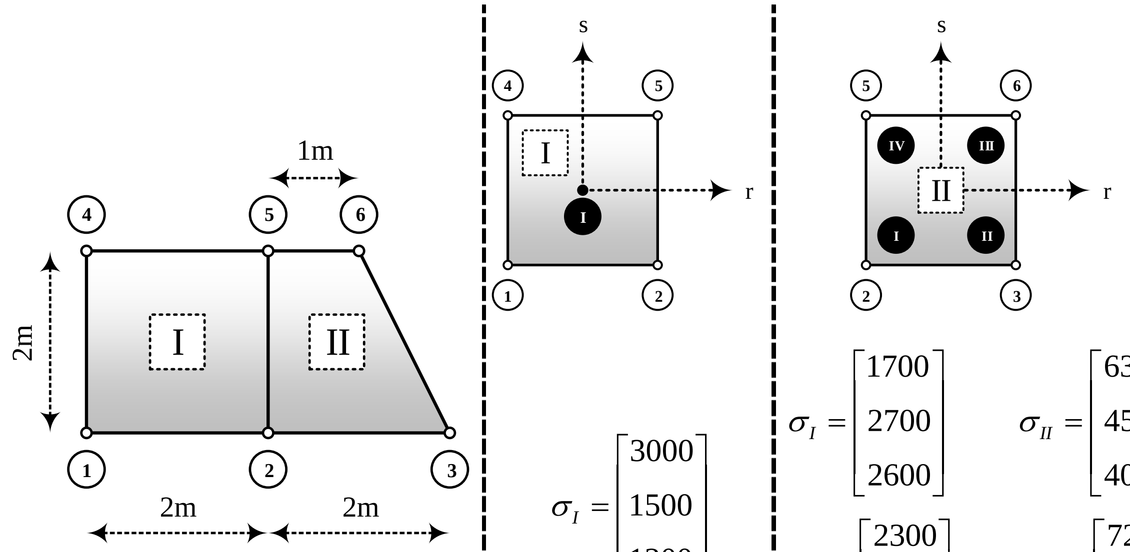
ریکاوری تنش

در سازه زیر تحت شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی خاصی تنش‌ها در نقاط گوسی محاسبه و مشخص شده‌اند. تنش‌ها در المان اول با گوس یک نقطه‌ای و در المان دوم با گوس دو نقطه‌ای محاسبه شده‌اند. مطلوب است:

الف) تعیین ماتریس برونیاب هر المان جهت انتقال تنش‌ها از نقاط گوسی به گره‌ها.

ب) محاسبه تنش درگره‌های هر المان با استفاده از روش برون‌یابی.

ج) متوسط گیری تنش ها درکل سازه.



$$\sigma_I = \begin{bmatrix} 3000 \\ 1500 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_I = \begin{bmatrix} 1700 \\ 2700 \\ 2600 \end{bmatrix} \quad \sigma_{II} = \begin{bmatrix} 6300 \\ 4500 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{III} = \begin{bmatrix} 2300 \\ 4900 \\ 3500 \end{bmatrix} \quad \sigma_{IV} = \begin{bmatrix} 7200 \\ 7500 \\ 5400 \end{bmatrix}$$

حل:

قسمت الف

ماتریس برونیاب گوس ۱ نقطه‌ای به ۴ گره:

$$\sigma(r,s) = a_1$$

$$\{\sigma_I\} = \underset{XG}{[1]}\{a_1\} \rightarrow \{a_1\} = \underset{XG^{-1}}{[1]}\{\sigma_I\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_5 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\underset{X}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \times \underset{XG^{-1}}{[1]}}_{T} \times \{\sigma_I\} \rightarrow T = X \times XG^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس برونیاب گوس ۲ نقطه‌ای به ۴ گره:

$$\sigma(r,s)=a_1+a_2r+a_3s+a_4rs$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_I\\ \sigma_{II}\\ \sigma_{III}\\ \sigma_{IV}\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}}_{XG}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{Bmatrix}=\underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 3 & -3 & 3 & -3\end{bmatrix}}_{XG^{-1}}\begin{Bmatrix}\sigma_I\\ \sigma_{II}\\ \sigma_{III}\\ \sigma_{IV}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_6\\ \sigma_5\end{Bmatrix}=\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}}_{X}\times\underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 3 & -3 & 3 & -3\end{bmatrix}}_{XG^{-1}}}_{T}\times\begin{Bmatrix}\sigma_I\\ \sigma_{II}\\ \sigma_{III}\\ \sigma_{IV}\end{Bmatrix}$$

$$T=X\times XG^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{bmatrix}$$

قسمت ب

تبدیل تنش‌ها برای المان اول:

$$\begin{Bmatrix}\tau_{1xy}\\ \tau_{2xy}\\ \tau_{5xy}\\ \tau_{4xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\times1200=\begin{bmatrix}1200\\ 1200\\ 1200\\ 1200\end{bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\sigma_{1y}\\ \sigma_{2y}\\ \sigma_{5y}\\ \sigma_{4y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\times1500=\begin{bmatrix}1500\\ 1500\\ 1500\\ 1500\end{bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\sigma_{1x}\\ \sigma_{2x}\\ \sigma_{5x}\\ \sigma_{4x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\times3000=\begin{bmatrix}3000\\ 3000\\ 3000\\ 3000\end{bmatrix}$$

تبدیل تنش‌ها برای المان دوم:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{2x}\\ \sigma_{3x}\\ \sigma_{6x}\\ \sigma_{5x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1700\\ 6300\\ 2300\\ 7200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3269.615\\ 10720.58\\ -2230.385\\ 12279.42\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{2y}\\ \sigma_{3y}\\ \sigma_{6y}\\ \sigma_{5y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2700\\ 4500\\ 4900\\ 7500\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-305.2559\\ 5601.924\\ 3505.256\\ 10798.08\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\tau_{2xy}\\ \tau_{3xy}\\ \tau_{6xy}\\ \tau_{5xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2600\\ 4000\\ 3500\\ 5400\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}620.5771\\ 5137.564\\ 2179.423\\ 7562.436\end{bmatrix}$$

قسمت ج

با توجه به اینکه گره ۲ و ۵ مرز مشترک بین دو المان می‌باشد تنش‌های گره ۲ و ۵ را در ۲ المان متوسط می‌گیریم:

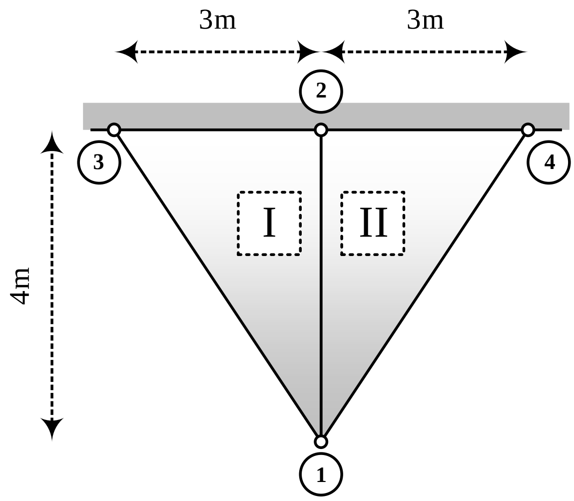
$$\sigma_{2x}=\frac{\overset{(I)}{\sigma_{2x}}+\overset{(II)}{\sigma_{2x}}}{2}=-134.8076 \qquad \sigma_{5x}=\frac{\overset{(I)}{\sigma_{5x}}+\overset{(II)}{\sigma_{5x}}}{2}=7639.711$$

$$\sigma_{2y}=\frac{\overset{(I)}{\sigma_{2y}}+\overset{(II)}{\sigma_{2y}}}{2}=597.3721 \qquad \sigma_{5y}=\frac{\overset{(I)}{\sigma_{5y}}+\overset{(II)}{\sigma_{5y}}}{2}=6149.038$$

$$\tau_{2xy}=\frac{\overset{(I)}{\tau_{2xy}}+\overset{(II)}{\tau_{2xy}}}{2}=910.2886 \qquad \tau_{2xy}=\frac{\overset{(I)}{\tau_{5xy}}+\overset{(II)}{\tau_{5xy}}}{2}=4381.218$$

المان مثلث ۳ گره‌ای ایزوپارامتریک

سازه زیر تحت اثر نیروی وزن خودش قرار دارد و گره ۱ مبدأ مختصات می‌باشد. با توجه به اطلاعات داده شده مطلوب است:



تنش در مختصات

$$\begin{vmatrix} x = 0.25\,m \\ y = 1.65\,m \end{vmatrix}$$

$E = 180Gpa$

$\upsilon = 0.32$

$t = 5\,cm$

$\rho = 7850\ {kg}/{m^3}$

$g = 9.80665\ {m}/{s^2}$

حل: با استفاده از تقارن محاسبات را فقط برای عضو ۲ انجام می‌دهیم و چون نیرویی در راستای x نداریم سازه تنها یک درجه آزادی دارد Δ_{1y}. از طرفی چون المان مثلثی است تنش در تمامی نقاط المان یکسان است!

ماتریس مصالح:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200534759.36 & 64171122.995 & 0 \\ 64171122.995 & 200534759.36 & 0 \\ 0 & 0 & 68181818.182 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = r_1 \qquad N_2 = r_2 \qquad N_3 = r_3 = 1 - r_1 - r_2$$

$$N = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & 1-r_1-r_2 \end{bmatrix}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r_1:

$$\frac{\partial N_1}{\partial r_1} = 1 \qquad \frac{\partial N_2}{\partial r_1} = 0 \qquad \frac{\partial N_3}{\partial r_1} = -1$$

$$\frac{\partial N}{\partial r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r_2:

$$\frac{\partial N_1}{\partial r_2} = 0 \qquad \frac{\partial N_2}{\partial r_2} = 1 \qquad \frac{\partial N_3}{\partial r_2} = -1$$

$$\frac{\partial N}{\partial r_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جدول گوس ۱ نقطه‌ای:

گوس	r_1	r_2	w	N_1	N_2	N_3	$\frac{\partial N_1}{\partial r}$	$\frac{\partial N_2}{\partial r}$	$\frac{\partial N_3}{\partial r}$	$\frac{\partial N_1}{\partial s}$	$\frac{\partial N_2}{\partial s}$	$\frac{\partial N_3}{\partial s}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	-1	0	1	-1

محاسبه ژاکوبین:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r_1} & \frac{\partial y}{\partial r_1}\\ \frac{\partial x}{\partial r_2} & \frac{\partial y}{\partial r_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r_1} & \frac{\partial N_2}{\partial r_1} & \frac{\partial N_3}{\partial r_1}\\ \frac{\partial N_1}{\partial r_2} & \frac{\partial N_2}{\partial r_2} & \frac{\partial N_3}{\partial r_2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{bmatrix}$$

$$J_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 3 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad |J_1|=12$$

محاسبه ماتریس B :

$$B=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x}\end{bmatrix}$$

توجه: برای سادگی محاسبات می‌توان ماتریس B را فقط برای درجه آزاد (۲) نوشت.

$$B_{\text{reduced}}=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی K برای درجات آزاد درجه آزاد (۲):

$$K=\sum_{i=1}^{n} w_i\times B^T_{(r_{1i},r_{2i})}\times D\times B_{(r_{1i},r_{2i})}\times t\times\left|J_{(r_{1i},r_{2i})}\right|$$

$$K_{\text{reduced}}=3760026.738\frac{kN}{m}$$

تبدیل نیرو حجمی به گره‌ای:

$$F=\sum_{i=1}^{n} w_i\times N^T_{(r_{1i},r_{2i})}\times F_B\times t\times\left|J_{(r_{1i},r_{2i})}\right|$$

$$F_{\text{reduced}}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ -76.9822025\end{bmatrix}\times 0.05\times 12=-7.69822025$$

روش ۲ : تبدیل نیرو حجمی به گره‌ای با استفاده از روابط اثبات شده آماده

$$F_{\text{reduced}}=F_{1By}=-\frac{tA}{3}\frac{\rho g}{1000}=-\frac{0.05\times 6}{3}\times\frac{7850\times 9.80665}{1000}=-7.69822025\,kN$$

حل دستگاه و به دست آوردن جابه‌جایی درجات آزاد:

$$\Delta_{1y}=\frac{F_{\text{reduced}}}{K_{\text{reduced}}}=-2.047384\times 10^{-6}\ m$$

تنش در المان:

$$\sigma=D\times\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}\times\left(-2.047384\times 10^{-6}\right)=\begin{bmatrix}32.8457\\ 102.643\\ 0\end{bmatrix}$$

ضمیمه: ماتریس B و K و F کامل

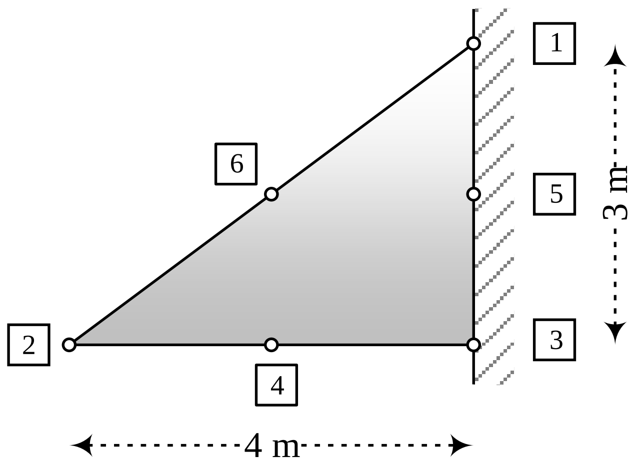
$$B_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$K_1=\begin{bmatrix}1278409.091 & 0 & 0 & -1704545.455 & -1278409.091 & 1704545.455\\ 0 & 3760026.738 & -1604278.075 & 0 & 1604278.075 & -3760026.738\\ 0 & -1604278.075 & 6684491.979 & 0 & -6684491.979 & 1604278.075\\ -1704545.455 & 0 & 0 & 2272727.273 & 1704545.455 & -2272727.273\\ -1278409.091 & 1604278.075 & -6684491.979 & 1704545.455 & 7962901.07 & -3308823.529\\ 1704545.455 & -3760026.738 & 1604278.075 & -2272727.273 & -3308823.529 & 6032754.011\end{bmatrix}$$

$$F=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ -76.9822025\end{bmatrix}\times 0.05\times 12=\begin{bmatrix}0\\ -7.69822025\\ 0\\ -7.69822025\\ 0\\ -7.69822025\end{bmatrix}$$

المان مثلث ۶ گره‌ای ایزوپارامتریک

سازه زیر تحت اثر نیروی وزن خودش قرار دارد و گره ۲ مبدأ مختصات می‌باشد. با توجه به اطلاعات داده شده مطلوب است تعیین جابه‌جایی گره‌های آزاد.



$$E = 75Gpa$$
$$\upsilon = 0.33$$
$$t = 1cm$$
$$\rho = 2710 \, {}^{kg}\!/_{m^3}$$
$$g = 9.80665 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$N = \left[r_1(2r_1-1) \quad r_2(2r_2-1) \quad -r_3(r_1+r_2-r_3) \quad 4r_2r_3 \quad 4r_1r_3 \quad 4r_1r_2 \right]$$
$$r_3 = 1 - r_1 - r_2$$
$$N = \left[r_1(2r_1-1) \quad r_2(2r_2-1) \quad (2r_1+2r_2-1)(r_1+r_2-1) \quad -4r_2(r_1+r_2-1) \quad -4r_1(r_1+r_2-1) \quad 4r_1r_2 \right]$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r_1:

$$\frac{\partial N}{\partial r_1} = \left[4r_1-1 \quad 0 \quad 4r_1+4r_2-3 \quad -4r_2 \quad 4-4r_2-8r_1 \quad 4r_2 \right]$$

مشتقات توابع شکل نسبت به r_2:

$$\frac{\partial N}{\partial r_2} = \left[0 \quad 4r_2-1 \quad 4r_1+4r_2-3 \quad 4-8r_2-4r_1 \quad -4r_1 \quad 4r_1 \right]$$

جدول گوس ۳ نقطه‌ای برای Nها :

گوس	r_1	r_2	w_i	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	1
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	1	0	0
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	1	0

جدول گوس ۳ نقطه‌ای برای $\frac{\partial N}{\partial r_1}$ ها :

گوس	r_1	r_2	w_i	$\frac{\partial N_1}{\partial r_1}$	$\frac{\partial N_2}{\partial r_1}$	$\frac{\partial N_3}{\partial r_1}$	$\frac{\partial N_4}{\partial r_1}$	$\frac{\partial N_5}{\partial r_1}$	$\frac{\partial N_6}{\partial r_1}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	0	1	-2	-2	2
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	-1	0	-1	-2	2	2
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	1	0	-1	0	0	0

جدول گوس ۳ نقطه‌ای برای $\frac{\partial N}{\partial r_2}$ ها :

گوس	r_1	r_2	w_i	$\frac{\partial N_1}{\partial r_2}$	$\frac{\partial N_2}{\partial r_2}$	$\frac{\partial N_3}{\partial r_2}$	$\frac{\partial N_4}{\partial r_2}$	$\frac{\partial N_5}{\partial r_2}$	$\frac{\partial N_6}{\partial r_2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	1	1	-2	-2	2
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	1	-1	0	0	0
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	0	-1	-1	2	-2	2

ماتریس مصالح:

$$D=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}84165637.976 & 27774660.532 & 0\\ 27774660.532 & 84165637.976 & 0\\ 0 & 0 & 28195488.722\end{bmatrix}$$

درجات آزاد: [۳,۴,۷,۸,۱۱,۱۲]

محاسبه ژاکوبین:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r_1} & \frac{\partial y}{\partial r_1}\\ \frac{\partial x}{\partial r_2} & \frac{\partial y}{\partial r_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r_1} & \frac{\partial N_2}{\partial r_1} & \frac{\partial N_3}{\partial r_1} & \frac{\partial N_4}{\partial r_1} & \frac{\partial N_5}{\partial r_1} & \frac{\partial N_6}{\partial r_1}\\ \frac{\partial N_1}{\partial r_2} & \frac{\partial N_2}{\partial r_2} & \frac{\partial N_3}{\partial r_2} & \frac{\partial N_4}{\partial r_2} & \frac{\partial N_5}{\partial r_2} & \frac{\partial N_6}{\partial r_6}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\\ x_5 & y_5\\ x_6 & y_6\end{bmatrix}$$

$$J_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\\ 4 & 0\\ 2 & 0\\ 4 & \frac{3}{2}\\ 2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -4 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad |J_1|=12$$

$$J_2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\\ 4 & 0\\ 2 & 0\\ 4 & \frac{3}{2}\\ 2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -4 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad |J_2|=12$$

$$J_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\\ 4 & 0\\ 2 & 0\\ 4 & \frac{3}{2}\\ 2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -4 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad |J_3|=12$$

محاسبه ماتریس B :

$$B=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x}\end{bmatrix}$$

توجه: برای سادگی محاسبات می‌توان ماتریس B را فقط برای درجات آزاد [۳,۴,۷,۸,۱۱,۱۲] نوشت.

$$B_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی K برای درجات آزاد درجه آزاد (۲):

$$K=\sum_{i=1}^{n} w_i \times B^T_{(r_{1i},r_{2i})}\times D\times B_{(r_{1i},r_{2i})}\times t\times\left|J_{(r_{1i},r_{2i})}\right|$$

$$K_1=\begin{bmatrix}105207.047 & 0 & -210414.095 & 92582.2018 & 210414.095 & -92582.2018\\ 0 & 35244.3609 & 93984.9624 & -70488.7218 & -93984.9624 & 70488.7218\\ -210414.095 & 93984.9624 & 671454.756 & -373134.328 & -671454.756 & 373134.328\\ 92582.2018 & -70488.7218 & -373134.328 & 889116.448 & 373134.328 & -889116.448\\ 210414.095 & -93984.9624 & -671454.756 & 373134.328 & 671454.756 & -373134.328\\ -92582.2018 & 70488.7218 & 373134.328 & -889116.448 & -373134.328 & 889116.448\end{bmatrix}$$

$$K_2=\begin{bmatrix}105207.047 & 0 & 0 & 92582.2018 & 0 & -92582.2018\\ 0 & 35244.3609 & 93984.9624 & 0 & -93984.9624 & 0\\ 0 & 93984.9624 & 250626.566 & 0 & -250626.566 & 0\\ 92582.2018 & 0 & 0 & 748139.004 & 0 & -748139.004\\ 0 & -93984.9624 & -250626.566 & 0 & 250626.566 & 0\\ -92582.2018 & 0 & 0 & -748139.004 & 0 & 748139.004\end{bmatrix}$$

$$K_3=\begin{bmatrix}105207.047 & 0 & -210414.095 & 0 & -210414.095 & 0\\ 0 & 35244.3609 & 0 & -70488.7218 & 0 & -70488.7218\\ -210414.095 & 0 & 420828.19 & 0 & 420828.19 & 0\\ 0 & -70488.7218 & 0 & 140977.444 & 0 & 140977.444\\ -210414.095 & 0 & 420828.19 & 0 & 420828.19 & 0\\ 0 & -70488.7218 & 0 & 140977.444 & 0 & 140977.444\end{bmatrix}$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

$$K_{\text{reduced}} = \begin{bmatrix} 315621.142 & 0 & -420828.19 & 185164.404 & 0 & -185164.404 \\ 0 & 105733.083 & 187969.925 & -140977.444 & -187969.925 & 0 \\ -420828.19 & 187969.925 & 1342909.51 & -373134.328 & -501253.133 & 373134.328 \\ 185164.404 & -140977.444 & -373134.328 & 1778232.9 & 373134.328 & -1496278.01 \\ 0 & -187969.925 & -501253.133 & 373134.328 & 1342909.51 & -373134.328 \\ -185164.404 & 0 & 373134.328 & -1496278.01 & -373134.328 & 1778232.9 \end{bmatrix}$$

تبدیل نیرو حجمی به گره‌ای:

$$F = \sum_{i=1}^{n} w_i \times N^T_{(r_{1i},r_{2i})} \times F_B \times t \times \left| J_{(r_{1i},r_{2i})} \right|$$

$$bx = 0$$

$$by = -\rho g = -2710 \times 9.80665 = -26576.02 \frac{kg \times m}{m^3 \times s^2} = -26576.02 \frac{N}{m^3} = -26.57602 \frac{kN}{m^3}$$

$$\Rightarrow F_B = \begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -26.57602 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -26.57602 \end{bmatrix} \times 0.01 \times 12 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.53152043 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -26.57602 \end{bmatrix} \times 0.01 \times 12 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.53152043 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -26.57602 \end{bmatrix} \times 0.01 \times 12 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

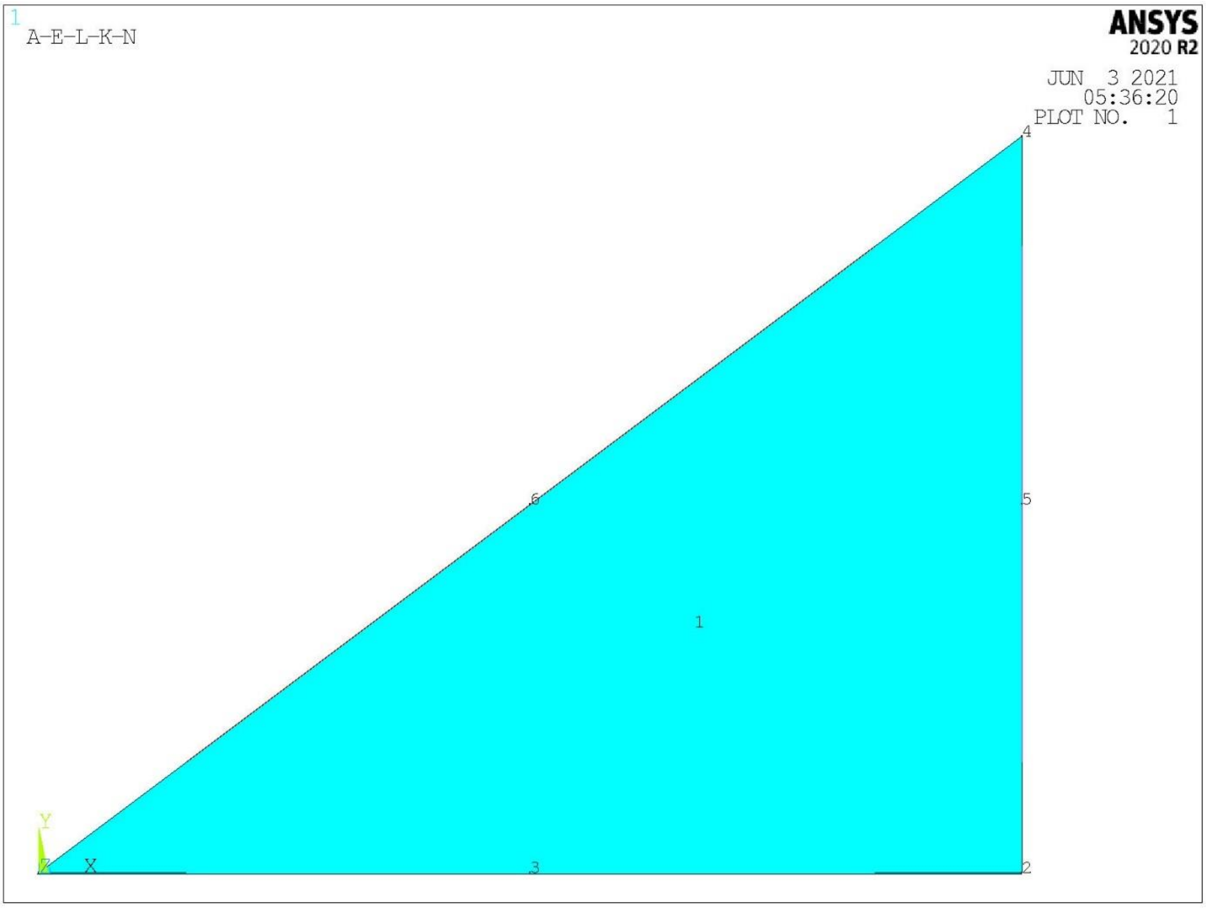
$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$F_{\text{reduced}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.53152043 \\ 0 \\ -0.53152043 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه و به دست آوردن جابه‌جایی درجات آزاد:

$$\Delta_{\text{reduced}} = K_{\text{reduced}}^{-1} \times F_{\text{reduced}} = \begin{bmatrix} 3.5347E-06 \\ -1.2941E-05 \\ 2.5677E-06 \\ -5.2151E-06 \\ -8.0037E-07 \\ -5.0258E-06 \end{bmatrix} m$$

مقایسه با نتایج نرم‌افزار ANSYS :



PRNSOL Command

File

```
PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

 ***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

 LOAD STEP=     1  SUBSTEP=     1
  TIME=    1.0000      LOAD CASE=   0

 THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

   NODE       UX           UY          UZ          USUM
      1  0.35347E-005-0.12941E-004  0.0000      0.13415E-004
      2   0.0000       0.0000       0.0000       0.0000
      3  0.25677E-005-0.52151E-005  0.0000      0.58129E-005
      4   0.0000       0.0000       0.0000       0.0000
      5   0.0000       0.0000       0.0000       0.0000
      6 -0.80037E-006-0.50258E-005  0.0000      0.50891E-005

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE            1            1           0            1
VALUE   0.35347E-005-0.12941E-004  0.0000      0.13415E-004
```