تحلیل سازه‌ها ۲

اجزاء محدود – یک بعدی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده فنی و مهندسی

بخش عمران

سعید شجاعی

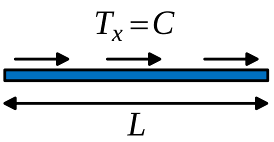
علیرضا قربی

وب سایت :

www.ghorbi.com

بارگذاری مستطیلی گسترده

مطلوب است تعیین بار گره‌ای المان میله زیر با :

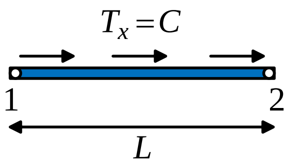


الف : یک المان دو گره‌ای

ب : یک المان سه گره‌ای

ج : یک المان چهار گره‌ای

قسمت الف :

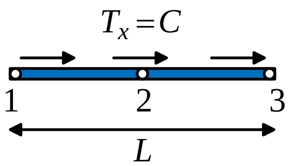


$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e} \{N\}^T \times \{T_x\}\, dx$$

$$= \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{x - x_e}{x_e - x_s} \\ \dfrac{x - x_s}{x_e - x_s} \end{pmatrix} \times \{C\}\, dx = \begin{pmatrix} \dfrac{C(x_e - x_s)}{2} \\ \dfrac{C(x_e - x_s)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[x_e = L]{x_s = 0} \begin{pmatrix} \dfrac{CL}{2} \\ \dfrac{CL}{2} \end{pmatrix}$$

قسمت ب :

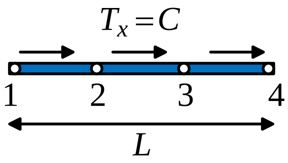


$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e} \{N\}^T \times \{T_x\}\, dx$$

$$= \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{(x - x_e)(x_e - 2x + x_s)}{(x_e - x_s)^2} \\ -\dfrac{4(x - x_e)(x - x_s)}{(x_e - x_s)^2} \\ -\dfrac{(x - x_s)(x_e - 2x + x_s)}{(x_e - x_s)^2} \end{pmatrix} \times \{C\}\, dx = \begin{pmatrix} \dfrac{C(x_e - x_s)}{6} \\ \dfrac{2C(x_e - x_s)}{3} \\ \dfrac{C(x_e - x_s)}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[x_e = L]{x_s = 0} \begin{pmatrix} \dfrac{CL}{6} \\ \dfrac{2CL}{3} \\ \dfrac{CL}{6} \end{pmatrix}$$

قسمت ج :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{9(x-x_e)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ -\dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{9(x-x_s)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \end{pmatrix} \times \{C\}\,dx$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{C(x_e-x_s)}{8} \\ \dfrac{3C(x_e-x_s)}{8} \\ \dfrac{3C(x_e-x_s)}{8} \\ \dfrac{C(x_e-x_s)}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[x_e=L]{x_s=0} \begin{pmatrix} \dfrac{CL}{8} \\ \dfrac{3CL}{8} \\ \dfrac{3CL}{8} \\ \dfrac{CL}{8} \end{pmatrix}$$

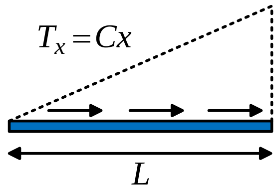
بارگذاری مثلثی گسترده

مطلوب است تعیین بار گره‌ای المان میله زیر با :

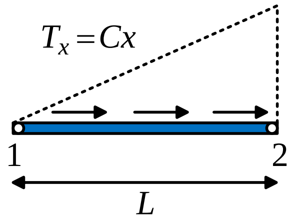
الف : یک المان دو گره‌ای

ب : یک المان سه گره‌ای

ج : یک المان چهار گره‌ای



قسمت الف :

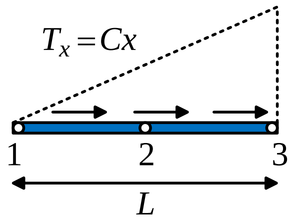


$$\begin{Bmatrix} f_{1x}\\ f_{2x}\end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e}\{N\}^T\times\{T_x\}\,dx$$

$$= \int_{x_s}^{x_e}\begin{pmatrix} -\dfrac{x-x_e}{x_e-x_s}\\ \dfrac{x-x_s}{x_e-x_s}\end{pmatrix}\times\{Cx\}\,dx = \begin{pmatrix}\dfrac{C(x_e-x_s)(x_e+2x_s)}{6}\\ \dfrac{C(x_e-x_s)(2x_e+x_s)}{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[x_e=L]{x_s=0}\begin{Bmatrix}\dfrac{CL^2}{6}\\ \dfrac{CL^2}{3}\end{Bmatrix}$$

قسمت ب :

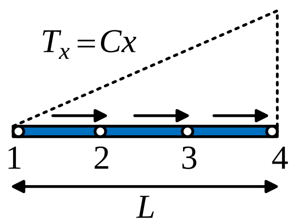


$$\begin{Bmatrix} f_{1x}\\ f_{2x}\\ f_{3x}\end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e}\{N\}^T\times\{T_x\}\,dx$$

$$= \int_{x_s}^{x_e}\begin{pmatrix} -\dfrac{(x-x_e)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2}\\ -\dfrac{4(x-x_e)(x-x_s)}{(x_e-x_s)^2}\\ -\dfrac{(x-x_s)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2}\end{pmatrix}\times\{Cx\}\,dx = \begin{pmatrix}\dfrac{Cx_s(x_e-x_s)}{6}\\ \dfrac{C(x_e^2-x_s^2)}{3}\\ \dfrac{Cx_e(x_e-x_s)}{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[x_e=L]{x_s=0}\begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{CL^2}{3}\\ \dfrac{CL^2}{6}\end{Bmatrix}$$

قسمت ج :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{9(x-x_e)\left(\frac{x_e}{3}-x+\frac{2x_s}{3}\right)\left(\frac{2x_e}{3}-x+\frac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ -\dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\frac{2x_e}{3}-x+\frac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\frac{x_e}{3}-x+\frac{2x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{9(x-x_s)\left(\frac{x_e}{3}-x+\frac{2x_s}{3}\right)\left(\frac{2x_e}{3}-x+\frac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \end{pmatrix} \times \{Cx\}\, dx$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{C\left(2x_e^{\,2}+11x_e x_s-13x_s^{\,2}\right)}{120} \\ \dfrac{3C\left(x_e^{\,2}+3x_e x_s-4x_s^{\,2}\right)}{40} \\ -\dfrac{3C\left(-4x_e^{\,2}+3x_e x_s+x_s^{\,2}\right)}{40} \\ -\dfrac{C\left(-13x_e^{\,2}+11x_e x_s+2x_s^{\,2}\right)}{120} \end{pmatrix} \xrightarrow[x_e=L]{x_s=0} \begin{Bmatrix} \dfrac{CL^2}{60} \\ \dfrac{3CL^2}{40} \\ \dfrac{3CL^2}{10} \\ \dfrac{13CL^2}{120} \end{Bmatrix}$$

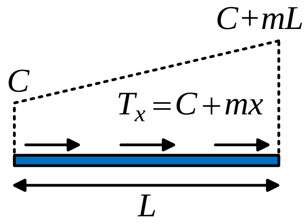
بارگذاری ذوزنقه‌ای گسترده

مطلوب است تعیین بار گره‌ای المان میله زیر با :

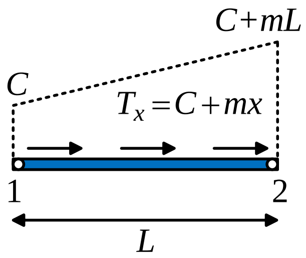
الف : یک المان دو گره‌ای

ب : یک المان سه گره‌ای

ج : یک المان چهار گره‌ای



قسمت الف :

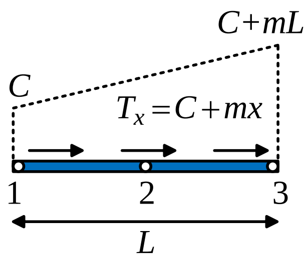


$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \left(\int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{x-x_e}{x_e-x_s} \\ \dfrac{x-x_s}{x_e-x_s} \end{pmatrix} \times C \times dx \right) + \left(\int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{x-x_e}{x_e-x_s} \\ \dfrac{x-x_s}{x_e-x_s} \end{pmatrix} \times (mx) \times dx \right)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{x_e}{2} - \dfrac{x_s}{2} \right) C + \dfrac{(x_e - x_s)(x_e + 2x_s)}{6} m \\ \left(\dfrac{x_e}{2} - \dfrac{x_s}{2} \right) C + \dfrac{(x_e - x_s)(2x_e + x_s)}{6} m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[x_e = L]{x_s = 0} \begin{Bmatrix} \dfrac{CL}{2} \\ \dfrac{CL}{2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{mL^2}{6} \\ \dfrac{mL^2}{3} \end{Bmatrix}$$

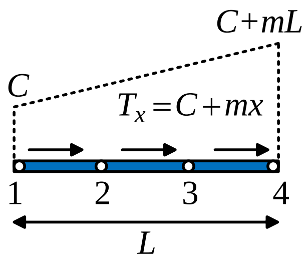
قسمت ب :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{(x-x_e)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2} \\ -\dfrac{4(x-x_e)(x-x_s)}{(x_e-x_s)^2} \\ -\dfrac{(x-x_s)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2} \end{pmatrix} \times \{C + mx\} \, dx$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{x_e}{6} - \dfrac{x_s}{6} \right) C + \dfrac{x_s(x_e - x_s)}{6} m \\ \left(\dfrac{2x_e}{3} - \dfrac{2x_s}{3} \right) C + \dfrac{(x_e + x_s)(x_e - x_s)}{3} m \\ \left(\dfrac{x_e}{6} - \dfrac{x_s}{6} \right) C + \dfrac{x_e(x_e - x_s)}{6} m \end{pmatrix} \xrightarrow[x_e = L]{x_s = 0} \begin{Bmatrix} \dfrac{CL}{6} \\ \dfrac{2CL}{3} + \dfrac{mL^2}{3} \\ \dfrac{CL}{6} + \dfrac{mL^2}{6} \end{Bmatrix}$$

قسمت ج :



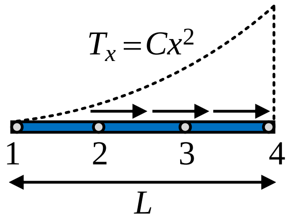
$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{9(x-x_e)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ -\dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{9(x-x_s)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \end{pmatrix} \times \{C+mx\}\,dx$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{x_e}{8}-\dfrac{x_s}{8}\right)C + \dfrac{(2x_e+13x_s)(x_e-x_s)}{120}m \\ \left(\dfrac{3x_e}{8}-\dfrac{3x_s}{8}\right)C + \dfrac{3(x_e-x_s)(x_e+4x_s)}{40}m \\ \left(\dfrac{3x_e}{8}-\dfrac{3x_s}{8}\right)C + \dfrac{3(x_e-x_s)(4x_e+x_s)}{40}m \\ \left(\dfrac{x_e}{8}-\dfrac{x_s}{8}\right)C + \dfrac{(13x_e+2x_s)(x_e-x_s)}{120}m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[x_e=L]{x_s=0} \begin{pmatrix} \dfrac{CL}{8}+\dfrac{mL^2}{60} \\ \dfrac{3CL}{8}+\dfrac{3mL^2}{40} \\ \dfrac{3CL}{8}+\dfrac{3mL^2}{10} \\ \dfrac{CL}{8}+\dfrac{13mL^2}{120} \end{pmatrix}$$

بارگذاری سهمی گسترده

مطلوب است تعیین بار گره‌ای المان میله زیر با یک المان چهار گره‌ای :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{9(x-x_e)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ -\dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{27(x-x_e)(x-x_s)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \\ \dfrac{9(x-x_s)\left(\dfrac{x_e}{3}-x+\dfrac{2x_s}{3}\right)\left(\dfrac{2x_e}{3}-x+\dfrac{x_s}{3}\right)}{2(x_e-x_s)^3} \end{pmatrix} \times \left\{Cx^2\right\} dx =$$

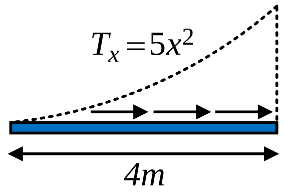
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{C\left(x_e^3+x_e^2x_s+10x_ex_s^2-12x_s^3\right)}{120} \\ \dfrac{3Cx_s\left(2x_e^2+x_ex_s-3x_s^2\right)}{40} \\ -\dfrac{3Cx_e\left(-3x_e^2+x_ex_s+2x_s^2\right)}{40} \\ -\dfrac{C\left(-12x_e^3+10x_e^2x_s+x_ex_s^2+x_s^3\right)}{120} \end{pmatrix} \xrightarrow[x_e=L]{x_s=0} \begin{pmatrix} \dfrac{CL^3}{120} \\ 0 \\ \dfrac{9CL^3}{40} \\ \dfrac{CL^3}{10} \end{pmatrix}$$

بارگذاری سهمی گسترده (عددی)

مطلوب است تعیین بار گره‌ای المان میله زیر با :

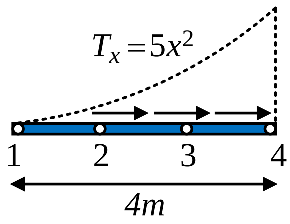
الف : یک المان چهار گره‌ای

ب : دو المان چهار گره‌ای



قسمت الف :

با جایگذاری مختصات گره ابتدا صفر و انتها ۴ در توابع پایه خواهیم داشت :



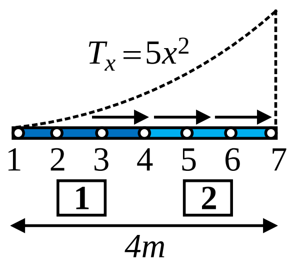
$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = \int_0^4 \begin{pmatrix} -\frac{9x^3}{128}+\frac{9x^2}{16}-\frac{11x}{8}+1 \\ \frac{27x^3}{128}-\frac{45x^2}{32}+\frac{9x}{4} \\ -\frac{27x^3}{128}+\frac{9x^2}{8}-\frac{9x}{8} \\ \frac{9x^3}{128}-\frac{9x^2}{32}+\frac{x}{4} \end{pmatrix} \times \{5x^2\}\,dx = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ 72 \\ 32 \end{pmatrix}$$

انرژی کل برابر است با :

$$F=\frac{8}{3}+0+72+32=\frac{320}{3}$$

قسمت ب :

در المان اول با جایگذاری مختصات گره ابتدا صفر و انتها ۲ در توابع پایه و در المان دوم با جایگذاری مختصات گره ابتدا ۲ و انتها ۴ خواهیم داشت :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(1)} \\ f_{3x}^{(1)} \\ f_{4x}^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_0^2 \begin{pmatrix} -\frac{9x^3}{16}+\frac{9x^2}{4}-\frac{11x}{4}+1 \\ \frac{27x^3}{16}-\frac{45x^2}{8}+\frac{9x}{2} \\ -\frac{27x^3}{16}+\frac{9x^2}{2}-\frac{9x}{4} \\ \frac{9x^3}{16}-\frac{9x^2}{8}+\frac{x}{2} \end{pmatrix} \times \{5x^2\}\,dx = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{4x}^{(2)} \\ f_{5x}^{(1)} \\ f_{6x}^{(1)} \\ f_{7x}^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_2^4 \begin{pmatrix} -\dfrac{9x^3}{16}+\dfrac{45x^2}{8}-\dfrac{37x}{2}+20 \\ \dfrac{27x^3}{16}-\dfrac{63x^2}{4}+\dfrac{189x}{4}-45 \\ -\dfrac{27x^3}{16}+\dfrac{117x^2}{8}-\dfrac{81x}{2}+36 \\ \dfrac{9x^3}{16}-\dfrac{9x^2}{2}+\dfrac{47x}{4}-10 \end{pmatrix} \times \left\{5x^2\right\} dx = \begin{pmatrix} \dfrac{20}{3} \\ 21 \\ 48 \\ \dfrac{53}{3} \end{pmatrix}$$

در نتیجه بردار نیروی برآیند پس از اسمبل کردن به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \\ f_{5x} \\ f_{6x} \\ f_{7x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ 0 \\ 9 \\ \dfrac{32}{3} \\ 21 \\ 48 \\ \dfrac{53}{3} \end{pmatrix}$$

و انرژی کل برابر است با :

$$F = \frac{1}{3}+0+9+\frac{32}{3}+21+48+\frac{53}{3} = \frac{320}{3}$$

مسئله جابجایی و تنش میله با بارگذاری مثلثی

مطلوب است تعیین جابه‌جایی گره‌ها و تنش‌های موجود در میله به طول ۶۰ اینچ با استفاده از :

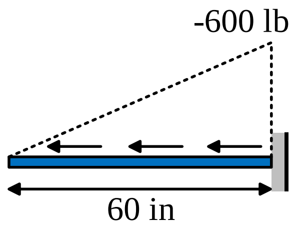
الف : ۱ المان ۲ گره‌ای

ب : ۲ المان ۲ گره‌ای

ج : ۱ المان ۳ گره‌ای

د : ۲ المان ۳ گره‌ای

ه : ۱ المان ۴ گره‌ای



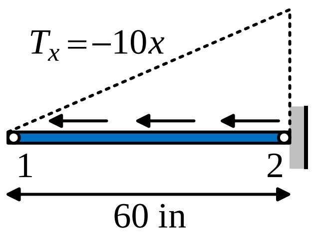
$E = 30\times10^{6}\ psi$

$A = 2\ in^{2}$

$Exact\ \sigma_x = 2.5x^{2}$

شماره گذاری گره‌ها و المان‌ها از چپ به راست است.

قسمت الف :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \int_0^{60} \begin{pmatrix} 1-\dfrac{x}{60} \\ \dfrac{x}{60} \end{pmatrix} \times \{-10x\}\, dx = \begin{Bmatrix} -6000 \\ -12000 \end{Bmatrix} lb$$

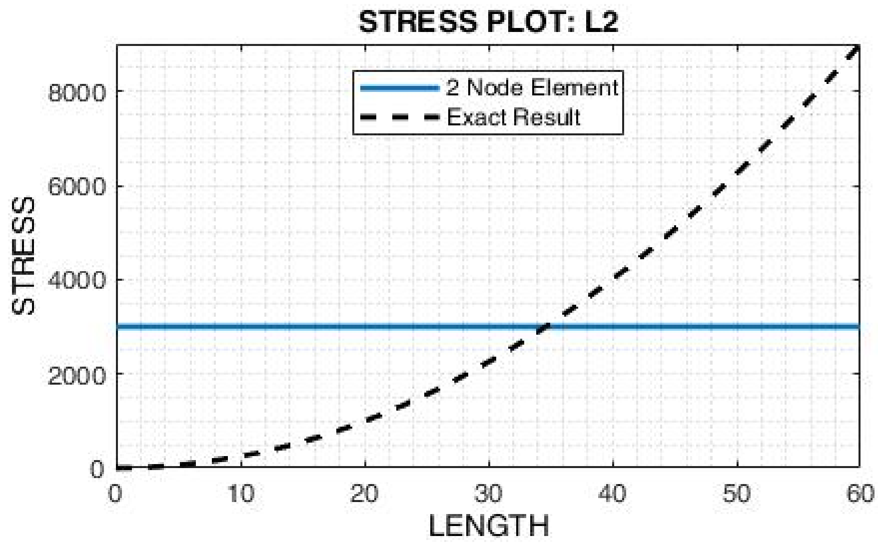
$$K = \frac{30\times10^{6}\times2}{60}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000000 & -1000000 \\ -1000000 & 1000000 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه و محاسبه جابجایی‌های مجهول :

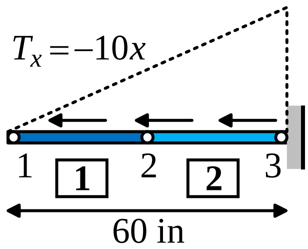
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1000000 & -1000000 \\ -1000000 & 1000000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x}=0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \\ R_{2x}-12000 \end{Bmatrix} \Rightarrow d_{1x} = \frac{-6000}{1000000} = -0.006\ in$$

محاسبه تنش در المان :

$$\{\sigma_x\} = [D]\times\{\varepsilon_x\} = E[B]\{d\} = E\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} = 30\times10^{6}\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{60} & \dfrac{1}{60} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.006 \\ 0 \end{Bmatrix} = 3000\ psi$$



قسمت ب :



$$\left.\begin{array}{l} \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_0^{30} \begin{pmatrix} 1-\dfrac{x}{30} \\ \dfrac{x}{30} \end{pmatrix} \times (-10x)dx = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -3000 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} f_{2x}^{(2)} \\ f_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \int_{30}^{60} \begin{pmatrix} 2-\dfrac{x}{30} \\ \dfrac{x}{30}-1 \end{pmatrix} \times (-10x)dx = \begin{Bmatrix} -6000 \\ -7500 \end{Bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -9000 \\ -7500 \end{Bmatrix} lb$$

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \frac{30\times 10^6 \times 2}{30}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000000 & -2000000 \\ -2000000 & 2000000 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2000000 & -2000000 & 0 \\ -2000000 & 4000000 & -2000000 \\ 0 & -2000000 & 2000000 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه و محاسبه جابجایی‌های مجهول :

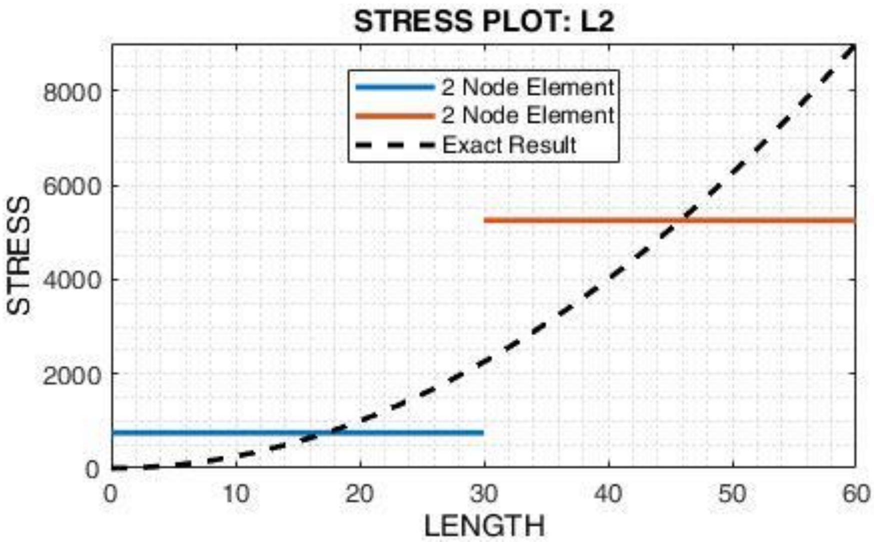
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 2000000 & -2000000 \\ -2000000 & 4000000 \end{bmatrix}\right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} -1500 \\ -9000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.006 \\ -0.00525 \end{Bmatrix} in$$

محاسبه تنش در هر المان :

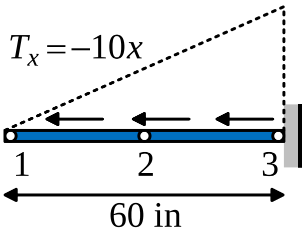
$$\{\sigma_x\}=[D]\times\{\varepsilon_x\}=E[B]\{d\}$$

$$\Rightarrow E\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{1x}\\ d_{2x}\end{Bmatrix}=30\times10^6\begin{bmatrix}-\frac{1}{30} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.006\\ -0.00525\end{Bmatrix}=750\ psi$$

$$\Rightarrow E\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{2x}\\ d_{3x}\end{Bmatrix}=30\times10^6\begin{bmatrix}-\frac{1}{30} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.00525\\ 0\end{Bmatrix}=5250\ psi$$



قسمت ج :



$$\begin{Bmatrix}f_{1x}\\ f_{2x}\\ f_{3x}\end{Bmatrix}=\int_0^{60}\begin{pmatrix}\frac{x^2}{1800}-\frac{x}{20}+1\\ \frac{x}{15}-\frac{x^2}{900}\\ \frac{x^2}{1800}-\frac{x}{60}\end{pmatrix}\times\{-10x\}\,dx=\begin{Bmatrix}0\\ -12000\\ -6000\end{Bmatrix}lb$$

$$K=\begin{pmatrix}\frac{7000000}{3} & -\frac{8000000}{3} & \frac{1000000}{3}\\ -\frac{8000000}{3} & \frac{16000000}{3} & -\frac{8000000}{3}\\ \frac{1000000}{3} & -\frac{8000000}{3} & \frac{7000000}{3}\end{pmatrix}$$

حل دستگاه و محاسبه جابجایی‌های مجهول :

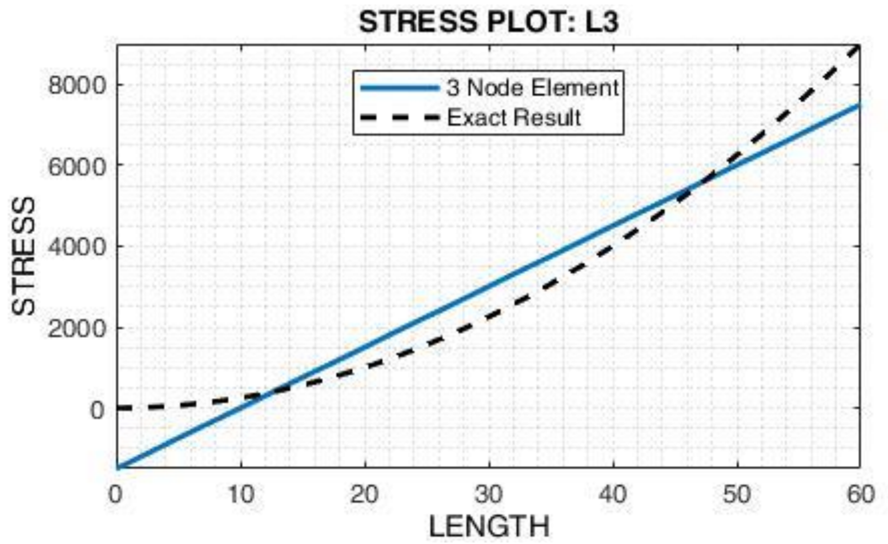
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 2333333.33 & -2666666.67 \\ -2666666.67 & 5333333.33 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -12000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.006 \\ -0.00525 \end{Bmatrix} in$$

محاسبه تنش در المان :

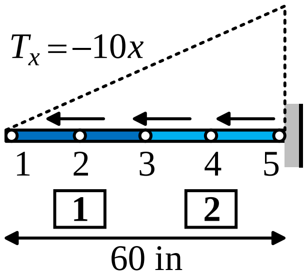
$$\{\sigma_x\} = [D] \times \{\varepsilon_x\} = E[B]\{d\} =$$

$$E\left(\frac{x}{900} - \frac{1}{20} \quad \frac{1}{15} - \frac{x}{450} \quad \frac{x}{900} - \frac{1}{60} \right) \begin{Bmatrix} -0.006 \\ -0.00525 \\ 0 \end{Bmatrix} = 150(x) - 1500 \ psi$$

$$\begin{cases} \sigma_{1x} = 150(0) - 1500 = -1500 \ psi \\ \sigma_{2x} = 150(30) - 1500 = 3000 \ psi \\ \sigma_{3x} = 150(60) - 1500 = 7500 \ psi \end{cases}$$



قسمت د :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(1)} \\ f_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_0^{30} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{450}-\frac{x}{10}+1 \\ \frac{2x}{15}-\frac{x^2}{225} \\ \frac{x^2}{450}-\frac{x}{30} \end{pmatrix} \times \{-10x\}\,dx = \begin{pmatrix} 0 \\ -3000 \\ -1500 \end{pmatrix} lb$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x}^{(2)} \\ f_{4x}^{(2)} \\ f_{5x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \int_{30}^{60} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{450}-\frac{7x}{30}+6 \\ -\frac{x^2}{225}+\frac{2x}{5}-8 \\ \frac{x^2}{450}-\frac{x}{6}+3 \end{pmatrix} \times \{-10x\}\,dx = \begin{pmatrix} -1500.0 \\ -9000.0 \\ -3000.0 \end{pmatrix} lb$$

$$\xrightarrow{Assemble} \begin{Bmatrix} 0 \\ -3000 \\ -3000 \\ -9000 \\ -3000 \end{Bmatrix} lb$$

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{14000000}{3} & -\frac{16000000}{3} & \frac{2000000}{3} \\ -\frac{16000000}{3} & \frac{32000000}{3} & -\frac{16000000}{3} \\ \frac{2000000}{3} & -\frac{16000000}{3} & \frac{14000000}{3} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 4666666.67 & -5333333.33 & 666666.67 & 0.00 & 0.00 \\ -5333333.33 & 10666666.67 & -5333333.33 & 0.00 & 0.00 \\ 666666.67 & -5333333.33 & 9333333.33 & -5333333.33 & 666666.67 \\ 0.00 & 0.00 & -5333333.33 & 10666666.67 & -5333333.33 \\ 0.00 & 0.00 & 666666.67 & -5333333.33 & 4666666.67 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه و محاسبه جابجایی‌های مجهول :

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{4x} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 4666666.67 & -5333333.33 & 666666.67 & 0.00 \\ -5333333.33 & 10666666.67 & -5333333.33 & 0.00 \\ 666666.67 & -5333333.33 & 9333333.33 & -5333333.33 \\ 0.00 & 0.00 & -5333333.33 & 10666666.67 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -3000 \\ -3000 \\ -9000 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.006 \\ -0.00590625 \\ -0.00525 \\ -0.00346875 \end{pmatrix} in$$

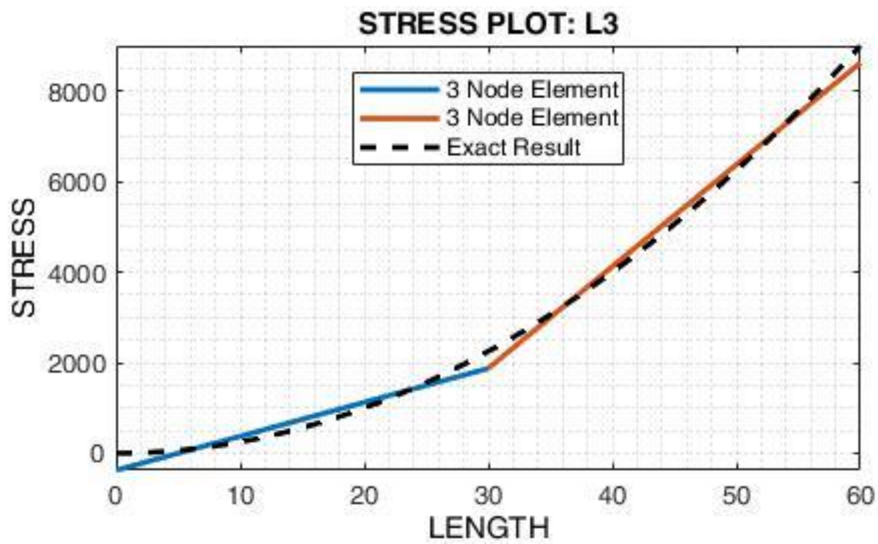
محاسبه تنش در هر المان :

$$\{\sigma_x\} = [D]\times\{\varepsilon_x\} = E[B]\{d\}$$

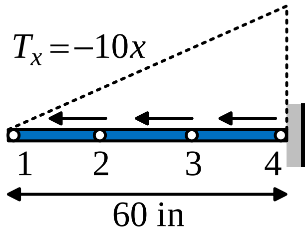
$$\Rightarrow E\begin{pmatrix} \frac{x}{225}-\frac{1}{10} & \frac{2}{15}-\frac{2x}{225} & \frac{x}{225}-\frac{1}{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.006 \\ -0.00590625 \\ -0.00525 \end{pmatrix} = 75(x)-375\ psi$$

$$\Rightarrow E\begin{pmatrix} \frac{x}{225}-\frac{7}{30} & \frac{2}{5}-\frac{2x}{225} & \frac{x}{225}-\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.00525 \\ -0.00346875 \\ 0 \end{pmatrix} = 225(x)-4875\ psi$$

$$\begin{cases} \sigma_{1x} = 75(0)-375 = -375\ psi \\ \sigma_{2x} = 75(15)-375 = 750\ psi \\ \sigma_{3x} = 75(30)-375 = 1875\ psi \\ \sigma_{3x} = 225(30)-4875 = 1875\ psi \\ \sigma_{4x} = 225(45)-4875 = 5250\ psi \\ \sigma_{5x} = 225(60)-4875 = 8625\ psi \end{cases}$$



قسمت ه :



$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = \int_0^{60} \begin{pmatrix} -\dfrac{x^3}{48000} + \dfrac{x^2}{400} - \dfrac{11x}{120} + 1 \\ \dfrac{x^3}{16000} - \dfrac{x^2}{160} + \dfrac{3x}{20} \\ -\dfrac{x^3}{16000} + \dfrac{x^2}{200} - \dfrac{3x}{40} \\ \dfrac{x^3}{48000} - \dfrac{x^2}{800} + \dfrac{x}{60} \end{pmatrix} \times \{-10x\}\, dx = \begin{Bmatrix} -600 \\ -2700 \\ -10800 \\ -3900 \end{Bmatrix} lb$$

$$K = \begin{pmatrix} 3700000 & -4725000 & 1350000 & -325000 \\ -4725000 & 10800000 & -7425000 & 1350000 \\ 1350000 & -7425000 & 10800000 & -4725000 \\ -325000 & 1350000 & -4725000 & 3700000 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3700000 & -4725000 & 1350000 \\ -4725000 & 10800000 & -7425000 \\ 1350000 & -7425000 & 10800000 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} -600 \\ -2700 \\ -10800 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00600 \\ -0.00578 \\ -0.00422 \end{Bmatrix} in$$

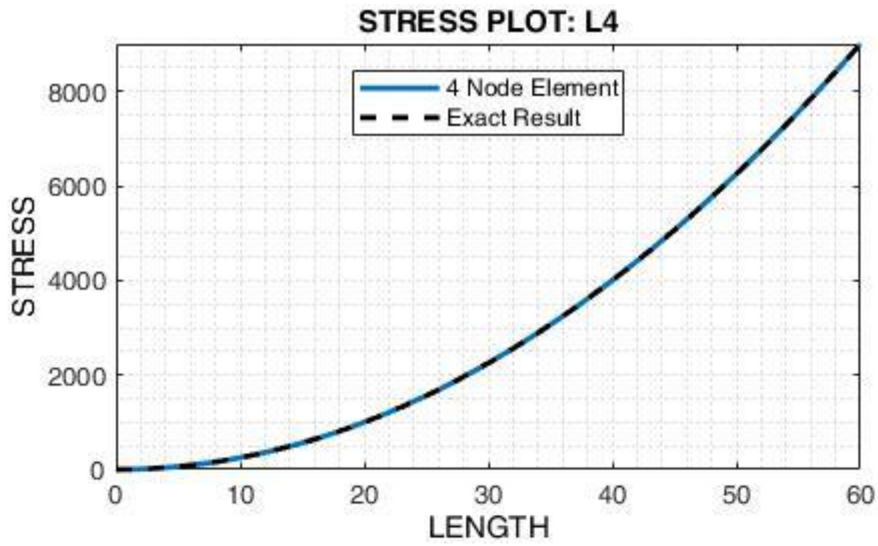
محاسبه تنش در المان :

$$\{\sigma_x\} = [D] \times \{\varepsilon_x\} = E[B]\{d\} =$$

$$E\left(-\frac{x^2}{16000} + \frac{x}{200} - \frac{11}{120} \quad \frac{3x^2}{16000} - \frac{x}{80} + \frac{3}{20} \quad -\frac{3x^2}{16000} + \frac{x}{100} - \frac{3}{40} \quad \frac{x^2}{16000} - \frac{x}{400} + \frac{1}{60} \right) \begin{Bmatrix} -0.00600 \\ -0.00578 \\ -0.00422 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 2.5x^2 \ psi$$

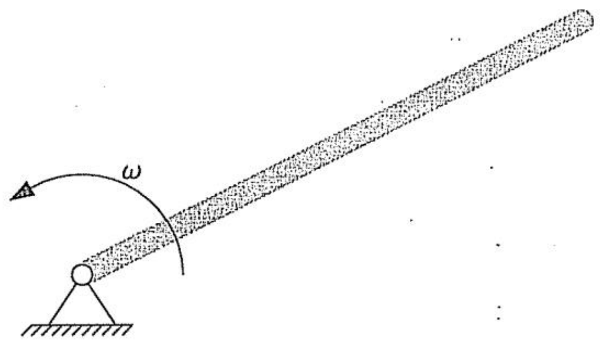
$$\begin{cases} \sigma_{1x} = 2.5(0)^2 = 0 \ psi \\ \sigma_{1x} = 2.5(20)^2 = 1000 \ psi \\ \sigma_{1x} = 2.5(40)^2 = 4000 \ psi \\ \sigma_{1x} = 2.5(60)^2 = 9000 \ psi \end{cases}$$



همان‌طور که مشاهده می‌شود در این مسئله با استفاده از یک المان ۴ گره‌ای می‌توان به معادله دقیق تنش دست یافت.

بیشتر بدانید ۱

معادله دیفرانسیل میله با سطح مقطع ثابت A ، دوران با سرعت زاویه‌ای ω و چگالی جرمی ρ



$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)+\rho Ax\omega^2=0; \qquad 0<x<L$$

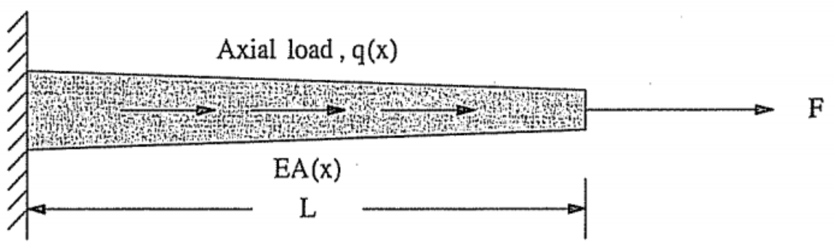
$$u(0)=0; \qquad EA\frac{du(L)}{dx}=0$$

و تنش محوری :

$$\sigma_{x,\mathrm{Exact}}=\frac{\rho\omega^2}{2}(L^2-x^2)$$

بیشتر بدانید ۲

معادله دیفرانسیل میله با سطح مقطع متغیر و بار گسترده :



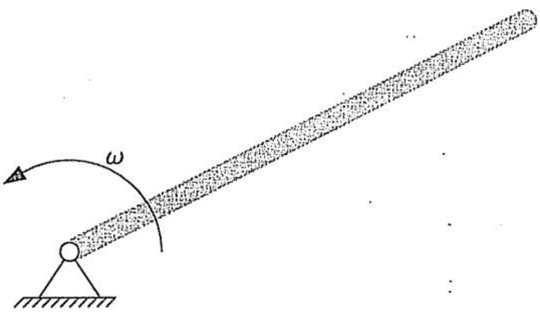
$$\frac{d}{dx}\left(EA(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)=0; \qquad 0<x<L$$

و شرایط مرزی :

$$u(0)=0; \qquad EA(L)\frac{du(L)}{dx}=F$$

اثبات معادله تنش میله تحت دوران

میله‌ای با مقطع ثابت و چگالی جرمی (ρ) حول انتهای خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. تابعی را تعریف کنید که بر اساس آن نیرو و تنش محوری در میله تعیین شود.



$$\begin{cases} \rho = \dfrac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \Rightarrow dm = \rho dV \\ V = AL \Rightarrow dV = Adx \end{cases}$$

$$\Rightarrow dm = \rho A dx$$

نیروی ناشی از دوران جزء جرم :

$$dm.x.\omega^2$$

در نتیجه :

$$F_B(x) = \int_0^L x\omega^2 dm \Rightarrow \rho A\omega^2 \int_x^L x dx \Rightarrow F_B(x) = \frac{\rho A\omega^2}{2}(L^2 - x^2)$$

و تنش محوری برابر است با :

$$\sigma_x(x) = \frac{F_B(x)}{A} = \frac{\rho A\omega^2}{2A}(L^2 - x^2) = \frac{\rho\omega^2}{2}(L^2 - x^2)$$

بارگذاری میله تحت دوران

بارهای تولید شده در میله‌ای به طول L و سطح مقطع ثابت A و چگالی جرمی ثابت ρ که با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند را محاسبه نمایید با استفاده از :

الف : یک المان دو گره‌ای

ب : یک المان سه گره‌ای

قسمت الف :

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho V \quad \Rightarrow \quad dm = \rho dV \\ V = AL \quad \Rightarrow \quad dV = Adx \end{cases}$$
$$\Rightarrow dm = \rho A dx$$

نیروی ناشی از دوران جزء جرم :

$$\mathrm{dm.x.}\omega^2$$

در نتیجه :

$$F = \int_{x_s}^{x_e} [N]^T x\omega^2 dm \quad \Rightarrow \quad \rho A\omega^2 \times \int_{x_s}^{x_e} [N]^T xdx \quad \Rightarrow \mathrm{F}_B = \rho A\omega^2 \times \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{x-x_e}{x_e-x_s} \\ \dfrac{x-x_s}{x_e-x_s} \end{pmatrix} \times xdx$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{(x_e-x_s)(x_e+2x_s)}{6}\rho A\omega^2 \\ \dfrac{(x_e-x_s)(2x_e+x_s)}{6}\rho A\omega^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_e=L]{x_s=0} \begin{pmatrix} \dfrac{\rho A\omega^2 L^2}{6} \\ \dfrac{\rho A\omega^2 L^2}{3} \end{pmatrix}$$

و برای آزمودن رابطه بالا کافی است که دو درایه را با هم جمع کنیم و نیروی کل محاسبه شود :

$$\frac{1}{6}\rho A\omega^2 L^2 + \frac{1}{3}\rho A\omega^2 L^2 = \frac{\rho A\omega^2 L^2}{2}$$

پاسخ به دست آمده را با پاسخ بارگذاری مثلثی مقایسه کنید !

قسمت ب :

$$F=\int_{x_s}^{x_e}[N]^T x\omega^2 dm \quad \Rightarrow \quad \rho A\omega^2\times\int_{x_s}^{x_e}[N]^T xdx \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{F}_B=\rho A\omega^2\times\int_{x_s}^{x_e}\begin{pmatrix}-\dfrac{(x-x_e)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2}\\ -\dfrac{4(x-x_e)(x-x_s)}{(x_e-x_s)^2}\\ -\dfrac{(x-x_s)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2}\end{pmatrix}\times xdx=\begin{pmatrix}\dfrac{x_s(x_e-x_s)}{6}\rho A\omega^2\\ \left(\dfrac{x_e^{\ 2}}{3}-\dfrac{x_s^{\ 2}}{3}\right)\rho A\omega^2\\ \dfrac{x_e(x_e-x_s)}{6}\rho A\omega^2\end{pmatrix}\xrightarrow[x_e=L]{x_s=0}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\rho A\omega^2L^2}{3}\\ \dfrac{\rho A\omega^2L^2}{6}\end{pmatrix}$$

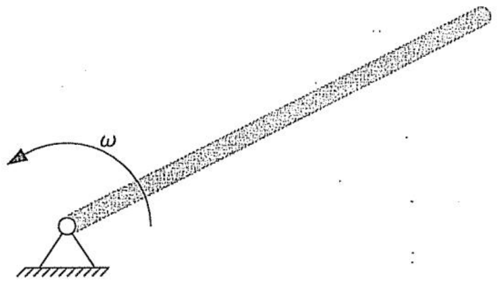
و برای آزمودن رابطه بالا کافی است که دو درایه را با هم جمع کنیم و نیروی کل محاسبه شود :

$$0+\frac{1}{3}\rho A\omega^2L^2+\frac{1}{6}\rho A\omega^2L^2=\frac{\rho A\omega^2L^2}{2}$$

پاسخ به دست آمده را با پاسخ بارگذاری مثلثی مقایسه کنید !

مسئله جابجایی و تنش میله تحت دوران

مطلوب است تعیین تنش محوری در میله‌ای که تحت سرعت زاویه‌ای $500\,{}^{rad}\!/_{sec}$ همانند شکل دوران می کند.



$$L = 80cm = 0.8m$$
$$\rho = 7850\,{}^{kg}\!/_{m^3}$$
$$A = 250mm^2 = 250\times10^{-6}m^2$$
$$E = 200Gpa = 200\times10^6\,{}^{kN}\!/_{m^2} = 200\times10^8\,{}^{kg}\!/_{m^2}$$

الف : با استفاده از یک المان دو گره‌ای

ب : با استفاده از یک المان سه گره‌ای

ج : با استفاده از یک المان چهار گره‌ای

قسمت الف :

$$\text{K}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{K}=\frac{200\times10^8\times250\times10^{-6}}{0.8}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}6.25 & -6.25\\ -6.25 & 6.25\end{bmatrix}$$

$$\text{F}_B = \rho A\omega^2\times\int_0^{0.8}\begin{pmatrix}1-\frac{5x}{4}\\ \frac{5x}{4}\end{pmatrix}xdx = \begin{bmatrix}52333.333\\ 104666.666\end{bmatrix}$$

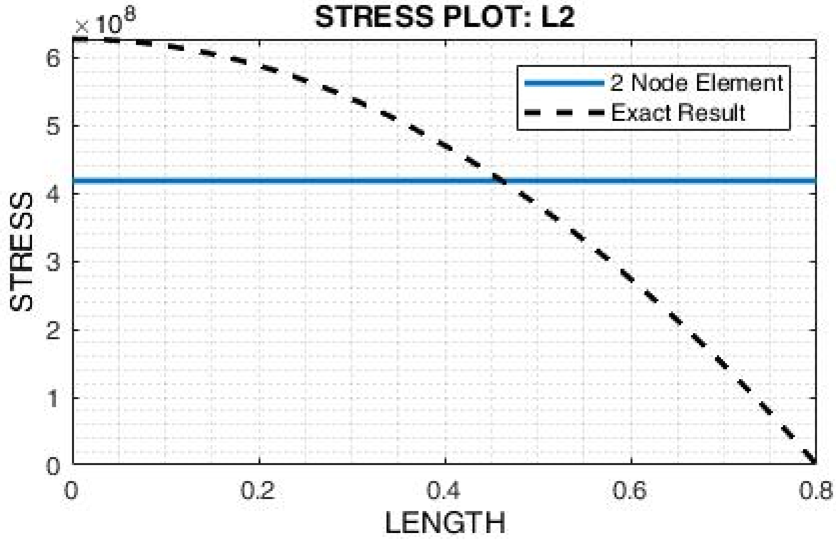
$$10^6\begin{bmatrix}6.25 & -6.25\\ -6.25 & 6.25\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Delta_{1x}\\ \Delta_{2x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{1x}\\ 104666.666\end{bmatrix}\Rightarrow 6.25\times10^6\times\Delta_{2x}=104666.666\Rightarrow$$

$$\Delta_{2x}=\frac{104666.666}{6.25\times10^6}=0.01674666667$$

$$\sigma_x = EBd = E\times\begin{bmatrix}\frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Delta_{1x}\\ \Delta_{2x}\end{bmatrix}=200\times10^8\times\begin{bmatrix}\frac{-1}{0.8} & \frac{1}{0.8}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 0.016747\end{bmatrix}=418675000$$

بنابراین تنش به طور ثابت در تمامی نقاط عدد به دست آمده فوق است (تنش ثابت)

نمودار تنش برای یک المان ۲ گرهی



قسمت ب :

$$K=\frac{EA}{3L}\begin{bmatrix}7 & -8 & 1\\ -8 & 16 & -8\\ 1 & -8 & 7\end{bmatrix}\Rightarrow K=\begin{bmatrix}14583333.331 & -16666666.664 & 2083333.333\\ -16666666.664 & 33333333.328 & -16666666.664\\ 2083333.333 & -16666666.664 & 14583333.331\end{bmatrix}$$

$$F_B=\rho A\omega^2\times\int_0^{0.8}\begin{pmatrix}\frac{25x^2}{8}-\frac{15x}{4}+1\\ 5x-\frac{25x^2}{4}\\ \frac{25x^2}{8}-\frac{5x}{4}\end{pmatrix}xdx=\begin{bmatrix}0\\ 104666.667\\ 52333.333\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}14583333.331 & -16666666.664 & 2083333.333\\ -16666666.664 & 33333333.328 & -16666666.664\\ 2083333.333 & -16666666.664 & 14583333.331\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Delta_{1x}\\ \Delta_{2x}\\ \Delta_{3x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{1x}\\ 104666.667\\ 52333.333\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\Delta_{2x}\\ \Delta_{3x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}33333333.328 & -16666666.664\\ -16666666.664 & 14583333.331\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}104666.667\\ 52333.333\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01151333333\\ 0.01674666667\end{bmatrix}$$

$$\sigma_x=EBd=E\times\begin{pmatrix}\frac{25x}{4}-\frac{15}{4} & 5-\frac{25x}{2} & \frac{25x}{4}-\frac{5}{4}\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 0.01151333333\\ 0.01674666667\end{bmatrix}\Rightarrow$$

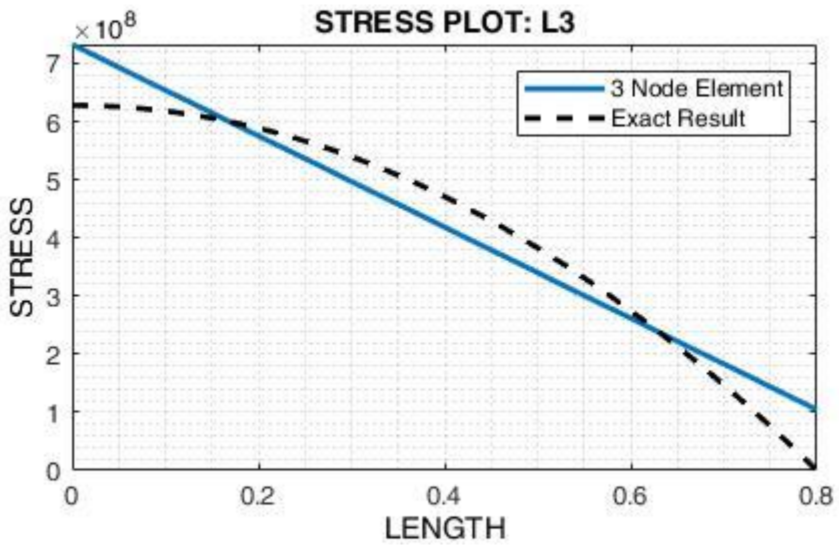
$$\sigma_x=732666666.2-784999998\text{x}$$

$x=0 \Rightarrow \sigma_x = 732666666.2$

$x=0.4 \Rightarrow \sigma_x = 418666667$

$x=0.8 \Rightarrow \sigma_x = 104666667.8$

نمودار تنش بر حسب x برای یک المان ۳ گرهی



قسمت ج:

$$K = \frac{EA}{40L}\begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$K = \begin{bmatrix} 23125000 & -29531250 & 8437500 & -2031250 \\ -29531250 & 67500000 & -46406250 & 8437500 \\ 8437500 & -46406250 & 67500000 & -29531250 \\ -2031250 & 8437500 & -29531250 & 23125000 \end{bmatrix}$$

$$F_B = \rho A\omega^2 \times \int_0^{0.8} \begin{pmatrix} -\frac{1125x^3}{128}+\frac{225x^2}{16}-\frac{55x}{8}+1 \\ \frac{3375x^3}{128}-\frac{1125x^2}{32}+\frac{45x}{4} \\ -\frac{3375x^3}{128}+\frac{225x^2}{8}-\frac{45x}{8} \\ \frac{1125x^3}{128}-\frac{225x^2}{32}+\frac{5x}{4} \end{pmatrix} xdx = \begin{bmatrix} 5233.333 \\ 23550.000 \\ 94200.000 \\ 34016.667 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 23125000 & -29531250 & 8437500 & -2031250 \\ -29531250 & 67500000 & -46406250 & 8437500 \\ 8437500 & -46406250 & 67500000 & -29531250 \\ -2031250 & 8437500 & -29531250 & 23125000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{4x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ 23550.000 \\ 94200.000 \\ 34016.667 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{4x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67500000. & -46406250. & 8437500. \\ -46406250. & 67500000. & -29531250. \\ 8437500. & -29531250. & 23125000. \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 23550.000 \\ 94200.000 \\ 34016.667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.008063209878 \\ 0.01426567901 \\ 0.01674666667 \end{bmatrix}$$

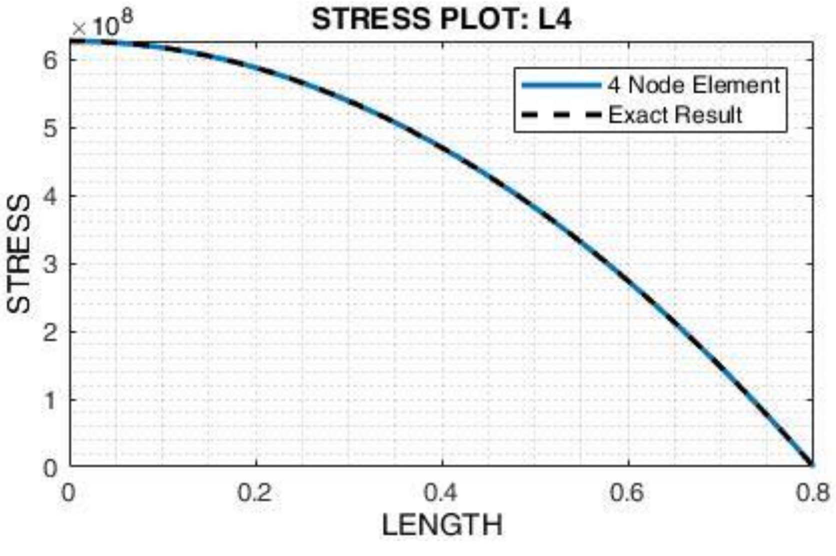
$$\sigma_x = EBd \Rightarrow$$

$$E \times \left(-\frac{3375x^2}{128} + \frac{225x}{8} - \frac{55}{8} \quad \frac{10125x^2}{128} - \frac{1125x}{16} + \frac{45}{4} \quad -\frac{10125x^2}{128} + \frac{225x}{4} - \frac{45}{8} \quad \frac{3375x^2}{128} - \frac{225x}{16} + \frac{5}{4} \right) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0.008063209878 \\ 0.01426567901 \\ 0.01674666667 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = 628000001 - 981250000x^2$$

$$\text{x=0} \Rightarrow \sigma_x = 628000000.8$$
$$\text{x=0.4} \Rightarrow \sigma_x = 471000000.8$$
$$\text{x=0.8} \Rightarrow \sigma_x = 0.8$$

نمودار تنش بر حسب x با استفاده از یک المان ۴ گرهی



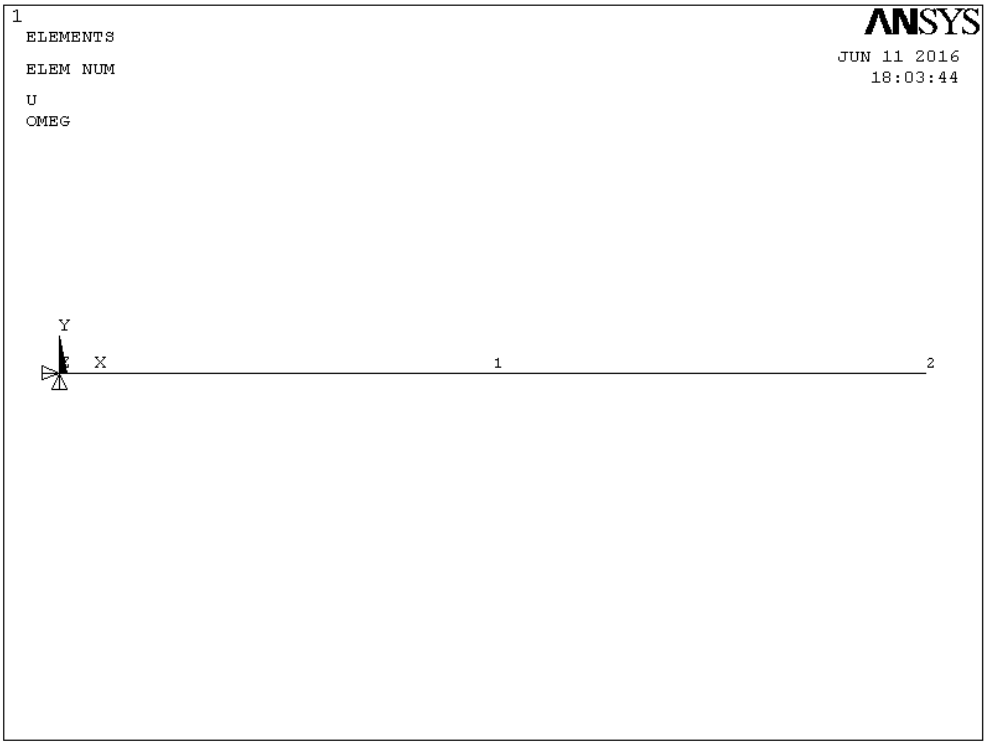
و با توجه به رابطه به دست آمده تنش در مسئله (۰) نمودار دقیق بدین صورت است :

$$\frac{\rho\omega^2}{2}(L^2 - x^2) = -981250000x^2 + 628000000$$

$$x=0 \Rightarrow \sigma_x = 628000000$$
$$x=0.4 \Rightarrow \sigma_x = 471000000$$
$$x=0.8 \Rightarrow \sigma_x = 0$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود المان ۴ گرهی به علت داشتن جملات مرتبه بالا و حتی با در نظر گرفتن ۱ المان تقریب بسیار دقیقی را از تنش نسبت به جواب دقیق به ما می‌دهد.

مقایسه نتایج با نرم‌افزار تجاری **ANSYS v12** - مدل سازه با یک المان ۲ گرهی :



نتایج جابه‌جایی گره‌ها :

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.16747E-01	0.0000	0.0000	0.16747E-01

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	2	0	0	2
VALUE	0.16747E-01	0.0000	0.0000	0.16747E-01

ماتریس سختی و بردار نیرو کلی محاسبه شده توسط **ANSYS** :

ROW	NODE	DIR	VALUE
1	2	UX	104666.7

***** STIFFNESS MATRIX *****

ROW 1 NODE 2 DEG. OF. FR. = UX
1 0.62500000E+07

بارگذاری میله تحت اثر نیروی وزن خودش

بارهای تولید شده در میله‌ای به طول L و سطح مقطع ثابت A و چگالی جرمی ثابت ρ که تحت نیروی وزن خود قرار دارد را محاسبه نمایید با استفاده از :

الف : یک المان دو گره‌ای ب : یک المان سه گره‌ای

قسمت الف :

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho V \quad \Rightarrow \quad dm = \rho dV \\ V = AL \quad \Rightarrow \quad dV = Adx \end{cases}$$
$$\Rightarrow dm = \rho Adx$$

نیروی ناشی از جزء وزن : $\mathrm{dm} \times g$

$$F = \int_{x_s}^{x_e} [N]^T g dm \quad \Rightarrow \quad \rho g A \times \int_{x_s}^{x_e} [N]^T dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_B = \rho g A \times \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{x-x_e}{x_e-x_s} \\ \dfrac{x-x_s}{x_e-x_s} \end{pmatrix} dx$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{x_e}{2} - \dfrac{x_s}{2}\right)\rho g A \\ \left(\dfrac{x_e}{2} - \dfrac{x_s}{2}\right)\rho g A \end{pmatrix} \xrightarrow[x_e=L]{x_s=0} \frac{\rho g A L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

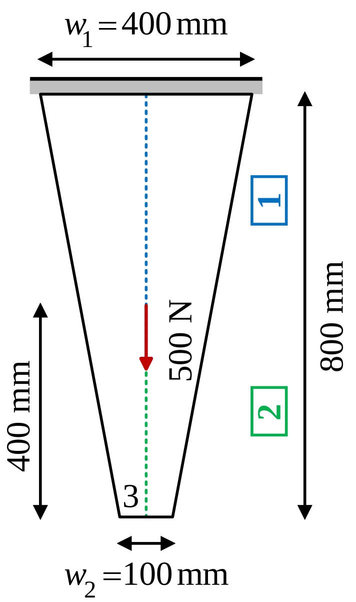
قسمت ب :

$$F = \int_{x_s}^{x_e} [N]^T g dm \quad \Rightarrow \quad \rho g A \times \int_{x_s}^{x_e} [N]^T dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_B = \rho g A \times \int_{x_s}^{x_e} \begin{pmatrix} -\dfrac{(x-x_e)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2} \\ -\dfrac{4(x-x_e)(x-x_s)}{(x_e-x_s)^2} \\ -\dfrac{(x-x_s)(x_e-2x+x_s)}{(x_e-x_s)^2} \end{pmatrix} dx$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{x_e}{6} - \dfrac{x_s}{6}\right)\rho g A \\ \left(\dfrac{2x_e}{3} - \dfrac{2x_s}{3}\right)\rho g A \\ \left(\dfrac{x_e}{6} - \dfrac{x_s}{6}\right)\rho g A \end{pmatrix} \xrightarrow[x_e=L]{x_s=0} \frac{\rho g A L}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مسئله جابجایی میله با سطح مقطع متغیر تحت اثر نیروی وزن خودش

میله‌ای با سطح مقطع متغیر با ضخامت ثابت ۴۰ میلی‌متر تحت اثر وزن خود و نیروی ۵۰۰ نیوتن در مرکز شکل قرار دارد. مطلوب است محاسبه جابجایی با استفاده از :



$$\gamma = \rho g = 0.82\times10^{-4}\ N/mm^3 \quad , \quad E = 2\times10^{5}\ N/mm^2$$

الف : دو المان ۲ گره‌ای (ثابت کردن سطح مقطع)

ب : دو المان ۳ گره‌ای (ثابت کردن سطح مقطع)

ج : دو المان ۲ گره‌ای (مقطع متغیر)

د : دو المان ۳ گره‌ای (مقطع متغیر)

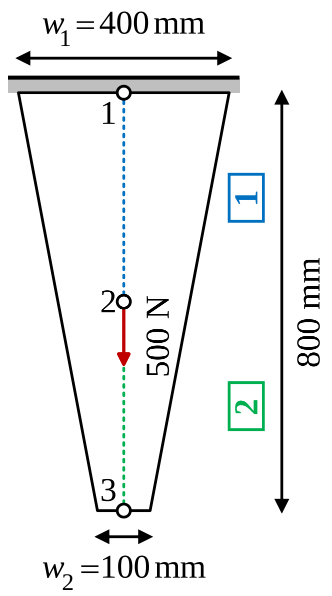
حل : با توجه به خطی بودن تغییرات سطح مقطع می‌توان معادله خطی سطح مقطع را به راحتی محاسبه نمود.

$$A_1 = w_1 \times t = 400\times40 = 16000 mm^2$$
$$A_2 = w_2 \times t = 100\times40 = 4000 mm^2$$

معادله سطح مقطع و سطح مقطع المان ۱ و ۲ برابر است با :

$$A - A_1 = \frac{A_2 - A_1}{800-0}(x-0) \quad \Rightarrow \quad A(x) = 16000 - 15x$$
$$A^{(1)} = A(\frac{0+400}{2}) = 16000 - 15(200) = 13000 mm^2$$
$$A^{(2)} = A(\frac{400+800}{2}) = 16000 - 15(600) = 7000 mm^2$$

قسمت الف :



با توجه به اینکه $L^{(1)} = 400mm$, $L^{(2)} = 400mm$ ، بردار نیروی المان ۱ و ۲ :

$$F^{(1)} = \frac{0.82\times10^{-4}\times13000\times400}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}213.2\\213.2\end{pmatrix}$$
$$F^{(2)} = \frac{0.82\times10^{-4}\times7000\times400}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}114.8\\114.8\end{pmatrix}$$

بردار نیرو اسمبل شده :

$$F = \begin{pmatrix}213.2\\213.2+114.8+500\\114.8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}213.2\\828.0\\114.8\end{pmatrix}$$

ماتریس سختی المان ۱ و ۲ :

$$K^{(1)} = \left(\frac{E \cdot A^{(1)}}{L^{(1)}}\right) \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6500000 & -6500000 \\ -6500000 & 6500000 \end{pmatrix}$$

$$K^{(2)} = \left(\frac{E \cdot A^{(2)}}{L^{(2)}}\right) \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3500000 & -3500000 \\ -3500000 & 3500000 \end{pmatrix}$$

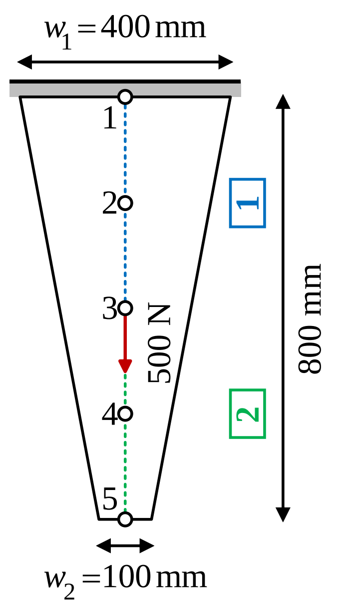
ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{pmatrix} 6500000 & -6500000 & 0 \\ -6500000 & 10000000 & -3500000 \\ 0 & -3500000 & 3500000 \end{pmatrix}$$

حل دستگاه و محاسبه جابجایی :

$$\begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10000000 & -3500000 \\ -3500000 & 3500000 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 828.0 \\ 114.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000145046 \\ 0.000177846 \end{pmatrix}$$

قسمت ب :



با توجه به اینکه $L^{(1)} = 400mm$, $L^{(2)} = 400mm$ ، بردار نیروی المان ۱ و ۲ :

$$F^{(1)} = \frac{0.82 \times 10^{-4} \times 13000 \times 400}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71.0667 \\ 284.2667 \\ 71.0667 \end{bmatrix}$$

$$F^{(2)} = \frac{0.82 \times 10^{-4} \times 7000 \times 400}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.2667 \\ 153.0667 \\ 38.2667 \end{bmatrix}$$

بردار نیرو اسمبل شده :

$$F=\begin{bmatrix}71.0667\\284.2667\\71.0667+38.2667+500\\153.0667\\38.2667\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}71.0667\\284.2667\\609.3333\\153.0667\\38.2667\end{bmatrix}$$

ماتریس سختی المان ۱ و ۲ :

$$K^{(1)}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{E\cdot A^{(1)}}{L^{(1)}}\right)\times\begin{bmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15166666.667&-17333333.333&2166666.667\\-17333333.333&34666666.667&-17333333.333\\2166666.667&-17333333.333&15166666.667\end{bmatrix}$$

$$K^{(2)}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{E\cdot A^{(2)}}{L^{(2)}}\right)\times\begin{bmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8166666.667&-9333333.333&1166666.667\\-9333333.333&18666666.667&-9333333.333\\1166666.667&-9333333.333&8166666.667\end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K=\begin{bmatrix}15166666.667&-17333333.333&2166666.667&.000&.000\\-17333333.333&34666666.667&-17333333.333&.000&.000\\2166666.667&-17333333.333&23333333.333&-9333333.333&1166666.667\\.000&.000&-9333333.333&18666666.667&-9333333.333\\.000&.000&1166666.667&-9333333.333&8166666.667\end{bmatrix}$$

حل دستگاه و محاسبه جابجایی :

$$\begin{pmatrix}34666666.667&-17333333.333&0&0\\-17333333.333&23333333.333&-9333333.3333&1166666.6667\\0&-9333333.3333&18666666.667&-9333333.3333\\0&1166666.6667&-9333333.3333&8166666.6667\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}284.267\\609.333\\153.067\\38.2667\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}d_{2x}\\d_{3x}\\d_{4x}\\d_{5x}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0.0000807231\\0.000145046\\0.000169646\\0.000177846\end{pmatrix}$$

نکته : همان طور که مشاهده می شود، نتیجه جابجایی گره انتها برای حالت ۲ گره ای و ۳ گره ای تفاوتی ندارد، دلیل آن ثابت در نظر گرفتن سطح مقطع ۲ المان می باشد. در این نوع مسائل (ثابت کردن سطح مقطع) افزایش تعداد المان نسبت به افزایش مرتبه المان ارجحیت خواهد داشت. برای نمونه در جدول زیر نتایج میله ۲، ۳ و ٤ گره‌ای در حالت وجود ۲، ٤، ٦، ۸، ۱۰ و ۵۰ المان قرار داده شده است.

	المان ۲	المان ۴	المان ۶	المان ۸	المان ۱۰	المان ۵۰
۲ گره‌ای	۰/۰۰۰۱۷۷۸۴۶	۰/۰۰۰۱۷۰۱۷۹	۰/۰۰۰۱۶۸۶۸۲	۰/۰۰۰۱۶۸۱۴۹	۰/۰۰۰۱۶۷۹۰۱	۰/۰۰۰۱۶۷۴۷۶
۳ گره‌ای	۰/۰۰۰۱۷۷۸۴۶	۰/۰۰۰۱۷۰۱۷۹	۰/۰۰۰۱۶۸۶۸۲	۰/۰۰۰۱۶۸۱۴۹	۰/۰۰۰۱۶۷۹۰۱	۰/۰۰۰۱۶۷۴۷۶
۴ گره‌ای	۰/۰۰۰۱۷۷۸۴۶	۰/۰۰۰۱۷۰۱۷۹	۰/۰۰۰۱۶۸۶۸۲	۰/۰۰۰۱۶۸۱۴۹	۰/۰۰۰۱۶۷۹۰۱	۰/۰۰۰۱۶۷۴۷۶

قسمت ج :

$$F = g\int_{x_s}^{x_e} [N]^T \, dm \quad \Rightarrow \quad \rho g \times \int_{x_s}^{x_e} [N]^T \, A(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} F^{(1)} = \rho g \times \int_0^{400} \begin{pmatrix} 1-\dfrac{x}{400} \\ \dfrac{x}{400} \end{pmatrix} (16000-15x)dx = \begin{pmatrix} 229.6 \\ 196.8 \end{pmatrix} \\ F^{(2)} = \rho g \times \int_{400}^{800} \begin{pmatrix} 2-\dfrac{x}{400} \\ \dfrac{x}{400}-1 \end{pmatrix} (16000-15x)dx = \begin{pmatrix} 131.2 \\ 98.4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 229.6 \\ 196.8+131.2+500 \\ 98.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 229.6 \\ 828.0 \\ 98.4 \end{pmatrix}$$

ماتریس سختی المان ۱ :

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{400} & \dfrac{1}{400} \end{pmatrix}$$

$$k = \int_0^{400} B^T \times E \times A(x) \times B \times dx$$

$$k^{(1)} = \begin{pmatrix} 6500000.0 & -6500000.0 \\ -6500000.0 & 6500000.0 \end{pmatrix}$$

ماتریس سختی المان۲ :

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{400} & \dfrac{1}{400} \end{pmatrix}$$

$$k = \int_{400}^{800} B^T \times E \times A(x) \times B \times dx$$

$$k^{(2)} = \begin{pmatrix} 3500000.0 & -3500000.0 \\ -3500000.0 & 3500000.0 \end{pmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{pmatrix} 6500000 & -6500000 & 0 \\ -6500000 & 10000000 & -3500000 \\ 0 & -3500000 & 3500000 \end{pmatrix}$$

حل دستگاه :

$$\begin{pmatrix} 10000000 & -3500000 \\ -3500000 & 3500000 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 828.0 \\ 98.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000142523 \\ 0.000170637 \end{pmatrix}$$

قسمت د :

$$F = g\int_{x_s}^{x_e}[N]^T\,dm \quad\Rightarrow\quad \rho g\times\int_{x_s}^{x_e}[N]^T\,A(x)dx \quad\Rightarrow$$

$$F^{(1)} = \rho g\times\int_0^{400}\begin{pmatrix}\dfrac{x^2}{80000}-\dfrac{3x}{400}+1\\ \dfrac{x}{100}-\dfrac{x^2}{40000}\\ \dfrac{x^2}{80000}-\dfrac{x}{400}\end{pmatrix}(16000-15x)dx = \begin{pmatrix}87.4667\\284.267\\54.6667\end{pmatrix}$$

$$F^{(2)} = \rho g\times\int_{400}^{800}\begin{pmatrix}\dfrac{x^2}{80000}-\dfrac{7x}{400}+6\\ -\dfrac{x^2}{40000}+\dfrac{3x}{100}-8\\ \dfrac{x^2}{80000}-\dfrac{x}{80}+3\end{pmatrix}(16000-15x)dx = \begin{pmatrix}54.6667\\153.067\\21.8667\end{pmatrix}$$

بردار نیرو اسمبل شده برابر است با :

$$F = \begin{bmatrix}87.4667\\284.267\\54.6667+54.6667+500\\153.067\\21.8667\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}87.4667\\284.2667\\609.3333\\153.0667\\21.8667\end{Bmatrix}$$

ماتریس سختی المان ۱ :

$$B = \begin{pmatrix}\dfrac{x}{40000}-\dfrac{3}{400} & \dfrac{1}{100}-\dfrac{x}{20000} & \dfrac{x}{40000}-\dfrac{1}{400}\end{pmatrix}$$

$$k = \int_0^{400} B^T\times E\times A(x)\times B\times dx$$

$$k^{(1)} = \begin{pmatrix}17166666.667 & -19333333.333 & 2166666.6667\\ -19333333.333 & 34666666.667 & -15333333.333\\ 2166666.6667 & -15333333.333 & 13166666.667\end{pmatrix}$$

ماتریس سختی المان۲ :

$$B = \begin{pmatrix}\dfrac{x}{40000}-\dfrac{7}{400} & \dfrac{3}{100}-\dfrac{x}{20000} & \dfrac{x}{40000}-\dfrac{1}{80}\end{pmatrix}$$

$$k = \int_{400}^{800} B^T \times E \times A(x) \times B \times dx$$

$$k^{(2)} = \begin{pmatrix} 10166666.667 & -11333333.333 & 1166666.6667 \\ -11333333.333 & 18666666.667 & -7333333.3333 \\ 1166666.6667 & -7333333.3333 & 6166666.6667 \end{pmatrix}$$

ماتریس سختی اسمبل شده :

$$K = \begin{bmatrix} 17166666.667 & -19333333.333 & 2166666.667 & 0.000 & 0.000 \\ -19333333.333 & 34666666.667 & -15333333.333 & 0.000 & 0.000 \\ 2166666.667 & -15333333.333 & 23333333.333 & -11333333.333 & 1166666.667 \\ 0.000 & 0.000 & -11333333.333 & 18666666.667 & -7333333.333 \\ 0.000 & 0.000 & 1166666.667 & -7333333.333 & 6166666.667 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه :

$$\begin{bmatrix} 34666666.667 & -15333333.333 & 0.000 & 0.000 \\ -15333333.333 & 23333333.333 & -11333333.333 & 1166666.667 \\ 0.000 & -11333333.333 & 18666666.667 & -7333333.333 \\ 0.000 & 1166666.667 & -7333333.333 & 6166666.667 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 284.267 \\ 609.333 \\ 153.067 \\ 21.867 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

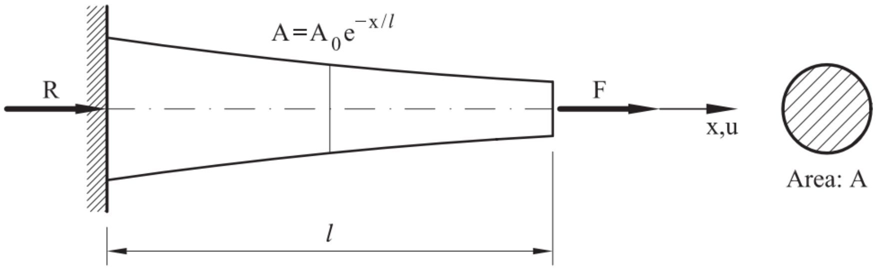
$$\begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{4x} \\ d_{5x} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0000712422 \\ 0.0001425301 \\ 0.0001605345 \\ 0.0001674866 \end{Bmatrix}$$

نکته : همان طور که مشاهده می شود، نتیجه جابجایی گره انتها برای حالت ۲ گره ای و ۳ گره ای بهبود محسوسی داشت. برای نمونه در جدول زیر نتایج میله ۲، ۳ و ٤ گره‌ای در حالت وجود ۲، ٤، ٦، ۸، ۱۰ و ۵۰ المان قرار داده شده است.

	۲ المان	۴ المان	۶ المان	۸ المان	۱۰ المان	۵۰ المان
۲ گره‌ای	۰/۰۰۰۱۷۰۶۳۷	۰/۰۰۰۱۶۸۳۱۲	۰/۰۰۰۱۶۷۸۴۵	۰/۰۰۰۱۶۷۶۷۸	۰/۰۰۰۱۶۷۵۹۹	۰/۰۰۰۱۶۷۴۶۴
۳ گره‌ای	۰/۰۰۰۱۶۷۴۸۷	۰/۰۰۰۱۶۷۴۶۲	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۹	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸
۴ گره‌ای	۰/۰۰۰۱۶۷۴۶	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸	۰/۰۰۰۱۶۷۴۵۸

بیشتر بدانید ۳

جابجایی، تنش و عکس العمل میله زیر به صورت دقیق برابر است با :



$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{F}{A_0}e^{\frac{x}{l}} \quad , \quad \varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{F}{EA_0}e^{\frac{x}{l}}$$

$$u(x)=\int_0^x \varepsilon dx=\int_0^x \frac{F}{EA_0}e^{\frac{x}{l}}dx=\frac{Fl}{EA_0}\left(e^{\frac{x}{l}}-1\right)$$

$$u(l)=\frac{Fl}{EA_0}(e-1)=1.71828\frac{Fl}{EA_0} \quad ; \quad R=-F$$

میله با سطح مقطع متغیر نمایی

در میله نشان داده شده با استفاده از ۲ المان ۳ گرهی مطلوب است :

الف) تعیین جابجایی گره‌ها

ب) تنش در گره‌ها

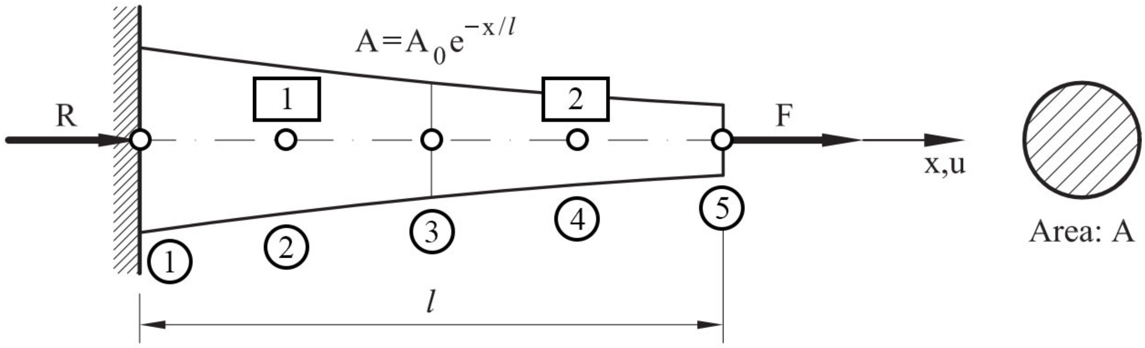
ج) رسم دیاگرام تنش در طول

E=200 GPa

$F = 500\,kN$

$l = 3\,m$

$r_0 = 1\,cm$



قسمت الف :

محاسبه B برای المان اول $x_s = 0\,,\, x_e = \frac{3}{2}$:

$$\overset{(1)}{B} = \begin{pmatrix} \frac{16x}{9} - 2 & \frac{8}{3} - \frac{32x}{9} & \frac{16x}{9} - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

محاسبه B برای المان دوم $x_s = \frac{3}{2}\,,\, x_e = 3$:

$$\overset{(2)}{B} = \begin{pmatrix} \frac{16x}{9} - \frac{14}{3} & 8 - \frac{32x}{9} & \frac{16x}{9} - \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

محاسبه سطح اولیه و بدست آوردن معادله تغییرات سطح:

$$A_0 = \pi r_0^2 = \pi (0.01)^2 = \frac{\pi}{10000} \Rightarrow A = \frac{\pi e^{-\frac{x}{3}}}{10000}$$

محاسبه ماتریس سختی المان اول :

$$\overset{(1)}{K} = \int_0^{\frac{3}{2}} \overset{(1)^T}{B}\; EA(x) \overset{(1)}{B}\, dx = \begin{bmatrix} 88220.4742 & -99572.3023 & 11351.8281 \\ -99572.3023 & 177260.1539 & -77687.8516 \\ 11351.8281 & -77687.8516 & 66336.0235 \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی المان دوم :

$$\overset{(2)}{K}=\int_{\frac{3}{2}}^{3}\overset{(2)^T}{B}\;EA(x)\,\overset{(2)}{B}\,dx=\begin{bmatrix}53508.4224 & -60393.6542 & 6885.2318\\ -60393.6542 & 107513.7181 & -47120.0639\\ 6885.2318 & -47120.0639 & 40234.8321\end{bmatrix}$$

اسمبل ماتریس سختی :

$$K=\begin{bmatrix}88220.4742 & -99572.3023 & 11351.8281 & 0 & 0\\ -99572.3023 & 177260.1539 & -77687.8516 & 0 & 0\\ 11351.8281 & -77687.8516 & 119844.4459 & -60393.65423 & 6885.231796\\ 0.0000 & 0.0000 & -60393.6542 & 107513.7181 & -47120.06388\\ 0.0000 & 0.0000 & 6885.2318 & -47120.06388 & 40234.83209\end{bmatrix}$$

با توجه به قفل بودن گره ۱ سطر و ستون اول ماتریس سختی را از معادلات حذف می کنیم :

$$\Delta=\begin{bmatrix}177260.1539 & -77687.8516 & 0 & 0\\ -77687.8516 & 119844.4459 & -60393.65423 & 6885.231796\\ 0.0000 & -60393.6542 & 107513.7181 & -47120.06388\\ 0.0000 & 6885.2318 & -47120.06388 & 40234.83209\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\500\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.00678694\\0.01548575\\0.02667553\\0.04101743\end{Bmatrix}\begin{matrix}\Delta_{2x}\\\Delta_{3x}\\\Delta_{4x}\\\Delta_{5x}\end{matrix}$$

قسمت ب :

محاسبه تنش در المان اول :

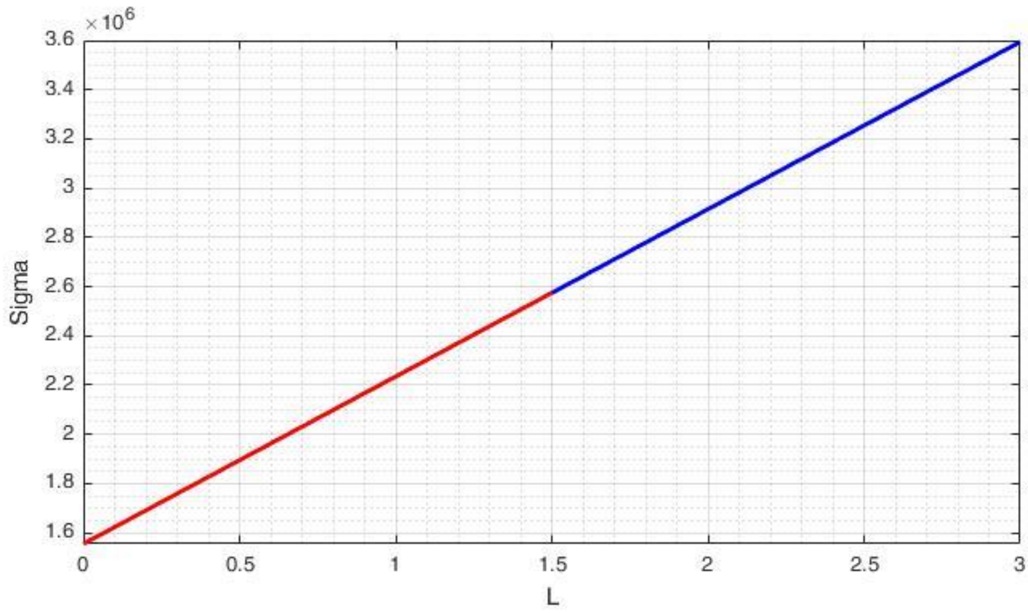
$$\sigma=E\overset{(1)}{B}\overset{(1)}{\Delta}=679773.5x+1554936.5\Rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow\sigma_1=1554944\ \mathrm{kN}/m^2\\ x=\frac{3}{4}\rightarrow\sigma_2=2064777\ \mathrm{kN}/m^2\\ x=\frac{3}{2}\rightarrow\sigma_3=2574600\ \mathrm{kN}/m^2\end{cases}$$

محاسبه تنش در المان دوم :

$$\sigma=E\overset{(2)}{B}\overset{(2)}{\Delta}=1120757.0x+882521.31\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\rightarrow\sigma_3=2563666\ \mathrm{kN}/m^2\\ x=\frac{9}{4}\rightarrow\sigma_4=3404222\ \mathrm{kN}/m^2\\ x=3\rightarrow\sigma_5=4244799\ \mathrm{kN}/m^2\end{cases}$$

قسمت ج :

با توجه به خطی بودن پاسخ تنش دیاگرام تغییرات تنش برای المان اول و دوم بدین صورت است :

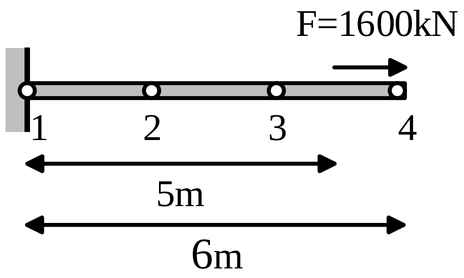

×10^6
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
Sigma
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
L

میله با نیرو بین گره‌ای و شرایط مرزی اجباری

در میله نشان داده شده با فرض یک المان ۴ گره‌ای، اگر بار متمرکزی در فاصله ۵ متری از تکیه گاه وارد شده باشد مطلوبست :

الف) نیروهای وارد بر هر گره

ب) محاسبه تغییر مکان گره‌ها با توجه به این نکته که حتما تغییر مکان گره ۳ با ۴ برابر باشد.



$E = 200\,GPa$

$A = 3000 mm^2$

راهنمایی : از این نکته که جمع توابع پایه در هر نقطه جزیی از واحد است کمک بگیرید.

حل :

واحدها همگی بر حسب کیلونیوتن و متر :

$$E = 200 \times 10^6 \, {kN}/{m^2}$$
$$A = 3000 \times 10^{-6} \, m^2$$

الف)

محاسبه توابع شکل در نقطه $x = 5m$:

$$N^T = \begin{bmatrix} 1 - \frac{11}{2}\frac{x}{L} + \frac{9x^2}{L^2} - \frac{9}{2}\frac{x^3}{L^3} \\ \frac{9x}{L} - \frac{45}{2}\frac{x^2}{L^2} + \frac{27}{2}\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{9}{2}\frac{x}{L} + \frac{18x^2}{L^2} - \frac{27}{2}\frac{x^3}{L^3} \\ \frac{x}{L} - \frac{9}{2}\frac{x^2}{L^2} + \frac{9}{2}\frac{x^3}{L^3} \end{bmatrix} \xrightarrow{x=5m} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ -\frac{5}{16} \\ \frac{15}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

✓ جهت اطمینان جمع توابع شکل در نقطه ۵ را بررسی می کنیم و متوجه می شویم که برابر با واحد می شود.

$$\frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{15}{16} + \frac{5}{16} = 1$$

نیروها به نسبت توابع شکل توزیع می شوند :

$$F_{Nodes} = N^T \times F_{x=5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ -\frac{5}{16} \\ \frac{15}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix} \times 1600 = \begin{pmatrix} 100 \\ -500 \\ 1500 \\ 500 \end{pmatrix} kN$$

✓ جهت اطمینان جمع نیروها بایستی برابر ۱۶۰۰ کیلونیوتن شود که با بررسی نتایج درستی آن ثابت می شود.

$$100 - 500 + 1500 + 500 = 1600\ kN$$

ب)

ماتریس سختی عضو ۴ گره‌ای :

$$K = \begin{pmatrix} 370000 & -472500 & 135000 & -32500 \\ -472500 & 1080000 & -742500 & 135000 \\ 135000 & -742500 & 1080000 & -472500 \\ -32500 & 135000 & -472500 & 370000 \end{pmatrix}$$

یکی از روش‌های اعمال شرایط ذکر شده در قسمت ب :

$$\Delta_3 = \Delta_4$$

بنابراین می‌توان Δ_4 را از مسئله حذف کرد. رابطه ماتریس انتقال (تبدیل) بدین صورت می‌شود :

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \times \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

حال نیروها و ماتریس سختی را با ماتریس T انتقال می‌دهیم :

$$K^* = T^T \times K \times T \qquad \& \qquad F^* = T^T \times F$$

$$F^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ -500 \\ 1500 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -500 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

$$K^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 370000 & -472500 & 135000 & -32500 \\ -472500 & 1080000 & -742500 & 135000 \\ 135000 & -742500 & 1080000 & -472500 \\ -32500 & 135000 & -472500 & 370000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K^* = \begin{pmatrix} 370000 & -472500 & 102500 \\ -472500 & 1080000 & -607500 \\ 102500 & -607500 & 505000 \end{pmatrix}$$

با توجه به اینکه گره ۱ مقید است، سطر و ستون مربوط به آن را از معادلات حاصل حذف می نماییم و در نتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} 1080000 & -607500 \\ -607500 & 505000 \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 = \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \\ 2000 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 = \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0054581 \\ 0.010526 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ m \end{matrix}$$

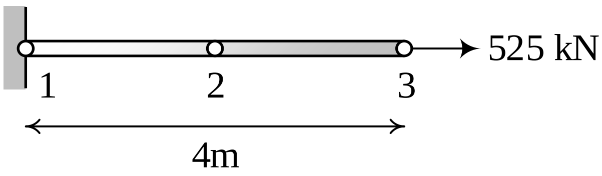
میله ایزوپارامتریک

در میله نشان داده شده با استفاده از فرمولبندی ایزوپارامتریک مطلوبست:

الف) محاسبه توابع پایه المان میله ۳ گرهی در مختصات r

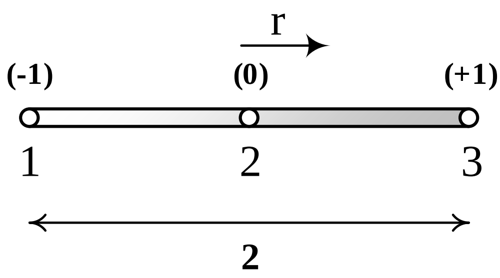
ب) محاسبه ژاکوبین عضو

ج) با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی ۳ نقطه‌ای جابجایی گره‌های آزاد را محاسبه نمایید.



$$E = 70GPa$$
$$A = 3000mm^2$$

راهنمایی : المان مادر برای المان ۳ گره‌ای در حالت یک بعدی به صورت زیر می‌باشد :



قسمت الف :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Inverse} X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{Shape\ Functions} \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \frac{r(r-1)}{2} & 1-r^2 & \frac{r(r+1)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \begin{pmatrix} r-\frac{1}{2} & -2r & r+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

قسمت ب :

$$x_r = \sum_{i=1}^{3} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 2r + 2$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = 2$$

قسمت ج :

$$GP = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$$

$$GW = \left(\frac{5}{9} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{5}{9} \right)$$

$$B = J^{-1} \times \frac{\partial N}{\partial r} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{2} \quad -2r \quad r + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4} \quad -r \quad \frac{r}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

$$K = \sum_{i=1}^{3} w_i B^T EABJ$$

با توجه به شرایط تکیه‌گاهی می‌توان محاسبات را تنها برای درجه آزادی ۲ و ۳ انجام داد (قسمت قرمز رنگ) :

$$B_1 = \left[-0.637298 \quad 0.774597 \quad -0.137298 \right]$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 94768.1390 & -115184.8057 & 20416.6667 \\ -115184.8057 & 140000.0000 & -24815.1943 \\ 20416.6667 & -24815.1943 & 4398.5276 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \left[-0.25 \quad 0.00 \quad 0.25 \right]$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 23333.3333 & 0.0000 & -23333.3333 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -23333.3333 & 0.0000 & 23333.3333 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \left[0.137298 \quad -0.774597 \quad 0.637298 \right]$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 4398.5276 & -24815.1943 & 20416.6667 \\ -24815.1943 & 140000.0000 & -115184.8057 \\ 20416.6667 & -115184.8057 & 94768.1390 \end{bmatrix}$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

$$K = \begin{bmatrix} 122500 & -140000 & 17500 \\ -140000 & 280000 & -140000 \\ 17500 & -140000 & 122500 \end{bmatrix}$$

با اعمال شرایط تکیه‌گاهی و حل دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 280000 & -140000 \\ -140000 & 122500 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 525 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.005 \\ 0.01 \end{Bmatrix} m$$

میله ایزوپارامتریک

در میله نشان داده شده با فرض یک المان ۴ گره‌ای، اگر بار متمرکزی در فاصله ۵ متری از تکیه‌گاه وارد شده باشد با استفاده از فرمول‌بندی ایزوپارامتریک مطلوب است :

الف) محاسبه توابع پایه المان میله ۴ گرهی در مختصات r

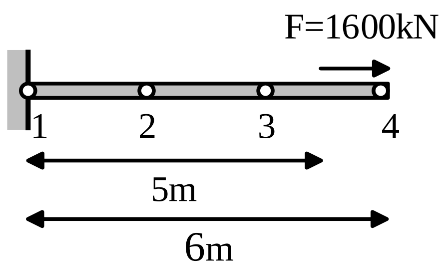
ب) محاسبه ژاکوبین عضو

ج) محاسبه بارهای گره‌ای

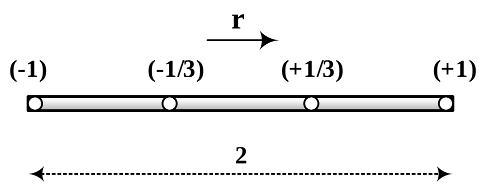
د) تعیین حداقل تعداد نقاط گوسی مورد نیاز از جدول زیر جهت به دست آوردن سختی عضو و جابجایی گره‌ها (دلیل خود را به صورت کوتاه بنویسید)

ه) محاسبه سختی عضو با حداقل تعداد نقاط گوسی ممکن

و) محاسبه جابجایی گره‌ها



راهنمایی : المان مادر برای المان ۴ گره‌ای در حالت یک بعدی به صورت زیر می‌باشد :



$E=200\,GPa$

$A=3000\,mm^2$

Number of points, n	Points, x_i		Weights, w_i	
1	0		2	
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	±0.57735...	1	
3	0		$\frac{8}{9}$	0.888889...
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	±0.774597...	$\frac{5}{9}$	0.555556...
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	±0.339981...	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	0.652145...
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	±0.861136...	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	0.347855...
5	0		$\frac{128}{225}$	0.568889...
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	±0.538469...	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	0.478629...
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	±0.90618...	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	0.236927...

حل:

قسمت الف

$$X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27}\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{INVERSE} XI=\begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16}\\ \frac{1}{16} & -\frac{27}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{1}{16}\\ \frac{9}{16} & -\frac{9}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{9}{16}\\ -\frac{9}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{27}{16} & \frac{9}{16}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{TRANSPOSE}\begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{9}{16}\\ \frac{9}{16} & -\frac{27}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{27}{16}\\ \frac{9}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{9}{16} & -\frac{27}{16}\\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ r\\ r^2\\ r^3\end{pmatrix}\Rightarrow N^T=\begin{bmatrix}N_1=-\frac{9r^3}{16}+\frac{9r^2}{16}+\frac{r}{16}-\frac{1}{16}\\ N_2=\frac{27r^3}{16}-\frac{9r^2}{16}-\frac{27r}{16}+\frac{9}{16}\\ N_3=-\frac{27r^3}{16}-\frac{9r^2}{16}+\frac{27r}{16}+\frac{9}{16}\\ N_4=\frac{9r^3}{16}+\frac{9r^2}{16}-\frac{r}{16}-\frac{1}{16}\end{bmatrix}$$

قسمت ب

$$x(r)=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4=3r+3$$

$$J=\frac{\partial x}{\partial r}=3$$

قسمت ج

در نقطه x=5m نیرو وارد شده است و باید محل آن را در مختصات طبیعی بدست آوریم :

$$5=3r+3\rightarrow r=\frac{2}{3}$$

$$N^T\left(\frac{2}{3}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{16}\\ -\frac{5}{16}\\ \frac{15}{16}\\ \frac{5}{16}\end{bmatrix}\qquad F_{Nodes}=N^T\times F_{x=5}=\begin{pmatrix}\frac{1}{16}\\ -\frac{5}{16}\\ \frac{15}{16}\\ \frac{5}{16}\end{pmatrix}\times1600=\begin{pmatrix}100\\ -500\\ 1500\\ 500\end{pmatrix}kN$$

قسمت د

زیرا بسط و جملات میله ۴ گرهی از درجه ۳ می‌باشند حداقل به گوس ۳ نقطه‌ای جهت محاسبه مناسب سختی و جابجایی نیاز داریم.

قسمت ه

$$GP=\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\quad 0\quad \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$GW=\left(\frac{5}{9}\quad \frac{8}{9}\quad \frac{5}{9}\right)$$

$$B=J^{-1}\times\frac{\partial N}{\partial r}=\left[-\frac{9r^2}{16}+\frac{3r}{8}+\frac{1}{48}\quad \frac{27r^2}{16}-\frac{3r}{8}-\frac{9}{16}\quad -\frac{27r^2}{16}-\frac{3r}{8}+\frac{9}{16}\quad \frac{9r^2}{16}+\frac{3r}{8}-\frac{1}{48}\right]$$

$$K=\sum_{i=1}^{3}w_iB^TEABJ$$

با توجه به شرایط تکیه‌گاهی می‌توان محاسبات را تنها برای درجه آزادی ۲ و ۳ و ۴ انجام داد :

$$B_1=\begin{bmatrix}-0.60714042 & 0.74047375 & -0.15952625 & 0.026192916\end{bmatrix}$$

$$K_1=\begin{bmatrix}368619.49 & -449571.54 & 96854.833 & -15902.778\\ -449571.54 & 548301.38 & -118125.0 & 19395.167\\ 96854.833 & -118125.0 & 25448.624 & -4178.4576\\ -15902.778 & 19395.167 & -4178.4576 & 686.06883\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0.020833333 & -0.5625 & 0.5625 & -0.020833333\end{bmatrix}$$

$$K_2=\begin{bmatrix}694.44444 & -18750.0 & 18750.0 & -694.44444\\ -18750.0 & 506250.0 & -506250.0 & 18750.0\\ 18750.0 & -506250.0 & 506250.0 & -18750.0\\ -694.44444 & 18750.0 & -18750.0 & 694.44444\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}-0.026192916 & 0.15952625 & -0.74047375 & 0.60714042\end{bmatrix}$$

$$K_3=\begin{bmatrix}686.06883 & -4178.4576 & 19395.167 & -15902.778\\ -4178.4576 & 25448.624 & -118125.0 & 96854.833\\ 19395.167 & -118125.0 & 548301.38 & -449571.54\\ -15902.778 & 96854.833 & -449571.54 & 368619.49\end{bmatrix}$$

$$K=K_1+K_2+K_3$$

$$K=\begin{bmatrix}370000 & -472500 & 135000 & -32500\\ -472500 & 1080000 & -742500 & 135000\\ 135000 & -742500 & 1080000 & -472500\\ -32500 & 135000 & -472500 & 370000\end{bmatrix}$$

قسمت و

$$\begin{bmatrix}\Delta_2\\ \Delta_3\\ \Delta_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1080000 & -742500 & 135000\\ -742500 & 1080000 & -472500\\ 135000 & -472500 & 370000\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}-500\\ 1500\\ 500\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0053772\\ 0.0109191\\ 0.0133333\end{bmatrix}m$$