

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تحليل سازه ها (۱)

# STRUCTURAL ANALYSIS (1)

مدرس : علیرضا قربی

زمستان ۹۴ و بهار ۹۵

# فهرست مطالب

---

فصل اول : کلیات و تشخیص سازه ها

فصل دوم : نیروهای داخلی در تیرها و قاب ها

فصل سوم : خراباها (به جز مبحث درجه نامعینی بقیه فصل حذف می باشد)

فصل چهارم : خطوط تاثیر

فصل پنجم : تغییر شکل ها

فصل ششم : تحلیل سازه های نامعین (روش نیرو)

# نسخه جدید اسلایدها

---

برای دانلود نسخه جدید اسلایدها به آدرس زیر مراجعه  
فرمایید :

[www.Ghorbi.com](http://www.Ghorbi.com)

# فصل (۱)

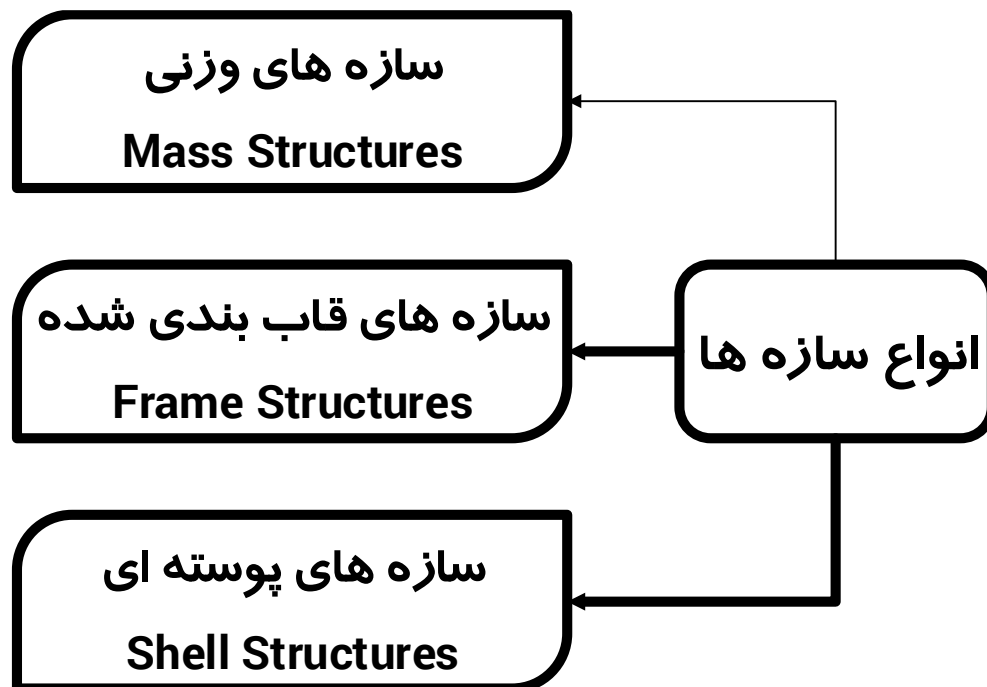
کلیات و تشخیص سازه ها

# سازه (Structure)



- سازه عضو یا مجموعه ای از اعضا می باشد که برای تحمل یا انتقال نیرو به کار می رود.
- هر چیزی سازه محسوب می شود. برای مثال بدن انسان دارای اسکلت، دوچرخه دارای قاب و ساختمان ها شامل تیرها و ستون ها و سقف و سایر اجزا می باشد.

# طبقه بندی سازه ها (بر اساس هندسه)



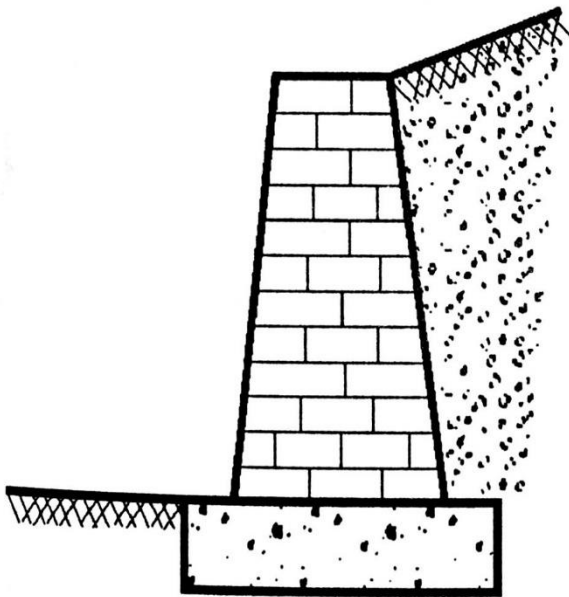
# سازه های وزنی

- از مواد سنگین و توپر ساخته شده اند.
- معمولا ضخیم می باشند.
- پایداری و مقاومت این سازه ها در برابر بارهای وارده بستگی به وزن آن ها دارد.
- نمونه های طبیعی آن کوه ها و سواحل مرجانی
- نمونه های ساخت بشر آن شامل سدها و دیوارهای حائل می باشند.

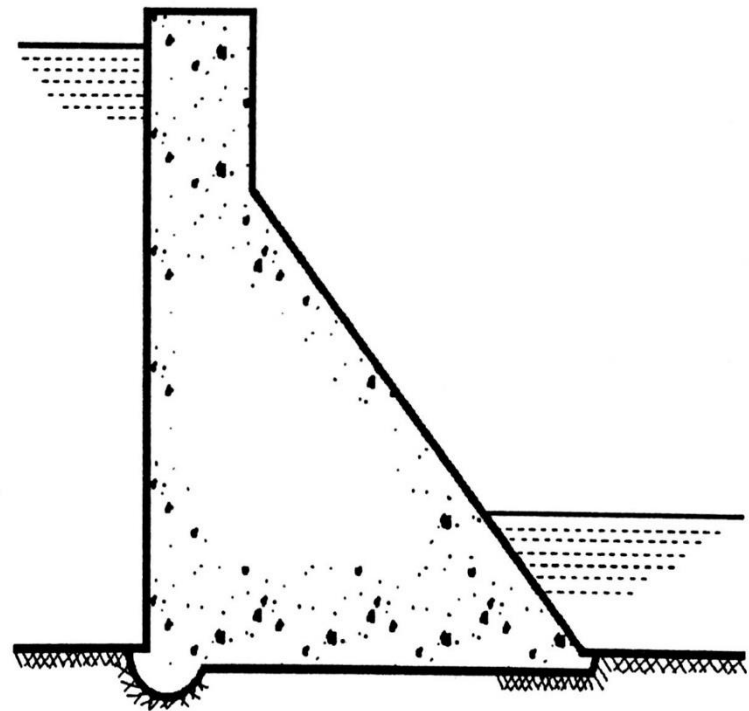




# سازه های وزنی



دیوار حایل



سد وزنی

# سازه های وزنی





# سازه های وزنی



# سازه های پوسته ای



- نمونه های طبیعی آن شامل صدف، جمجمه، پوست تخم مرغ و ... می باشد.
- تحلیل این گونه سازه ها که دارای کاربردهای صنعتی یا معماری هستند معمولاً در دروسی همچون تئوری صفحات و پوسته ها و اجزاء محدود مورد توجه قرار می گیرد.

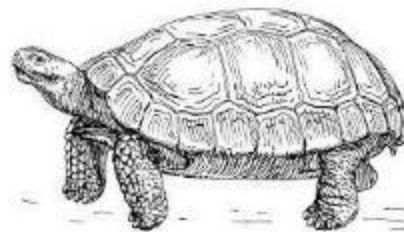
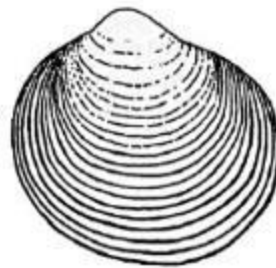
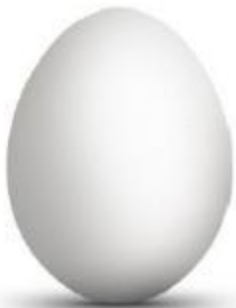
- **پوسته ها** از لایه نازکی از مصالح تشکیل شده اند و به علت توزیع بار مناسب دارای مقاومت بسیار خوبی در برابر بارهای وارده می باشند.
- عامل پایداری در پوسته ها هندسه آن ها می باشد.
- در بسیاری از سازه های مهندسی همانند سقف ها، گنبدها، مخازن، سیلوها، دال های بتنی و ... مورد استفاده قرار می گیرند.



# سازه های پوسته ای



# سازه های پوسته ای طبیعی



# سازه های قاب بندی شده



- رایج ترین نوع سازه ها می باشند.
- معمولا از اعضای بلند تشکیل شده اند که در انتها به یکدیگر متصل شده اند.
- عامل پایداری آن ها در برابر بارهای وارده بستگی به ترکیب هندسی اجزای آن دارد و معمولا وزن مجموعه در مقایسه با بارهای اعمال شده کوچک می باشد.
- به این نوع سازه ها اسکلتی نیز گفته می شود.
- قاب های چوبی، فلزی و بتنی ساختمان ها، خرپاهای مسطح و فضایی و سازه های فضاکار، جرثقیل ها و ... از جمله سازه های قاب بندی شده می باشند.
- تمرکز اصلی تحلیل سازه های ۲و۱ سازه های قاب بندی شده می باشد.



# سازه های قاب بندی شده





# تحلیل سازه

---

پیش بینی عملکرد سازه مورد نظر تحت بارهای وارده یا سایر اثرات خارجی همانند حرکت تکیه گاه (نشست) ، تغییرات حرارت و ...

# هدف از تحلیل سازه

---

- بررسی پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه
- تعیین واکنش های تکیه گاهی
- تعیین نیروهای داخلی
- محاسبه تغییر شکل سازه

# سازه های فضایی (سه بعدی)

- همه سازه ها سه بعدی هستند، یعنی حجمی از فضا را اشغال کرده و در اختیار بهره بردار قرار می دهد.
- دسته بسیار بزرگی از سازه های سه بعدی از نقطه نظر تحلیل قابل تبدیل به مجموعه ای از سازه های دو بعدی هستند، یعنی می توان آن ها را با توجه به اطلاعات مربوط به صورت دو بعدی تحلیل نمود.
- دسته دیگری از سازه های فضایی وجود دارند که رفتار آن ها قابل تجزیه به رفتار دوبعدی نیست و حتماً بایستی به صورت سه بعدی تحلیل شوند، به این نوع سازه ها، **سازه فضاکار** گفته می شود. پوسته ها دسته بسیار مهمی از سازه های فضاکار هستند.

# سازه های صفحه ای (دو بعدی)

- سازه هایی می باشند که در آن، سازه و بارهای وارد بر آن همگی در یک صفحه قرار دارند.
- درس تحلیل سازه ۱ اختصاص به سازه های قاب بندی شده صفحه ای دارد.
- وجود بعد سوم در سازه های فضایی اصول و روش های کار را تغییر نمی دهد و فقط به علت وجود بعد سوم عملیات قدری پیچیده تر و پر حجم تر می شود.

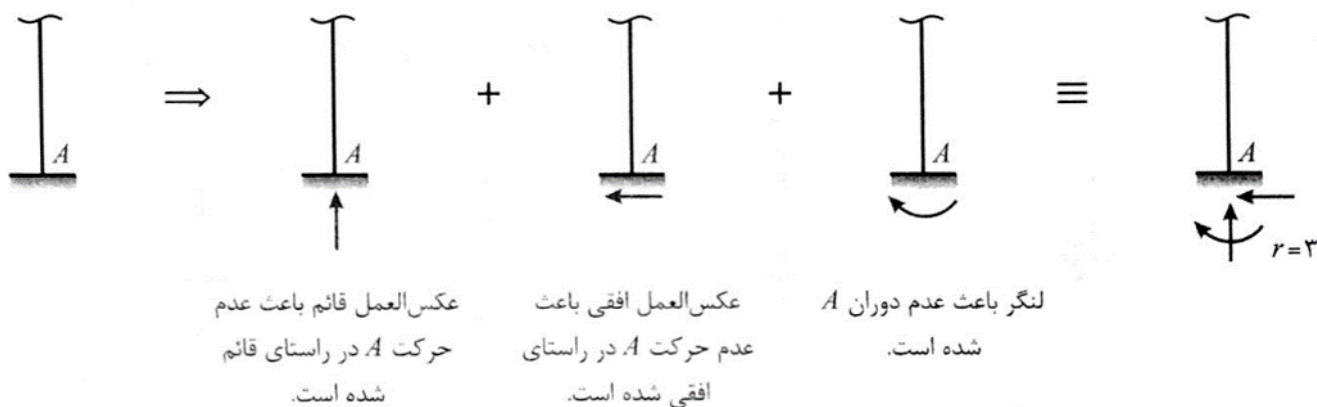
# انواع تکیه گاه

---

- تکیه گاه گیردار
- تکیه گاه مفصلی ثابت یا لولایی
- تکیه گاه مفصلی متحرک یا غلتکی
- تکیه گاه غلتک برشی (لغزنده گیردار، تلسکوپی)
- تکیه گاه ارتجاعی یا فنری
- تکیه گاه رابط یا میله ای

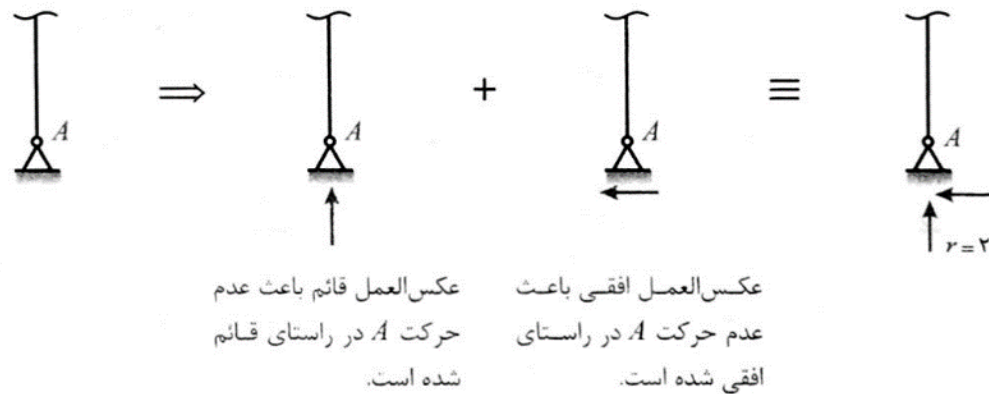
# تکیه گاه گیردار

تکیه گاه گیردار: در این تکیه گاه از حرکت های قائم، افقی و دوران در نقطه  $A$  جلوگیری شده و به همین منظور تکیه گاه باید دارای سه عکس العمل تکیه گاهی باشد.

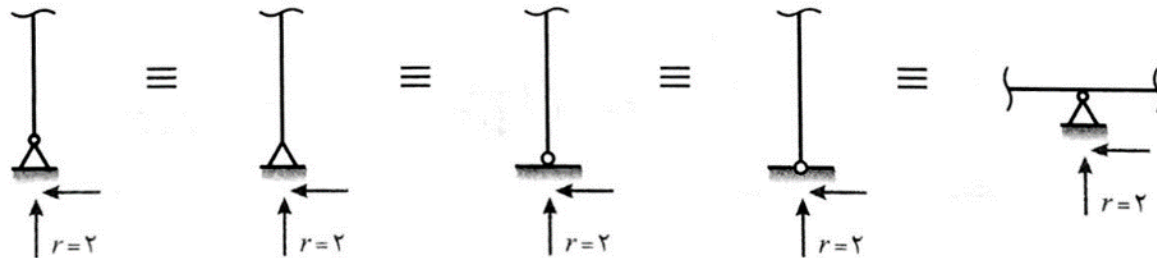


# تکیه گاه مفصلی

**تکیه گاه مفصلی:** در این تکیه گاه از حرکت های قائم و افقی در نقطه  $A$  جلوگیری شده و دوران در محل تکیه گاه آزاد است. به همین منظور این تکیه گاه باید دارای دو عکس العمل تکیه گاهی افقی و قائم باشد.

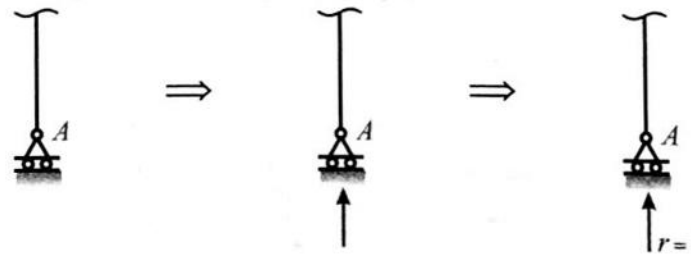


**تذکر:** مدل های دیگری از تکیه گاه مفصلی در شکل های زیر نمایش داده شده است:



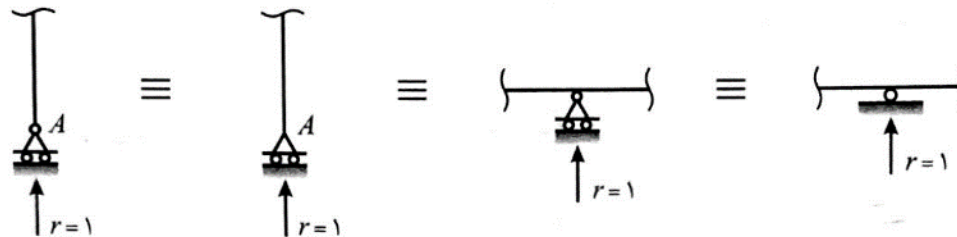
# تکیه گاه غلتکی

**تکیه گاه غلتکی:** در این تکیه گاه، از حرکت قائم در نقطه  $A$  جلوگیری شده و حرکت افقی و دوران در محل تکیه گاه آزاد است. به همین منظور این تکیه گاه باید دارای یک عکس العمل تکیه گاهی باشد.

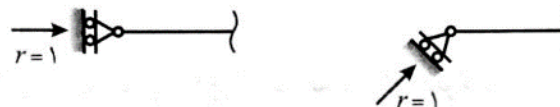


عکس العمل قائم باعث عدم حرکت  
در  $A$  راستای قائم شده است.

**تذکر:** مدل های دیگری از تکیه گاه غلتکی در شکل های زیر نمایش داده شده است:



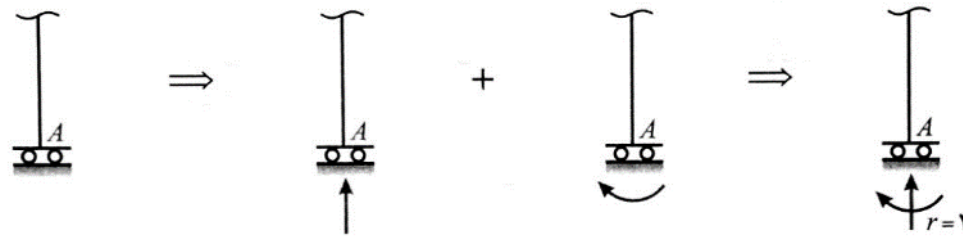
همچنین توجه شود که تکیه گاه غلتکی به صورت افقی و مایل نیز می تواند در سازه قرار گیرد. در شکل های زیر، عکس العمل تکیه گاه در این حالات نشان داده شده است:





# تکیه گاه غلتک برشی (لغزنده گیردار)

- **تکیه گاه لغزنده گیردار:** در این تکیه گاه، از حرکت قائم و دوران در  $A$  جلوگیری شده و حرکت افقی در محل تکیه گاه آزاد است. به همین منظور این تکیه گاه باید دارای دو عکس العمل تکیه گاهی باشد.

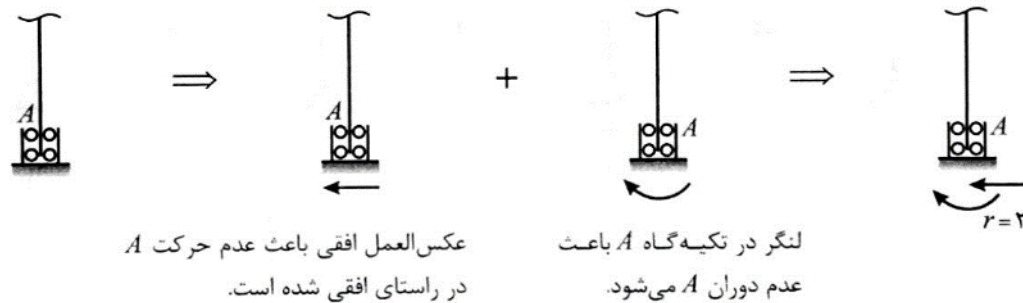


عکس العمل قائم باعث عدم حرکت  $A$  در راستای قائم شده است.

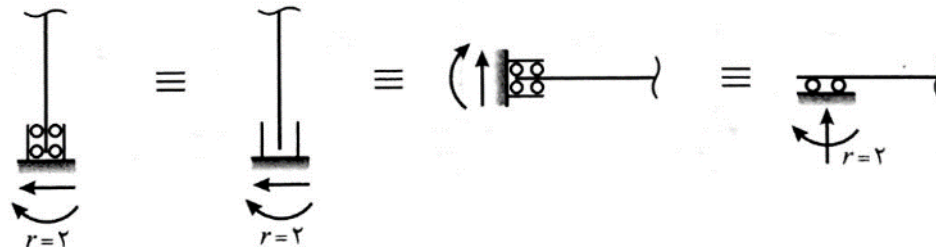
لنگر در تکیه گاه  $A$  باعث عدم دوران  $A$  می شود.

# تکیه گاه غلتک برشی (تلسکوپی)

- **تکیه گاه تلسکوپی:** در این تکیه گاه، از حرکت افقی و دوران در  $A$  جلوگیری شده و حرکت قائم در محل تکیه گاه آزاد است. به همین منظور این تکیه گاه باید دارای دو عکس العمل تکیه گاهی باشد.



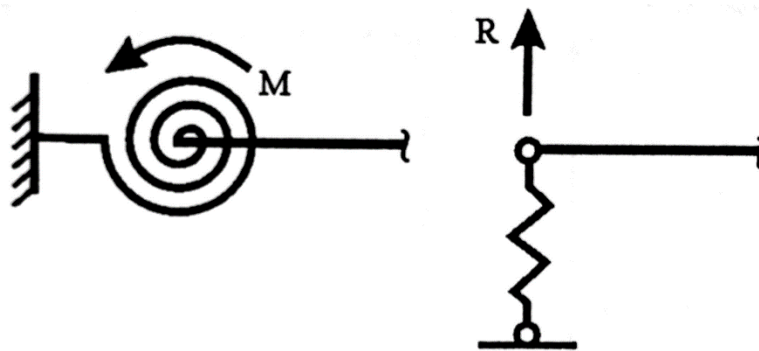
**تذکر:** مدل های دیگری از تکیه گاه تلسکوپی در شکل های زیر نمایش داده شده است:



# تکیه گاه ارتجاعی یا فنری

در این نوع تکیه گاه ها، عکس العمل های مؤثر به جسم متناسب با سختی (قابلیت تغییر مکان و دوران) محیط تکیه گاهی در محل اتکا می باشند.

- عکس العمل فنر انتقالی (شکل الف):  $R = K \Delta$
- عکس العمل فنر دورانی (پیچشی) (شکل ب):  $M = K \theta$

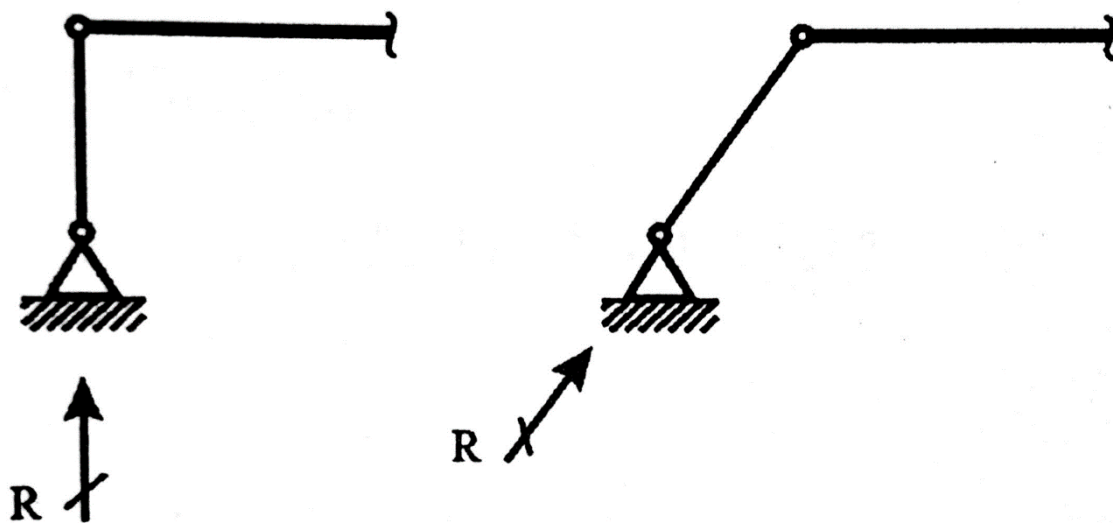


(ب)

(الف)

# تکیه گاه رابط یا میله ای

این نوع تکیه گاه از میله کوتاه که در دو انتها مفصل (لولا) شده است تشکیل شده است و عکس العمل آن نیرویی در امتداد محور میله می باشد.



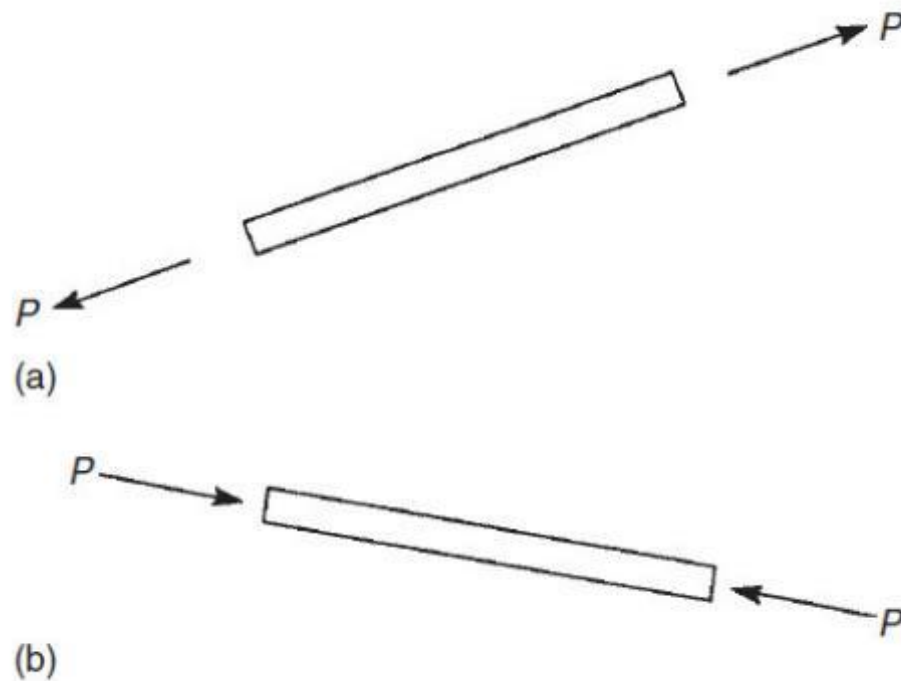
# انواع نیروهای سازه ای

---

- نیروی محوری (کششی و فشاری)
- نیروی برشی
- ممان (لنگر) خمشی
- ممان (لنگر) پیچشی

# نیروی محوری

- نیروهای محوری در امتداد محور طولی عضو سازه می باشند.
- اگر اثر نیروی محوری افزایش طول عضو باشد، عضو در کشش قرار دارد و نیروی اعمال شده کششی نام دارد. شکل a

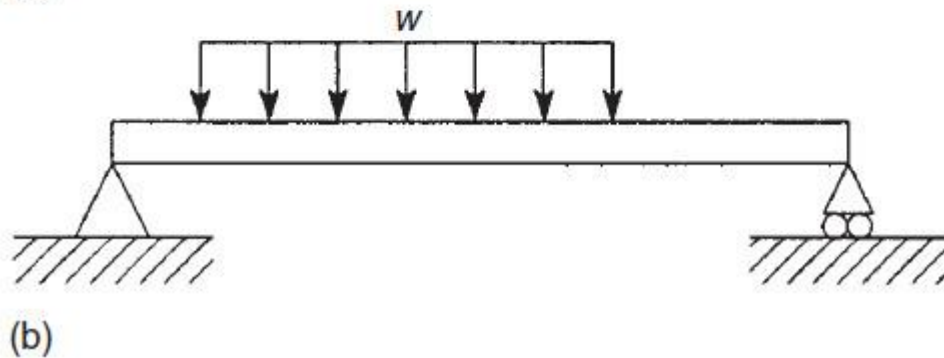
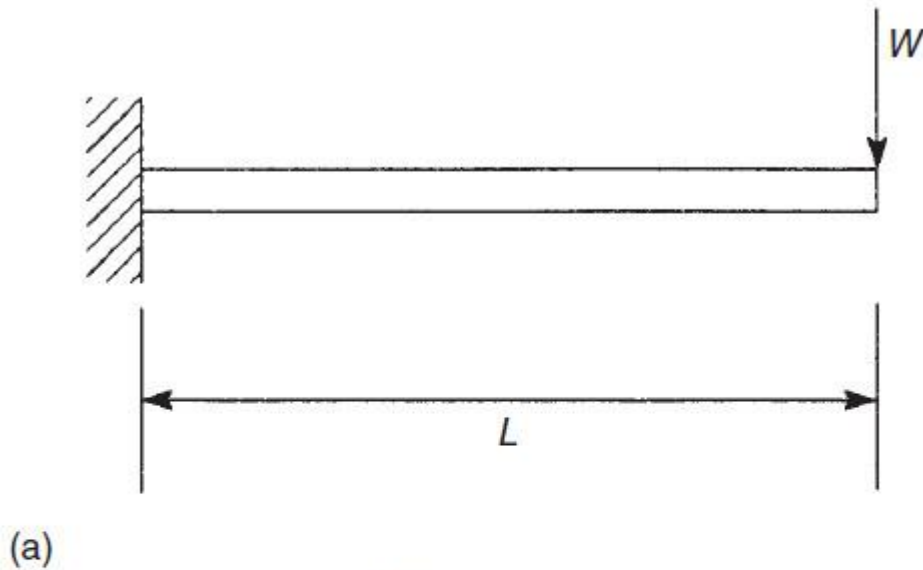


- اگر اثر نیروی محوری کاهش طول عضو باشد، عضو در فشار قرار دارد و نیروی اعمال شده فشاری نام دارد. شکل b و c



# نیروی برشی

- نیروی برشی به صورت عمود بر محور طولی عضو وارد می شود.
- شکل a بار متمرکز (برشی)
- شکل b بار گسترده (برشی)



# ممان خمشی

- در عمل اعمال ممان خمشی خالص مانند شکل a سخت می باشد.
- معمولاً، ممان خمشی خالص از طریق اعمال نیرو به سایر اعضا مجاور به وجود می آید.

- شکل b تیری را

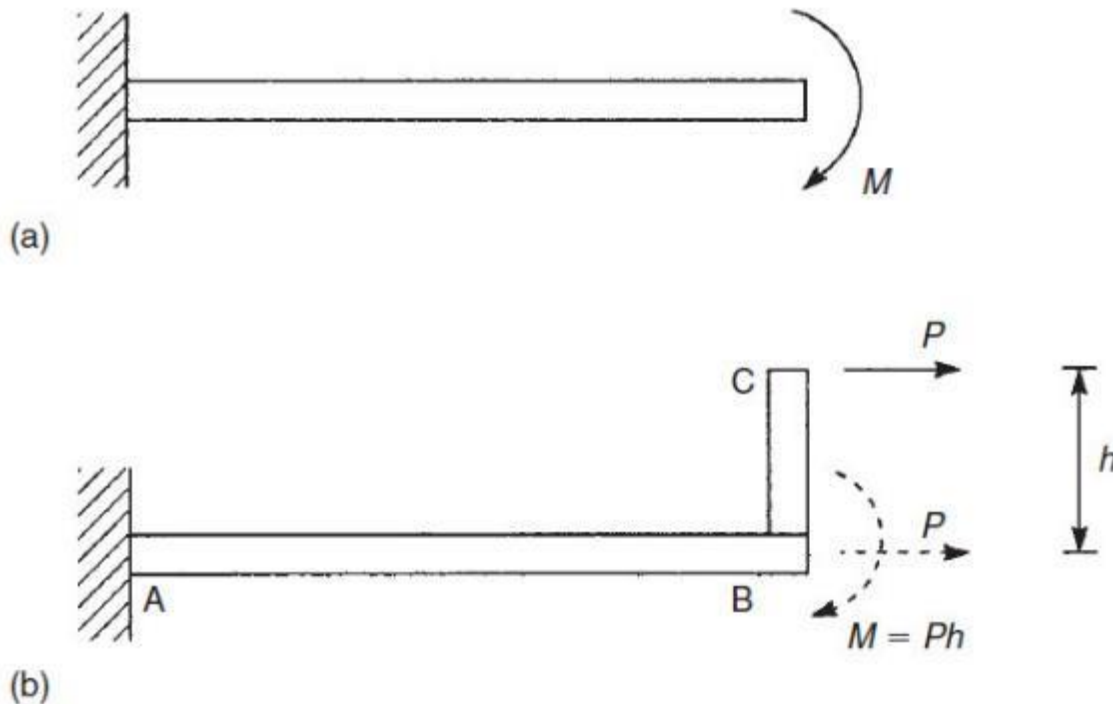
نشان می دهد که

تحت نیروی

محوری  $P$  و ممان

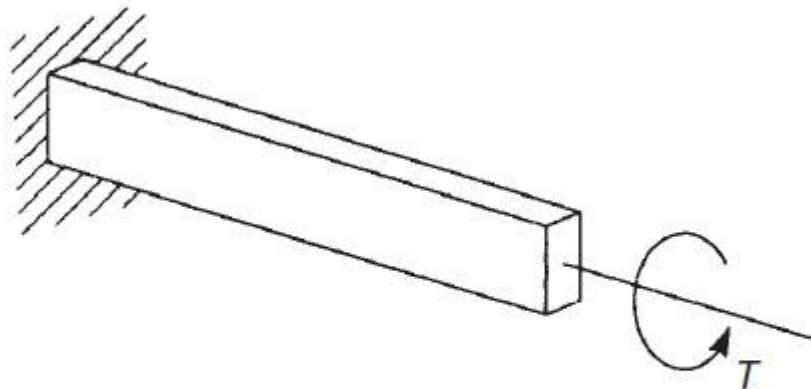
خمشی  $M = Ph$

قرار گرفته است.

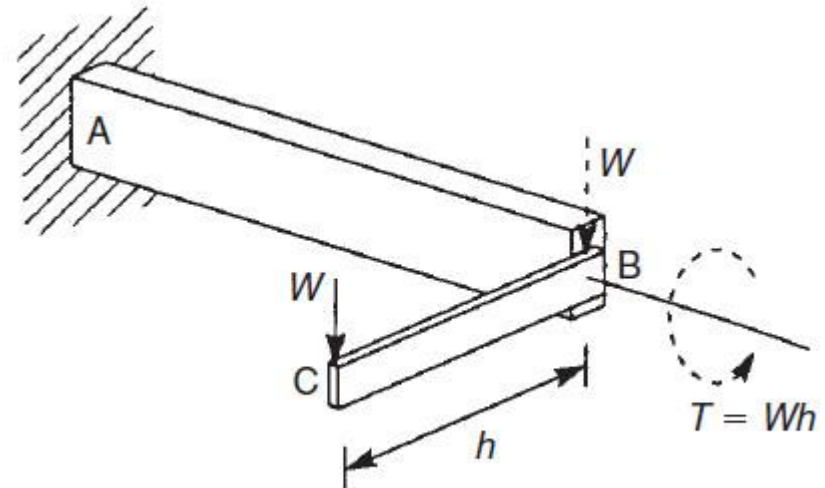




# ممان پیچشی



(a)



(b)

## طبقه بندی سازه های اسکلتی بر اساس مکانیزم انتقال نیرو

---

☐ خرپا صفحه ای (۲ بعدی)

☐ تیر (۲ بعدی)

☐ قاب صفحه ای (۲ بعدی)

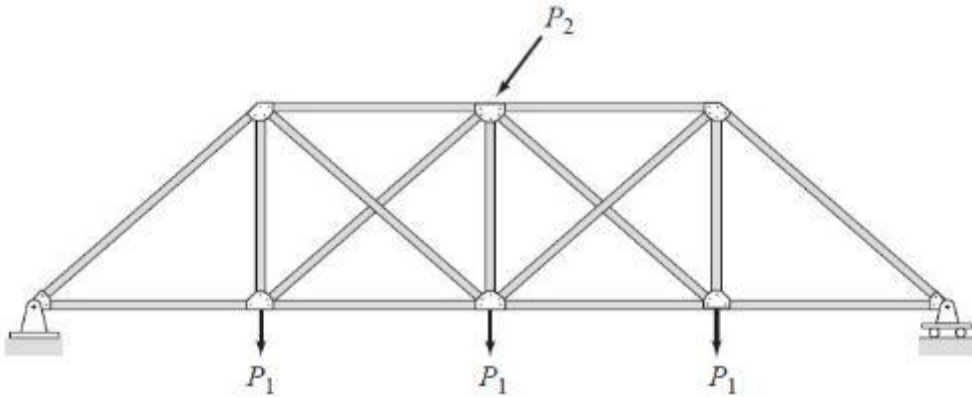
☐ خرپا فضایی (۳ بعدی)

☐ شبکه (۳ بعدی)

☐ قاب فضایی (۳ بعدی)

☐ قوس ها و کابل ها

# خرپا صفحه ای



- خرپا متشکل از اعضای خطی می باشد که در انتها با اتصال مفصلی (لولایی) به یکدیگر متصل شده اند و فقط تحت بار و عکس العمل هایی واقع بر گره های خود می باشند.

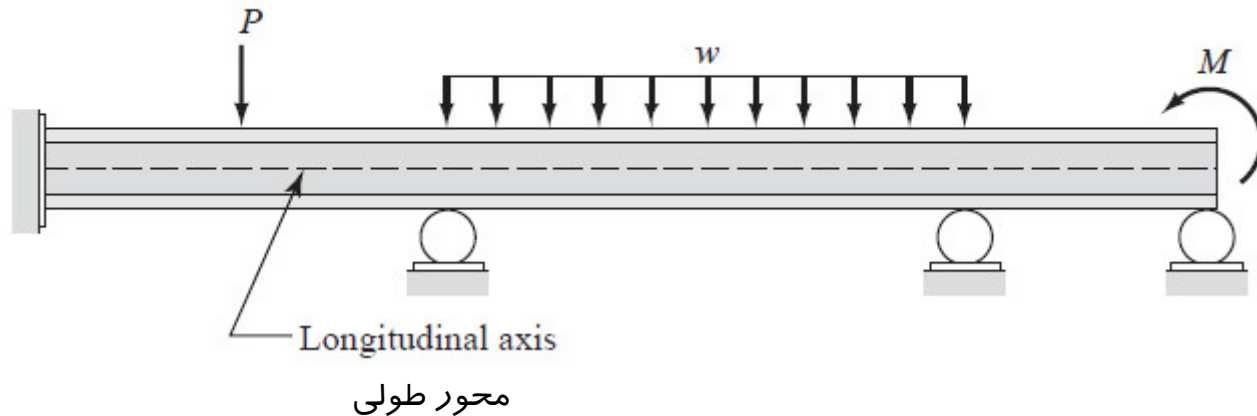
- اعضای خرپا ایده آل، تحت بارگذاری فقط تولید نیروی محوری (کششی یا فشاری) می کنند. به عبارتی خرپاها ممان را انتقال نمی دهند.

- اگر همه اعضا و نیروهای وارده به خرپا در یک صفحه قرار گرفته باشند به آن خرپای صفحه ای گفته می شود.



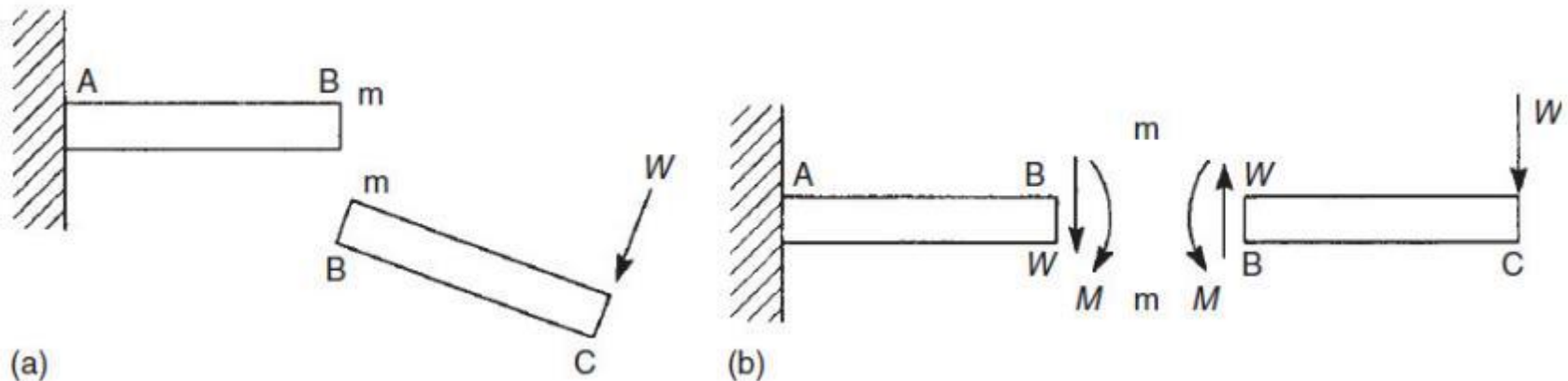
# تیر

- تیر به عنوان سازه یا عضوی خطی و بلند تعریف می شود که تحت بارگذاری قائم نسبت به محور طولی خود قرار گرفته است.
- غالباً اعضای تیر تحت نیروی برشی و ممان خمشی قرار دارند (صرف نظر از نیروی محوری).

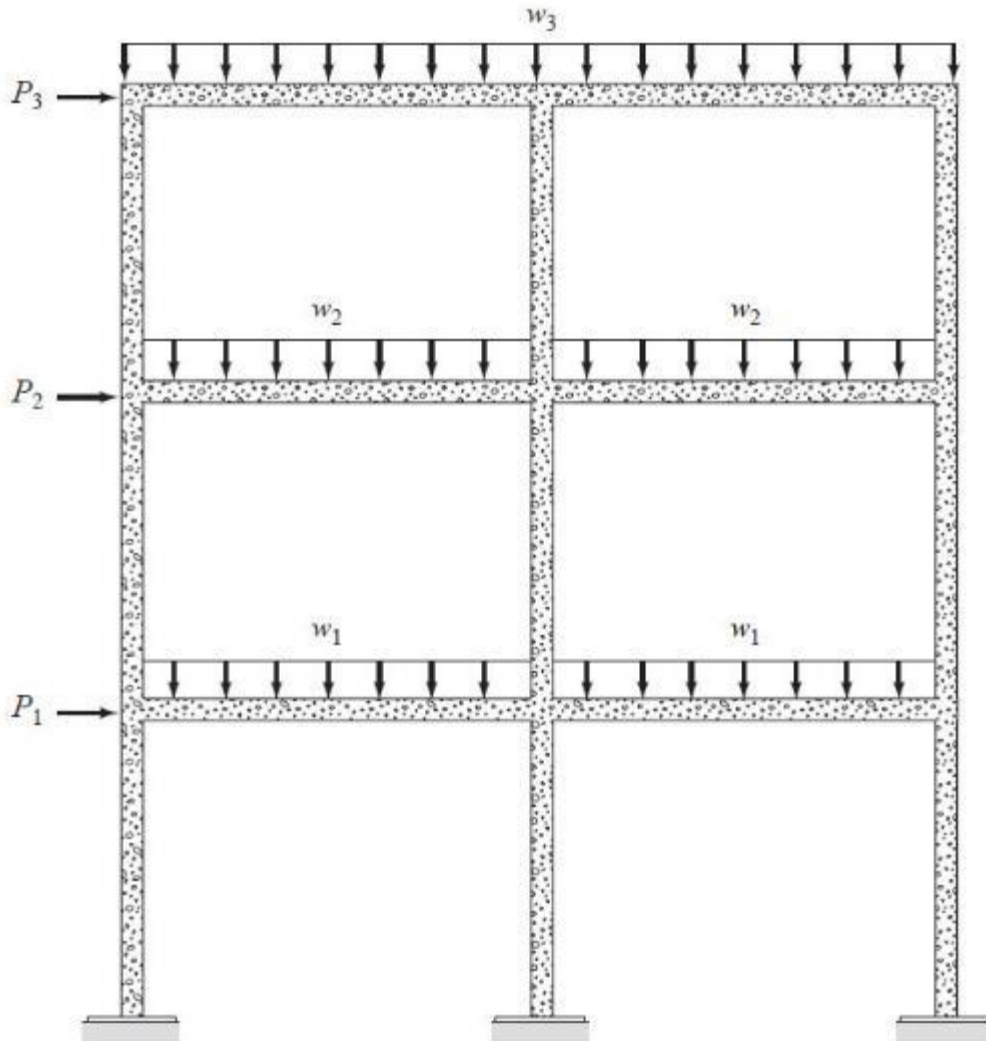


# نمایش نیروهای داخلی تیر

نیروهای داخلی (نیروی برشی و ممان خمشی) حاصل از نیروی برشی وارد شده بر تیر :



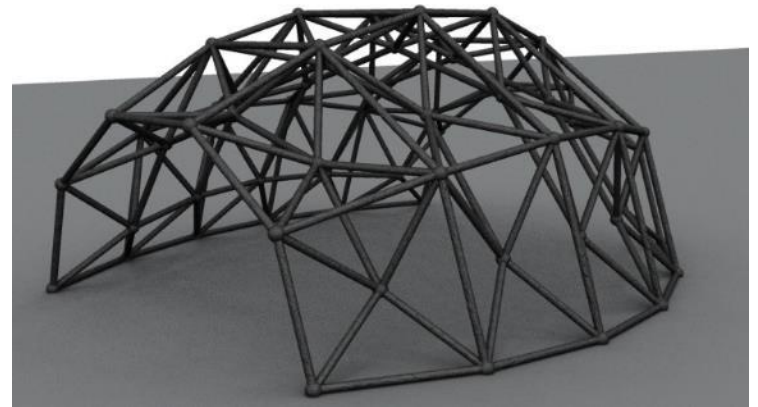
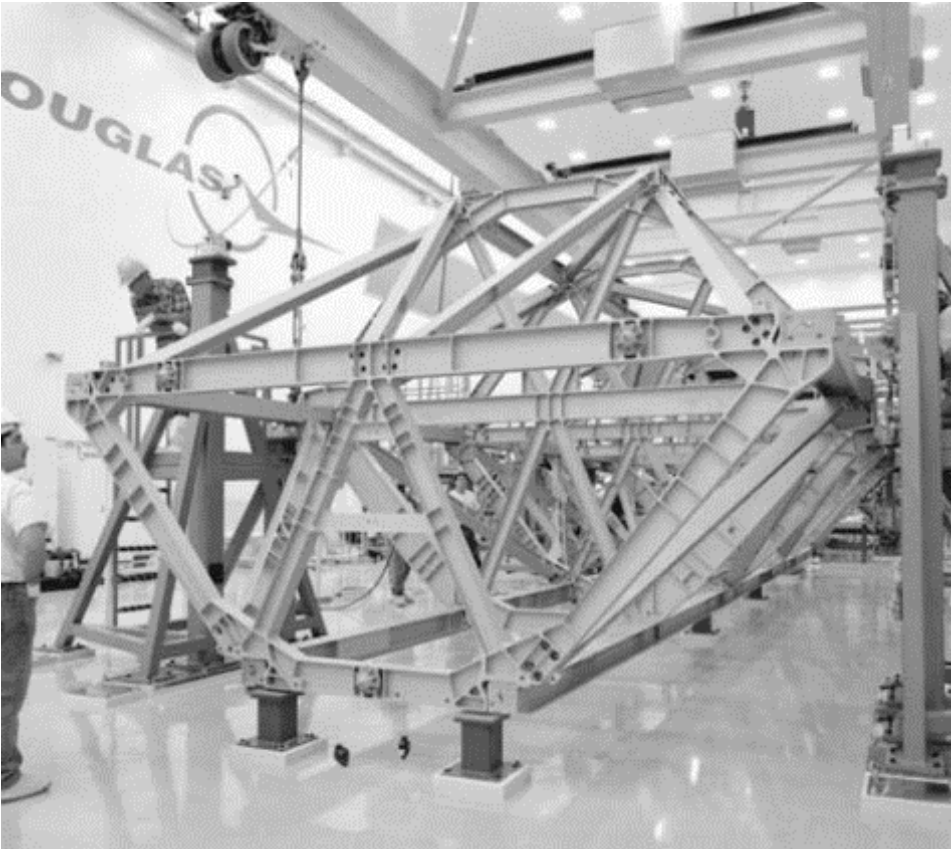
# قاب صفحه ای



- قاب ها از اعضای خطی تشکیل شده اند که در انتها با اتصالات صلب یا لولایی به یکدیگر متصل شده اند.
- بر خلاف خرپاها که فقط در گره ها قابلیت بارگذاری را داشتند، قاب ها قابلیت بارگذاری هم بر روی گره ها و هم بر روی اعضا را دارند.
- اعضای قاب می توانند تحت نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی قرار گیرند.
- اگر همه اعضا و نیروهای وارده به قاب در یک صفحه قرار داشته باشند به آن قاب صفحه ای گفته می شود.

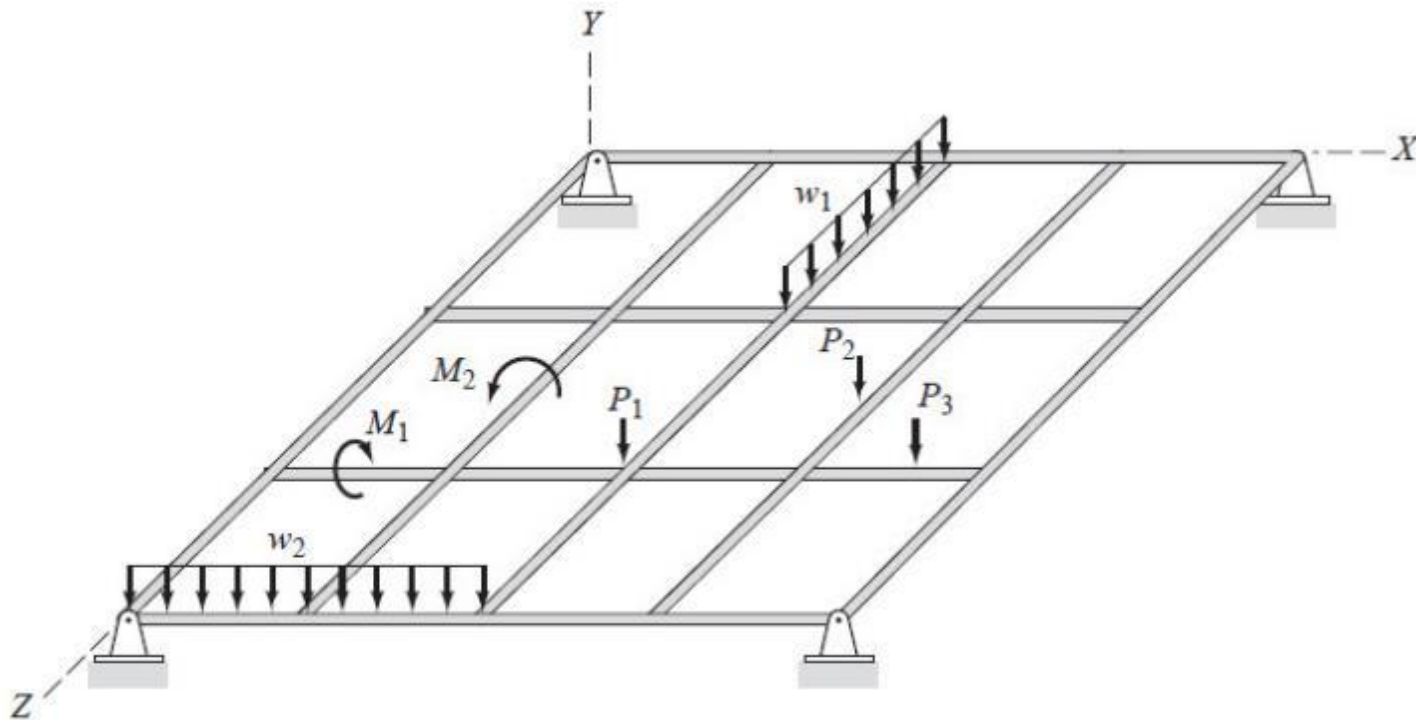
# خرپا فضایی

- خصوصیات آنها همانند خرپاهای صفحه ای می باشند با این تفاوت که اعضا و نیروهای آن در یک صفحه نیستند و نیازمند تحلیل ۳ بعدی می باشند.



# شبکه

- شبکه ها همانند قاب صفحه ای می باشند با این تفاوت که بارگذاری در قاب ها در همان صفحه قاب قرار دارد ولی در شبکه بارگذاری عمود بر صفحه سازه می باشد.
- بنابراین اعضای شبکه می توانند علاوه بر نیروی برشی و ممان خمشی، تحت ممان پیچشی نیز قرار گیرند.





# شبکه



# قاب فضایی

- قاب های فضایی متداول ترین نوع سازه های قاب بندی شده می باشند.
- اعضای قاب فضایی می توانند به هر جهتی در فضا قرار گیرند و در انتها با اتصالات صلب یا لولایی به یکدیگر متصل شوند.
- قابلیت بارگذاری هم بر روی گره ها و هم بر روی اعضا در هر جهتی را دارند.
- اعضای قاب می توانند تحت ممان خمشی حول هر دو محور اصلی، نیروی برشی در هر دو محور اصلی، نیروی محوری و ممان پیچشی قرار گیرند.



# قوس ها و کابل ها

## تفاوت سازه کابلی با خرپا:

- بارگذاری بر روی اعضا نیز وجود دارد.

## تفاوت سازه قوسی با قاب:

- اعضای سازه قوسی خمیده می باشند.

- سازه های کابلی فقط می توانند کشش را تحمل کنند.



# گره

---

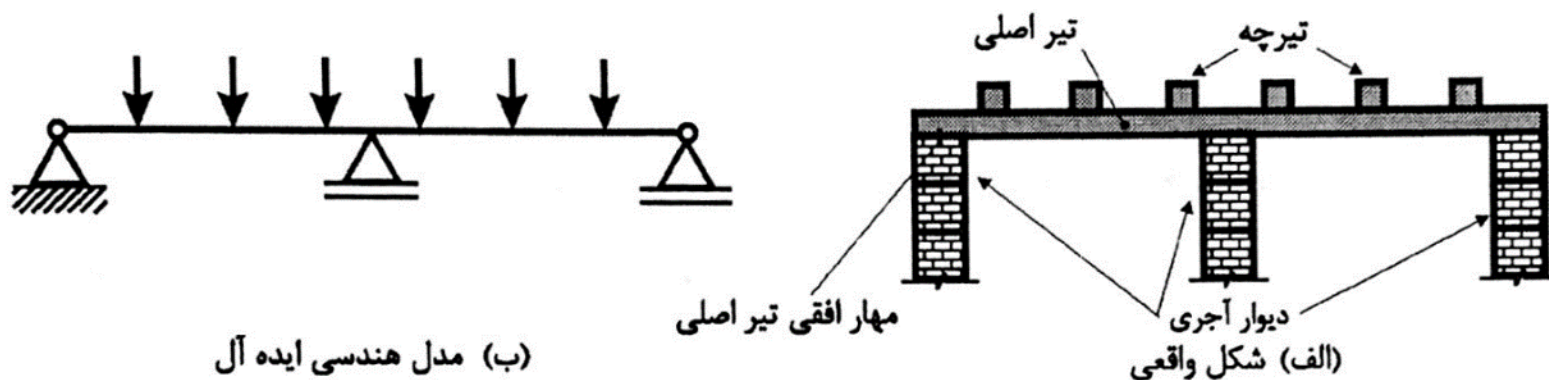
محل برخورد دو یا چند عضو گره نامیده می شود، همچنین محل اتصال اعضای سازه به زمین را نیز گره می نامیم.

# مدل هندسی ایده آل سازه

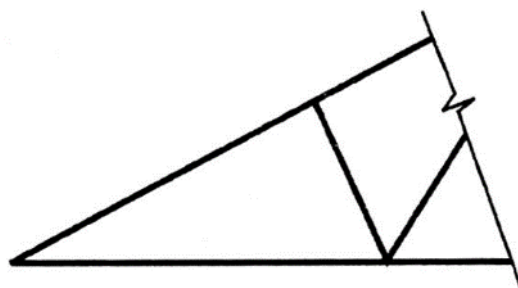
برای بررسی پایداری، تعیین واکنش‌های تکیه گاهی و محاسبه نیروهای داخلی لازم است که سازه واقعی را با یک شکل هندسی متشکل از خطوط ساده که نشان دهنده میان تار اعضا سازه می باشند، جایگزین نماییم.

در مدل کردن سازه باید به نکات زیر دقت نمود :

- ۱- نشان دادن جزئیات ساختمانی در مدل لازم نمی باشد
- ۲- در صورتی که سطح تاثیر بار در مقایسه با مقدار آن کوچک باشد می توان آن بار را متمرکز فرض نمود.
- ۳- در انتخاب تکیه گاه ها و اتصالات باید دقیق بود که نزدیک ترین رفتار را با واقعیت داشته باشند.

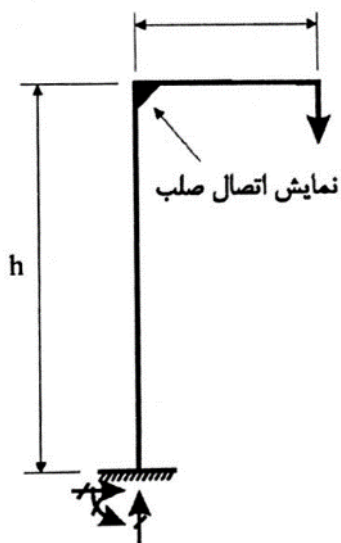


# مدل هندسی ایده آل سازه

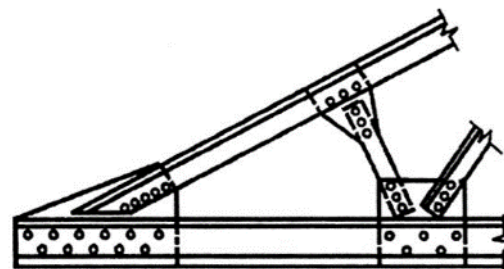


(ت) مدل هندسی ایده آل

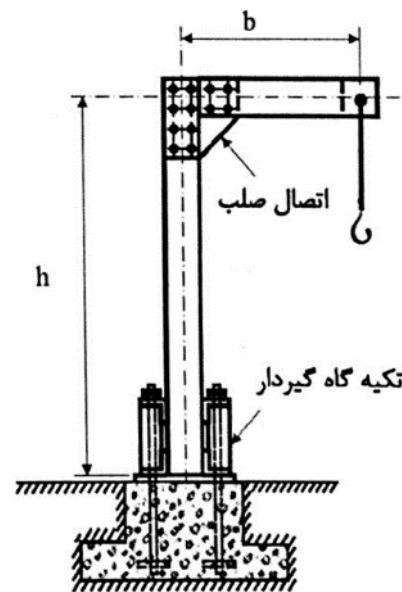
b



(ج) مدل هندسی ایده آل



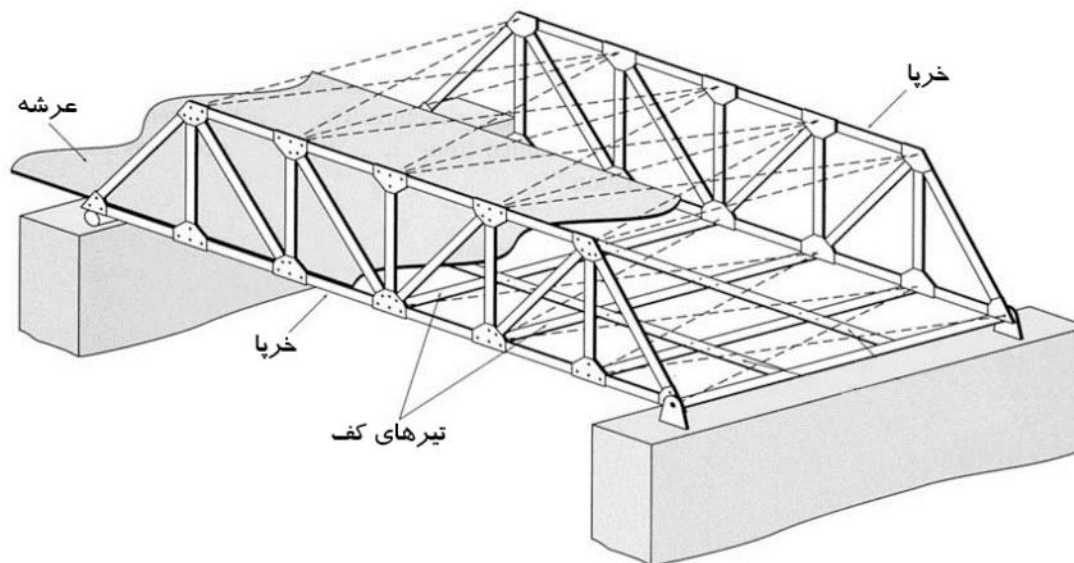
(پ) شکل واقعی



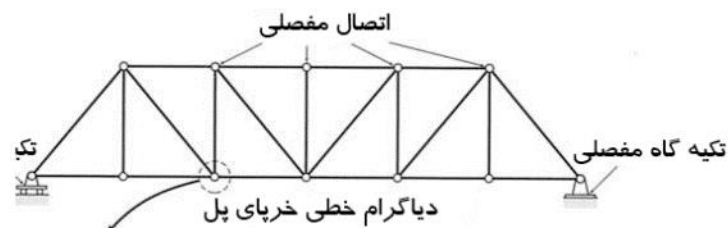
(ث) شکل واقعی



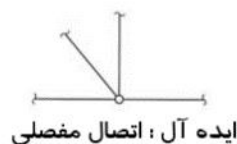
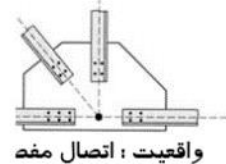
# مدل هندسی ایده آل سازه



(a)



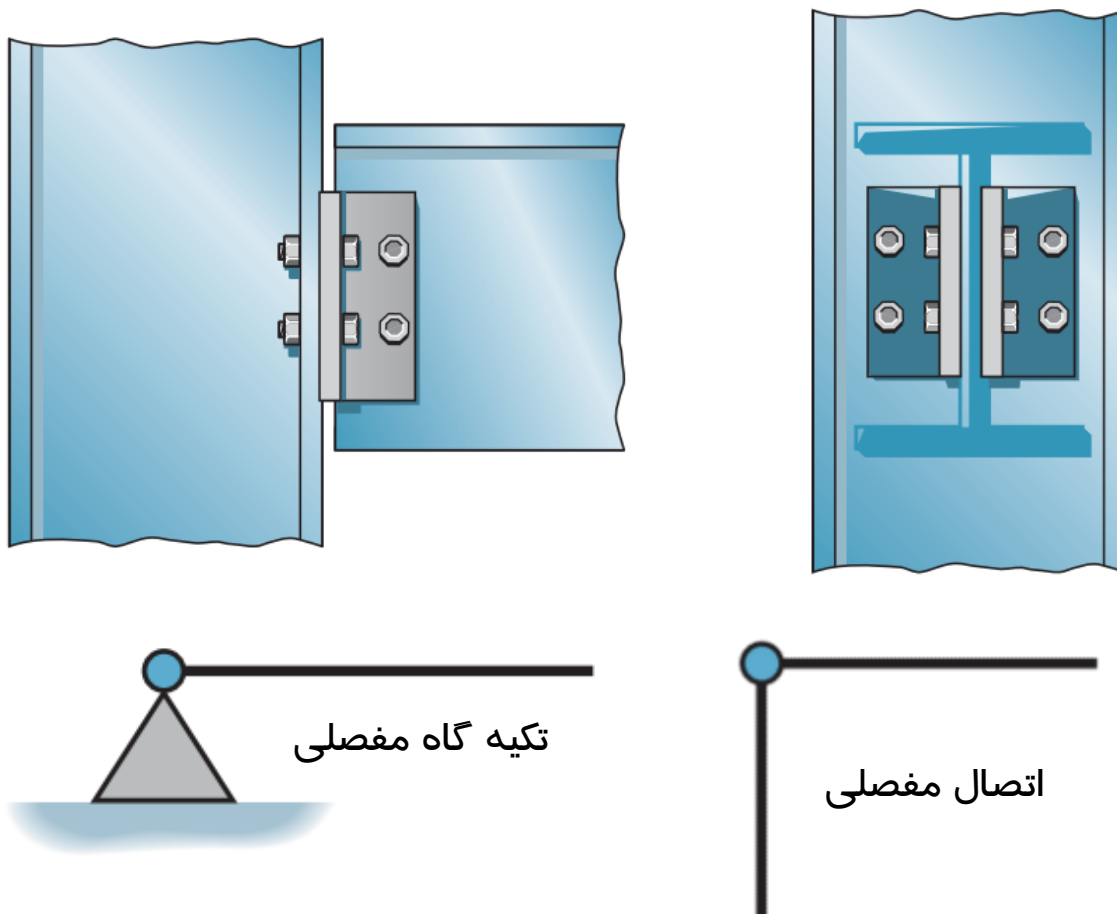
(b)



(c)

# مدل هندسی ایده آل سازه

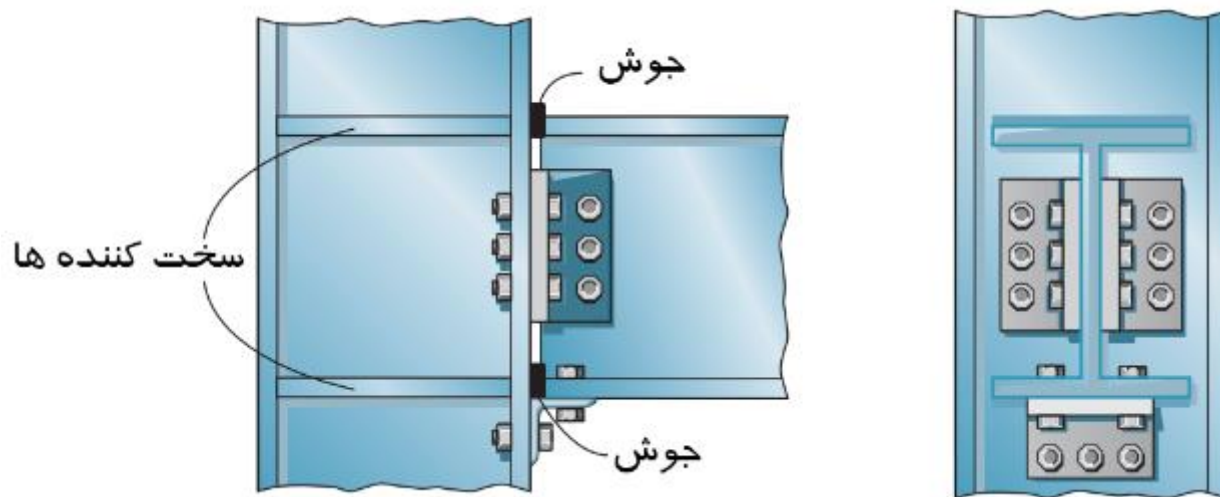
اتصال و تکیه گاه مفصلی





# مدل هندسی ایده آل سازه

اتصال صلب و تکیه گاه گیردار



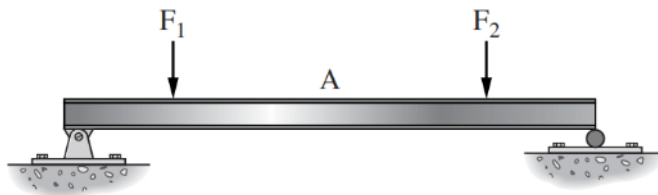
# نمودار جسم آزاد (Free Body Diagram)

اگر تکیه گاه های یک سازه را با واکنش هایی که آن تکیه گاه ها ایجاد می نمایند جایگزین کنیم و سپس سازه را به انضمام کلیه نیروهای که بر آن اثر می کنند نمایش دهیم به شکل بدست آمده نمودار (دیاگرام) جسم آزاد آن سازه می گویند.

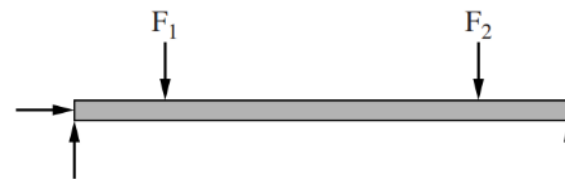
(a) تیر

(b) دیاگرام جسم آزاد تیر با رسم نیروهای خارجی و واکنش های تکیه گاهی

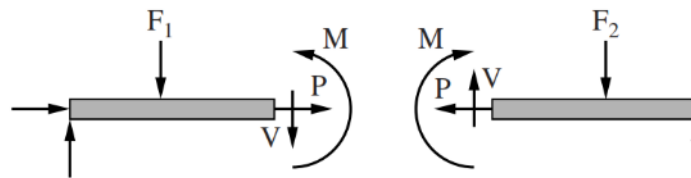
(c) دیاگرام جسم آزاد تیر با رسم نیروهای خارجی و واکنش های تکیه گاهی و نیروهای داخلی



(a)



(b)



(c)

# تعدادل ایستایی (استاتیکی)

به جسمی که ابتدا ساکن بوده و پس از اثر سیستم نیرویی همچنان ساکن باقی بماند، می گویند که در حال تعدادل ایستایی است.

به عبارتی بر آیند نیروهای وارد بر سازه صفر می باشد.

در حالت فضایی :

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

در حالت صفحه ای :

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

معادلات فوق، **معادلات تعدادل ایستایی (استاتیکی)** نامیده می شوند.

# سازه معین و نامعین

هر گاه برای سازه ای بتوان مجهولات (واکنش های تکیه گاهی و نیروهای داخلی) را به تنهایی توسط روابط تعادل ایستایی تعیین نمود، به آن سازه معین ایستایی (استاتیکی) می گوئیم. در غیر این صورت سازه نامعین ایستایی (استاتیکی) می باشد.

## نامعینی به صورت می باشد :

- خارجی : نامعینی مربوط به مازاد بودن عکس العمل های تکیه گاهی
- داخلی : نامعینی مربوط به تعیین نیروهای داخلی اعضا

## درجه نامعینی (استاتیکی)

هر سازه متعادلی دارای تعدادی مجهول و معادله در روند حل سازه می باشد، به تفاضل تعداد مجهولات و معادلات در یک سازه، درجه نامعینی (استاتیکی) گفته می شود.

Degree of Static Indeterminacy , DSI

سازه معین:  $DSI=0$

در غیر این صورت سازه نامعین است.

# درجه نامعینی (استاتیکی) - خرپا صفحه ای

## • روش اول :

$$DSI = (r + 3k) - (c + 3)$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$k$  = تعداد حلقه های بسته در سازه

$c$  = تعداد معادلات شرط

## • روش دوم :

$$DSI = (m + r) - 2n$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$m$  = تعداد اعضا

$n$  = تعداد گره ها

# درجه نامعینی (استاتیکی) - قاب صفحه ای

## • روش اول :

$$DSI = (r + 3k) - (c + 3)$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$k$  = تعداد حلقه های بسته در سازه

$c$  = تعداد معادلات شرط

## • روش دوم :

$$DSI = (3m + r) - (3n + c)$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$m$  = تعداد اعضا

$n$  = تعداد گره ها

$c$  = تعداد معادلات شرط

# درجه نامعینی (استاتیکی) - شبکه

## • روش اول :

$$DSI = (r + 3k) - (c + 3)$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$k$  = تعداد حلقه های بسته در سازه

$c$  = تعداد معادلات شرط

## • روش دوم :

$$DSI = (3m + r) - (3n + c)$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$m$  = تعداد اعضا

$n$  = تعداد گره ها

$c$  = تعداد معادلات شرط



# درجه نامعینی (استاتیکی) - خرپا فضایی

---

$$DSI = (m + r) - 3n$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$m$  = تعداد اعضا

$n$  = تعداد گره ها

# درجه نامعینی (استاتیکی) - قاب فضایی

$$DSI = (6m + r) - (6n + c)$$

$r$  = تعداد عکس العمل های تکیه گاهی مجهول در سازه

$m$  = تعداد اعضا

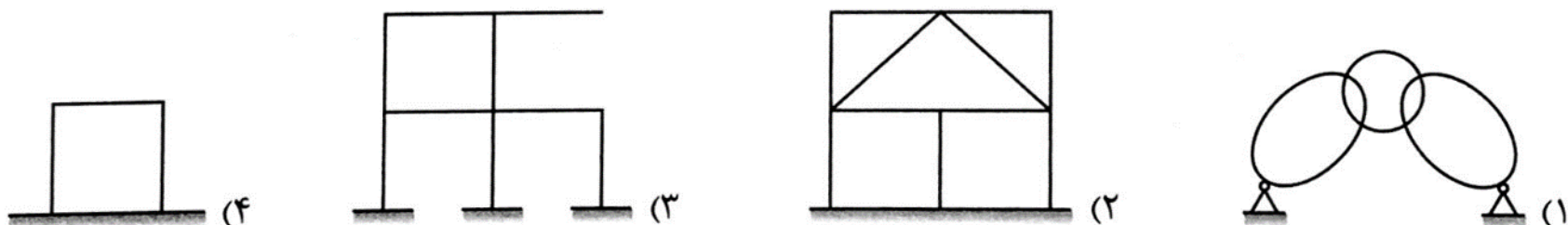
$n$  = تعداد گره ها

$c$  = تعداد معادلات شرط

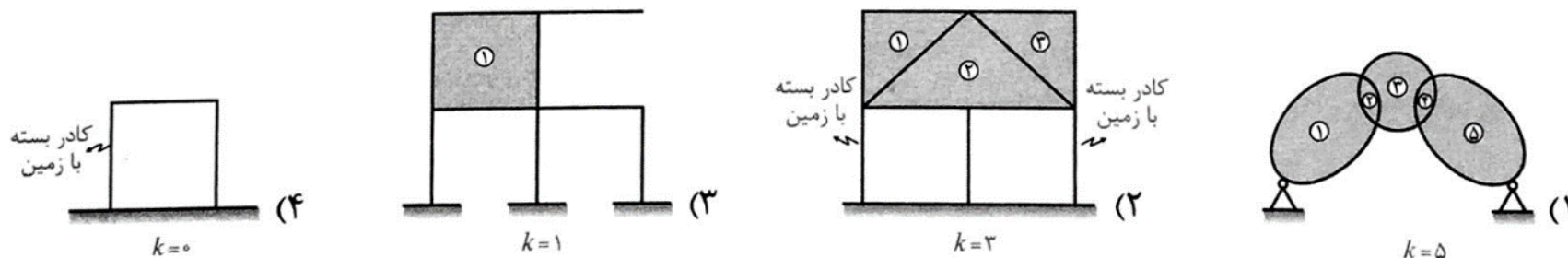
# شمارش حلقه های بسته

• **نکته:** در تعیین درجه نامعینی، فضای بسته ساخته شده توسط اعضا با زمین، در شمارش حلقه های بسته محسوب نمی شود.

• **مثال ۱:** در سازه های زیر تعداد حلقه های بسته برای تعیین درجه نامعینی را مشخص کنید.



• **حل:**



# روابط شرطی

همان طور که بیان شد تعداد معادلات تعادل ایستایی در صفحه ۳ عدد می باشد. در بعضی سازه ها طراح عمداً شرایطی ایجاد می نماید که یکی از نیروهای داخلی صفر گردد. این شرایط ایجاد معادله تعادل مستقل جدیدی می نماید که باید به معادلات تعادل ایستایی اضافه گردد. به این معادله شرطی می گویند.

معادلات شرطی می توانند به علت وجود مفصل خمشی (داخلی) یا غلتک داخلی یا جزئیات مشابه باشند.

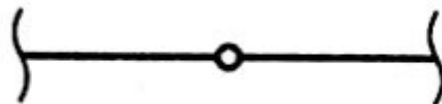
# روابط شرطی - مفصل خمشی

در محل این مفصل، لنگر خمشی داخلی ایجاد شده در عضو صفر می باشد.

$$M=0$$

به عبارتی این موضوع یک معادله کمکی (معادله شرط) در روند حل برای ما ایجاد می کند.

- در محل یک مفصل خمشی، تعداد معادلات شرط (C) برابر با تعداد اعضای متصل به مفصل منهای یک می باشد.



(مفصل خمشی)

# روابط شرطی - مفصل برشی

در محل این مفصل، نیروی برشی داخلی ایجاد شده در عضو صفر می باشد.

$$V=0$$

به عبارتی این موضوع یک معادله کمکی (معادله شرط) در روند حل برای ما ایجاد می کند.

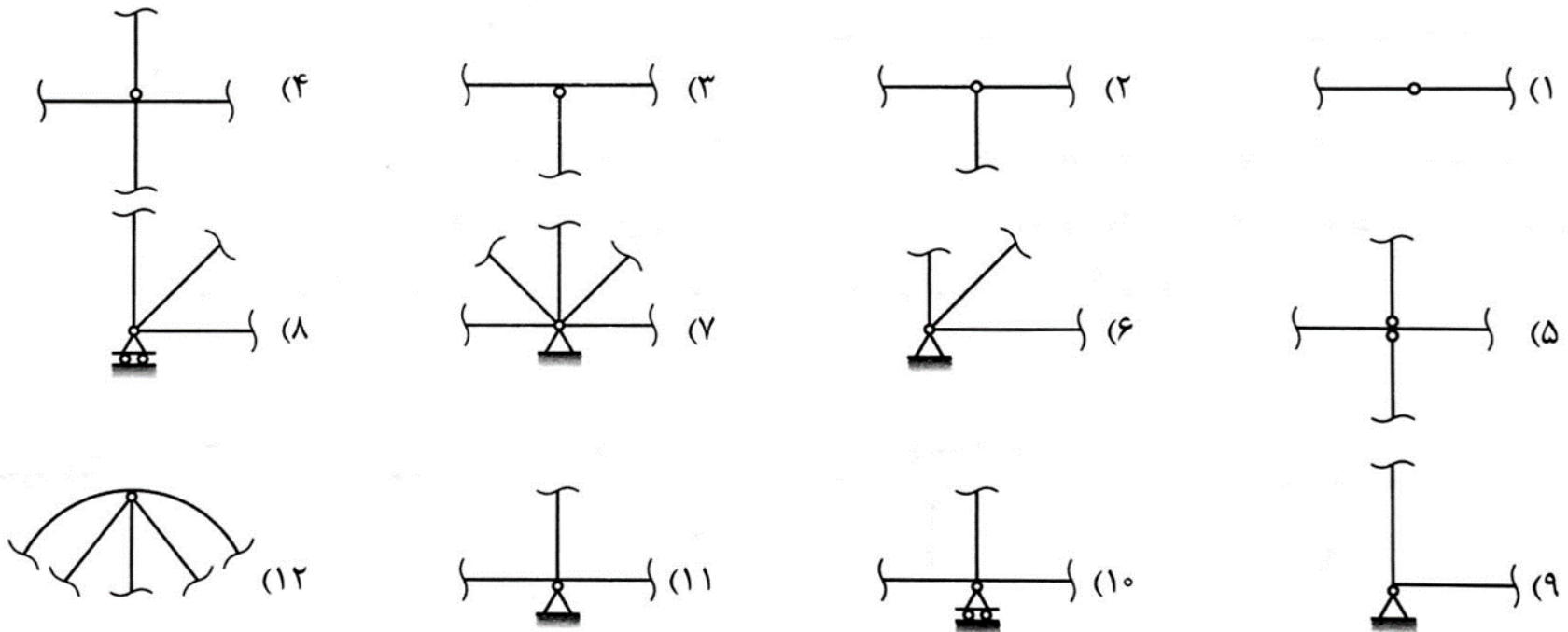
- در محل یک مفصل برشی، تعداد معادلات شرط (C) برابر با تعداد اعضای متصل به مفصل منهای یک می باشد.



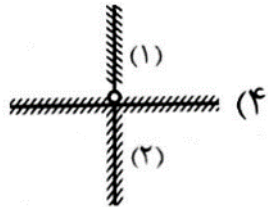
(مفصل برشی)

## مثال ۲

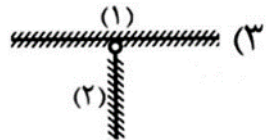
در شکل های زیر تعداد معادلات شرط را مشخص کنید :



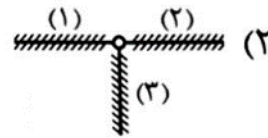
## حل مثال ٢



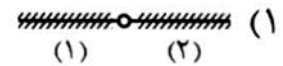
$$c = ٢ - ١ = ١$$



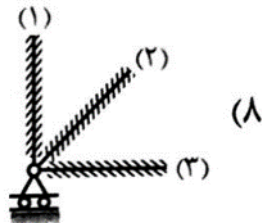
$$c = ٢ - ١ = ١$$



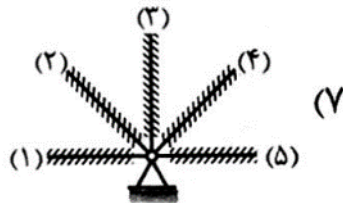
$$c = ٢ - ١ = ٢$$



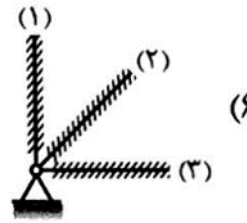
$$c = ٢ - ١ = ١$$



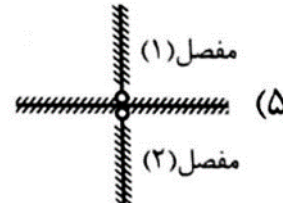
$$c = ٣ - ١ = ٢$$



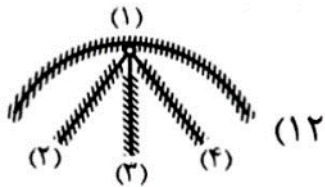
$$c = ٥ - ١ = ٤$$



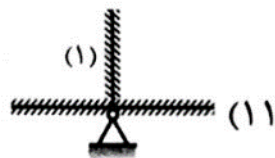
$$c = ٣ - ١ = ٢$$



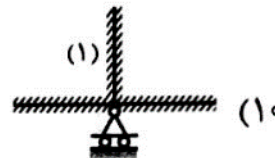
$$c = (٢ - ١) + (٢ - ١) = ٢$$



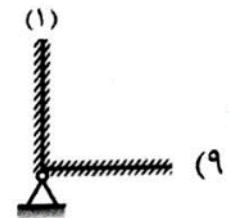
$$c = ٤ - ١ = ٣$$



$$c = ١ - ١ = ٠$$



$$c = ١ - ١ = ٠$$



$$c = ١ - ١ = ٠$$

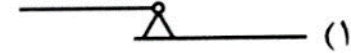
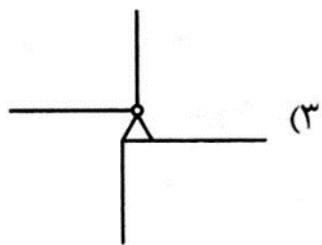
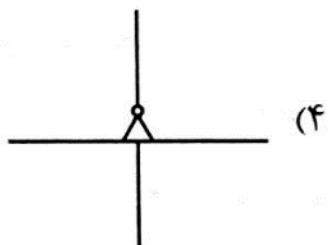


## روابط شرطی - تکیه گاه داخلی

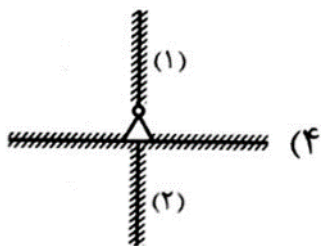
- در محل یک تکیه گاه مفصلی داخلی (یعنی تکیه گاه مفصلی که به زمین متصل نباشد)، تعداد معادلات شرط (C) برابر با تعداد اعضای متصل شده به این تکیه گاه منهای یک می باشد.
- در محل یک تکیه گاه غلتکی داخلی (یعنی تکیه گاه غلتکی که به زمین متصل نباشد)، تعداد معادلات شرط (C) برابر با تعداد اعضای متصل شده به این تکیه می باشد.

## مثال ۳

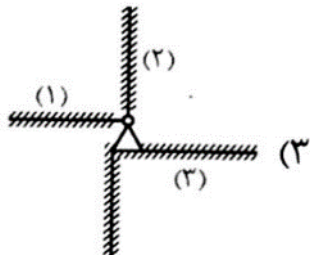
در شکل های زیر تعداد معادلات شرط را مشخص کنید :



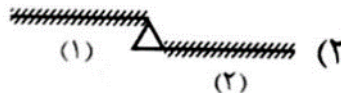
حل :



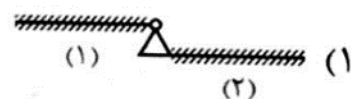
$$c = 2 - 1 = 1$$



$$c = 3 - 1 = 2$$



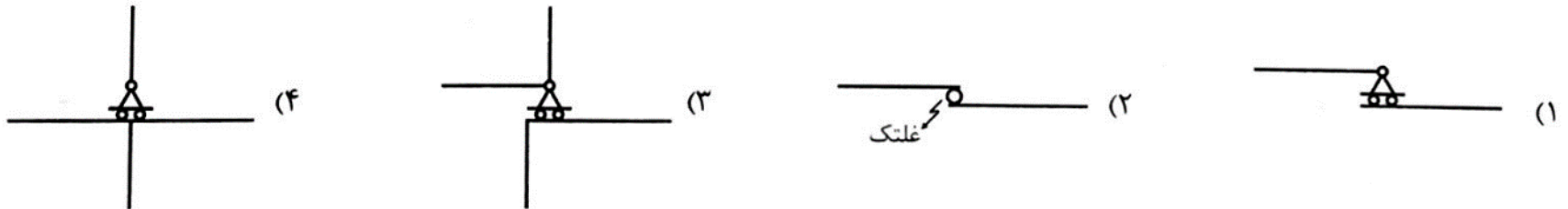
$$c = 2 - 1 = 1$$



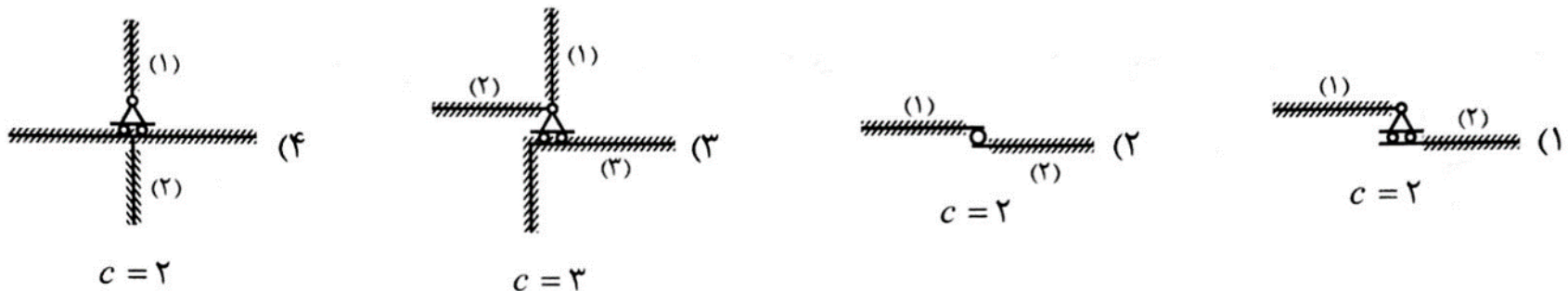
$$c = 2 - 1 = 1$$

# مثال ۴

در شکل های زیر تعداد معادلات شرط را مشخص کنید :



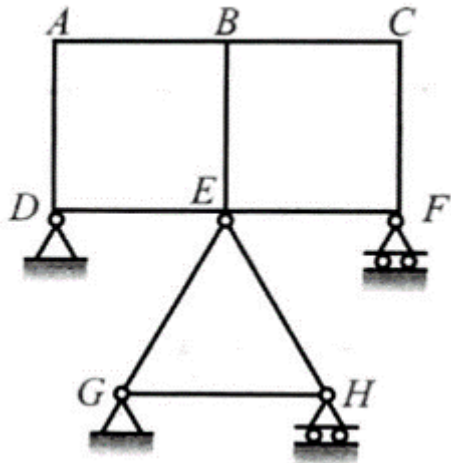
حل :



# مثال ۵

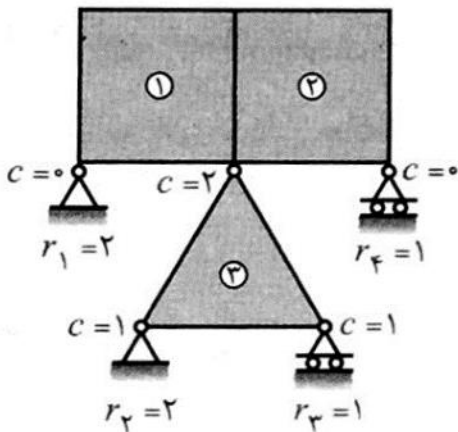
درجه نامعینی سازه روبرو را بدست آورید.

روش اول:



$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 2 + 1 + 1 = 6 \\ c = 2 + 1 + 1 = 4 \\ k = 3 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (6 + 3 \times 3) - (4 + 3) = 8$$

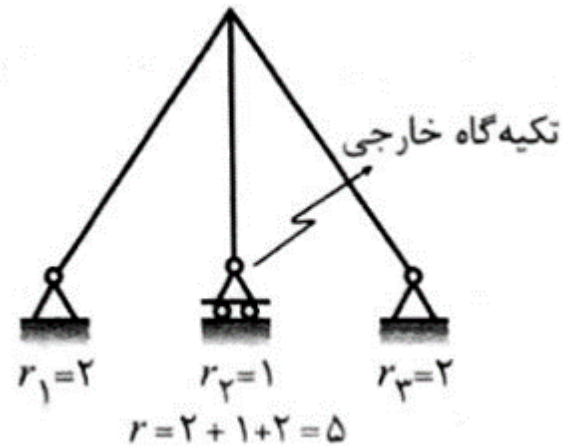
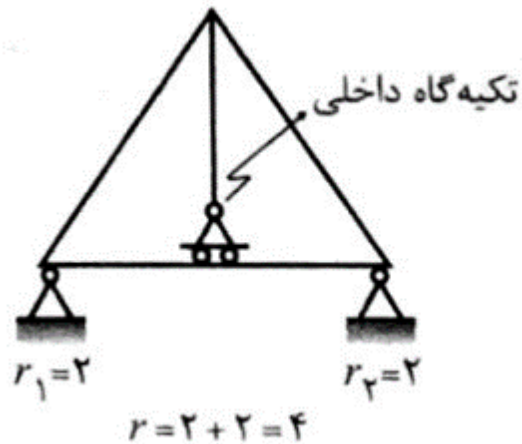
روش دوم:



$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 2 + 1 + 1 = 6 \\ c = 2 + 1 + 1 = 4 \\ m = 10 \\ n = 8 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (3m + r) - (3n + c) = (3 \times 10 + 6) - (3 \times 8 + 4) = 8$$

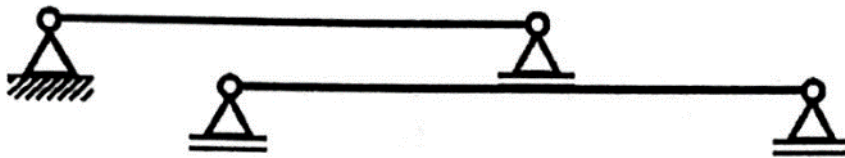
# شمارش عکس العمل های تکیه گاهی

**نکته:** تکیه گاه های داخلی در شمارش ۲ وارد نمی شوند!



## مثال ۶

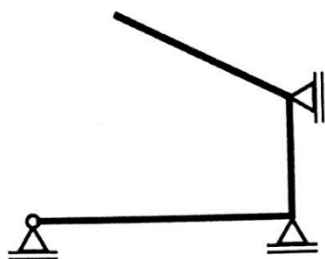
درجه نامعینی سازه زیر را بدست آورید (مسئله ۱-۱-۸ کتاب طاحونی).



$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 1 + 1 = 4 \\ c = 2 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (4 + 3 \times 0) - (2 + 3) = -1$$

## مثال ۷

درجه نامعینی سازه زیر را بدست آورید (مسئله ۱-۱-۲ کتاب طاحونی).



روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} r = 1 + 1 + 1 = 3 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (3 + 3 \times 0) - (0 + 3) = 0$$

روش دوم:

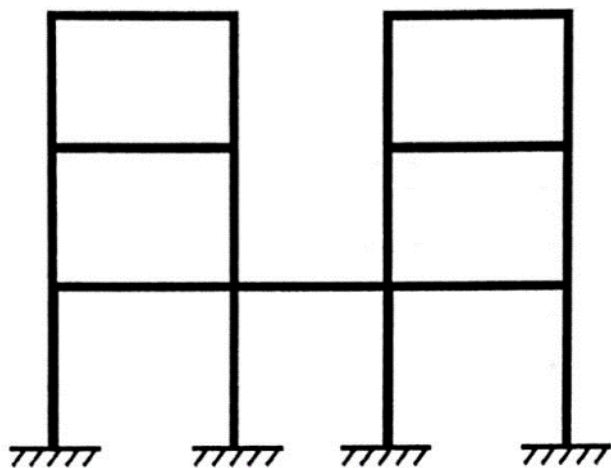
$$\left. \begin{array}{l} r = 1 + 1 + 1 = 3 \\ m = 3 \\ n = 4 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (3m + r) - 3n = (3 \times 3 + 3) - (3 \times 4) = 0$$

روش سوم:

$$\left. \begin{array}{l} r = 1 + 1 + 1 = 3 \\ m = 2 \\ n = 3 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (3m + r) - 3n = (3 \times 2 + 3) - (3 \times 3) = 0$$

## مثال ۸

درجه نامعینی سازه روبرو را بدست آورید  
(مسئله ۱-۱-۳۱ کتاب طاحونی).



روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} r = 4 \times 3 = 12 \\ c = 0 \\ k = 4 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (12 + 3 \times 4) - (0 + 3) = 21$$

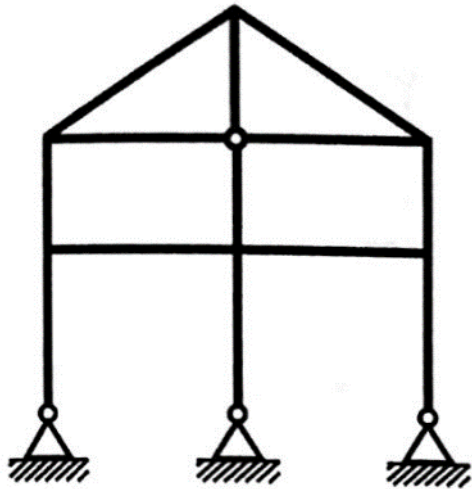
روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} r = 4 \times 3 = 12 \\ m = 19 \\ n = 16 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (3m + r) - 3n = (3 \times 19 + 12) - (3 \times 16) = 21$$



## مثال ۹

درجه نامعینی سازه زیر را بدست آورید (مسئله ۱-۱-۱۸ کتاب طاحونی).



روش اول:

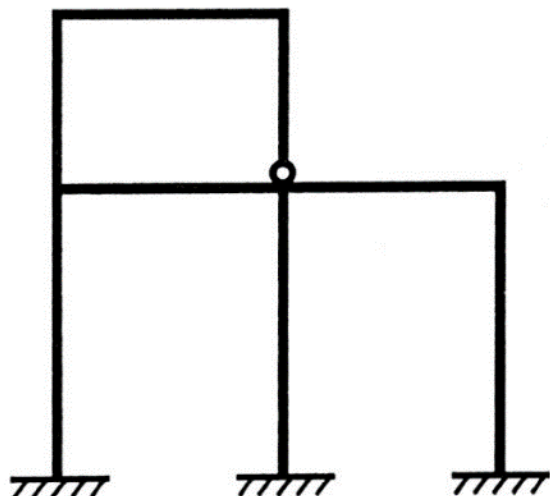
$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 2 + 2 = 6 \\ c = 3 \\ k = 4 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (6 + 3 \times 4) - (3 + 3) = 12$$

روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 2 + 2 = 6 \\ c = 3 \\ m = 13 \\ n = 10 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (3m + r) - (3n + c) = (3 \times 13 + 6) - (3 \times 10 + 3) = 12$$

# مثال ۱۰

درجه نامعینی سازه روبرو را بدست آورید  
(مسئله ۱-۱-۳۳ کتاب طاحونی).



روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \times 3 = 9 \\ c = 1 \\ k = 1 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (9 + 3 \times 1) - (1 + 3) = 8$$

روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \times 3 = 9 \\ c = 1 \\ m = 8 \\ n = 8 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (3m + r) - (3n + c) = (3 \times 8 + 9) - (3 \times 8 + 1) = 8$$

# مثال ۱۱



درجه نامعینی سازه روبرو را بدست آورید  
(مسئله ۱-۱-۲۶ کتاب طاحونی).

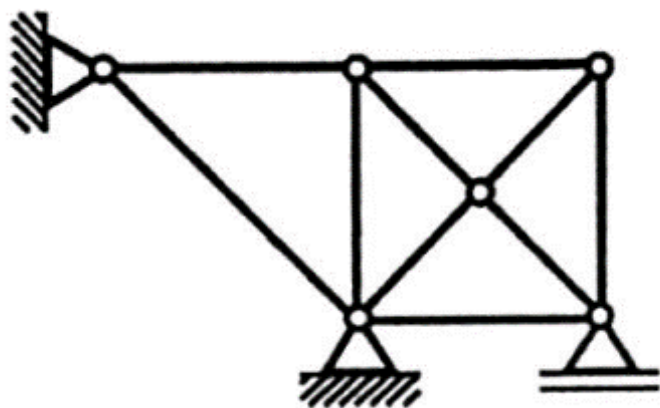
روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} r = 2 \times 3 = 6 \\ c = 2 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (6 + 3 \times 0) - (2 + 3) = 1$$

روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \times 2 = 6 \\ c = 2 \\ m = 2 \\ n = 3 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (3m + r) - (3n + c) = (3 \times 2 + 6) - (3 \times 3 + 2) = 1$$

## مثال ۱۲



درجه نامعینی سازه روبرو را بدست آورید (مسئله ۳-۳ کتاب طاحونی).

روش اول:

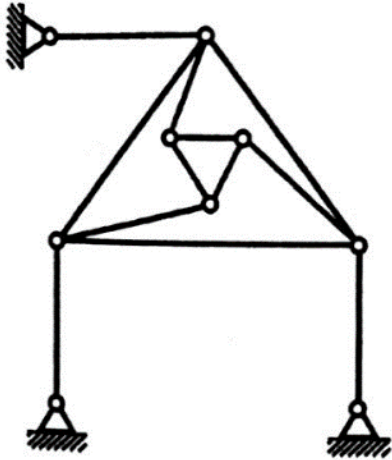
$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 2 + 1 = 5 \\ c = 1 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 14 \\ k = 5 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (5 + 3 \times 5) - (14 + 3) = 3$$

روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 2 + 1 = 5 \\ m = 10 \\ n = 6 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (m + r) - 2n = (10 + 5) - (2 \times 6) = 3$$

## مثال ۱۳

درجه نامعینی سازه روبرو را بدست آورید (مسئله ۳-۲۴ کتاب طاحونی).



روش اول:

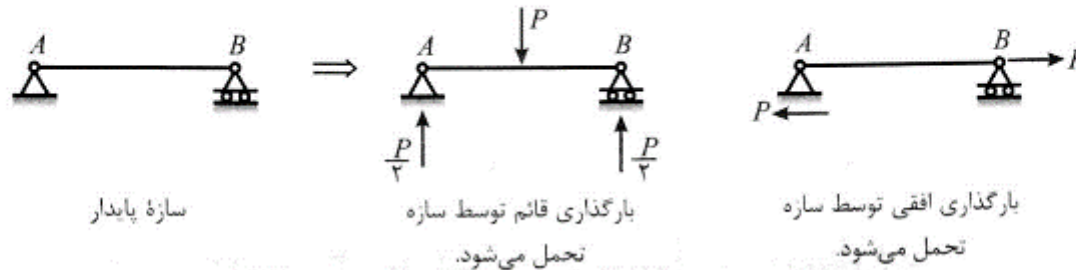
$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \times 2 = 6 \\ c = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 15 \\ k = 4 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (6 + 3 \times 4) - (15 + 3) = 0$$

روش دوم:

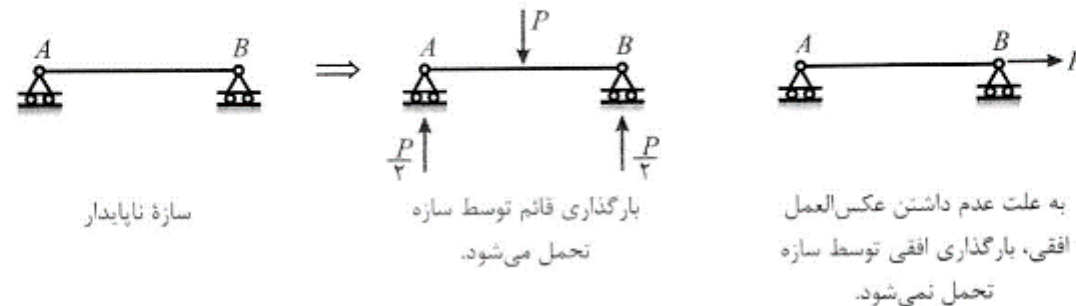
$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \times 2 = 6 \\ m = 12 \\ n = 9 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (m + r) - 2n = (12 + 6) - (2 \times 9) = 0$$

# پایداری سازه ها

سازه پایدار، سازه‌ای است که با وارد شدن هر نوع بارگذاری بر آن، معادلات تعادل برقرار شود. به عبارت بهتر، سازه در این حالت تحت هر نوع بارگذاری همواره متعادل است. به عنوان مثال تیر زیر پایدار است زیرا انواع بارگذاری‌های قائم و افقی را می‌تواند تحمل کند.



با توجه به این تعریف، در سازه ناپایدار بارگذاری وجود دارد که تحت آن تعادل در سازه برقرار نمی‌شود. به عنوان مثال تیر زیر ناپایدار است زیرا توانایی تحمل بارگذاری افقی را ندارد (تحت بارگذاری افقی تعادل در آن برقرار نمی‌شود).



# رابطه پایداری و درجه نامعینی

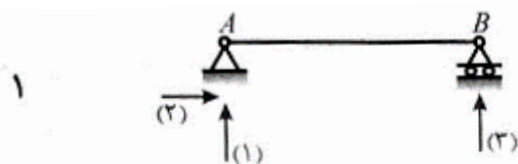
با توجه به درجه نامعینی در یک سازه، یکی از سه حالت زیر برای آن رخ می دهد :

- اگر  $DSI < 0$  سازه بدست آمده، لزوماً ناپایدار است. (ناپایدار ایستایی)
- اگر  $DSI = 0$  سازه معین است و پایداری آن باید بررسی شود.  
(بررسی ناپایداری هندسی)
- اگر  $DSI > 0$  سازه نامعین است و پایداری آن باید بررسی شود.  
(بررسی ناپایداری هندسی)

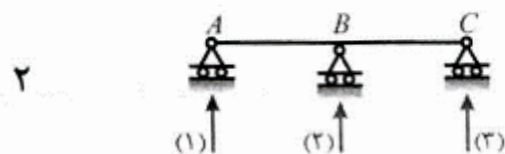
# تکیه گاه مناسب برای پایداری سازه

برای اتصال صحیح یک عضو پیوسته به زمین که بتواند انواع بارگذاری‌های وارد بر آن را تحمل کند (پایدار باشد)، به حداقل سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مطابق با دو حالت زیر نیاز داریم:

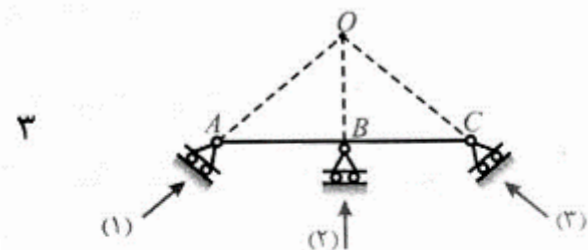
حالت ۱: سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی از جنس نیرو، به صورت غیرموازی و غیرهمرس (غیر متقارب)، پایداری خارجی یک جسم پیوسته را تضمین می‌کند.



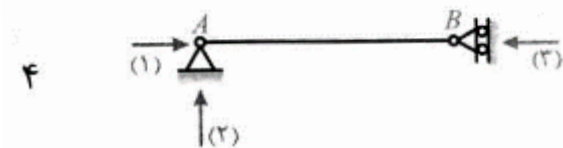
تیر پیوسته، دارای سه عکس‌العمل غیرموازی و غیرهمرس بوده و پایدار است.



تیر پیوسته، دارای سه عکس‌العمل موازی بوده و ناپایدار است.



تیر پیوسته، دارای سه عکس‌العمل همرس در نقطه  $O$  بوده و ناپایدار است.



تیر پیوسته، دارای سه عکس‌العمل همرس در نقطه  $A$  بوده و ناپایدار است.



# تکیه گاه مناسب برای پایداری سازه

سازه ۲: با اعمال یک بارگذاری در راستای افق، تعادل در آن راستا برقرار نمی‌شود.

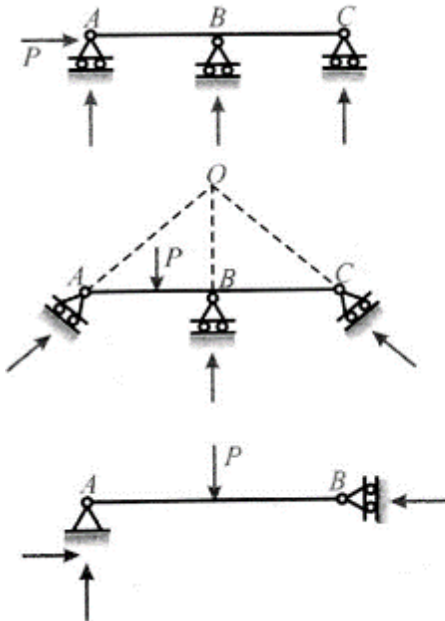
$$\sum F_x \neq 0$$

سازه ۳: با اعمال یک بارگذاری که از نقطه  $O$  (محل هم‌رسی عکس‌العمل‌ها) عبور نمی‌کند، تعادل دورانی حول آن برقرار نمی‌شود.

$$\sum M_O \neq 0$$

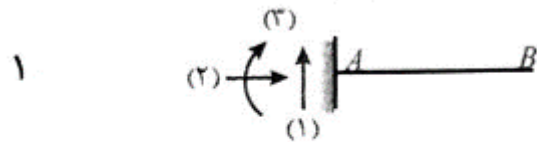
سازه ۴: با اعمال یک بارگذاری که از نقطه  $A$  عبور نمی‌کند، تعادل دورانی حول آن برقرار نمی‌شود.

$$\sum M_A \neq 0$$

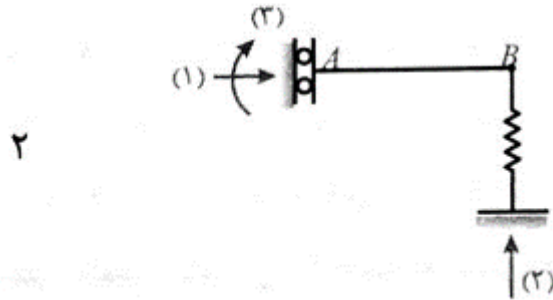


# تکیه گاه مناسب برای پایداری سازه

**حالت ۲؛** دو عکس العمل ناموازی و یک عکس العمل از نوع لنگر، پایداری خارجی یک جسم پیوسته را تضمین می کند.



تیر پیوسته، دارای دو عکس العمل غیرموازی و یک لنگر بوده و پایدار است.

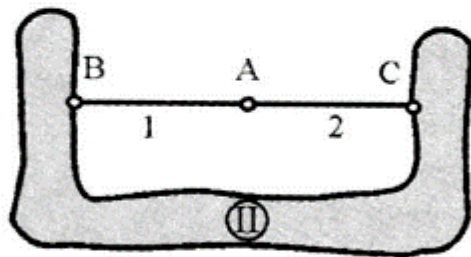


تیر پیوسته، دارای دو عکس العمل غیرموازی و یک لنگر بوده و پایدار است.

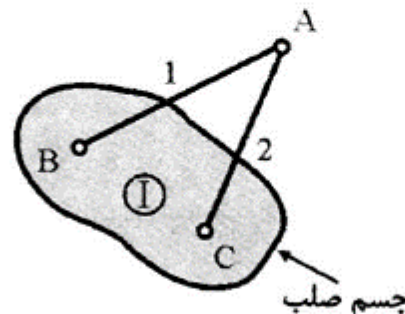
# قوانین پایداری جسم صلب در صفحه

## الف) ترکیب یک گره و یک جسم صلب

سیستمی که از ترکیب یک جسم صلب و یک گره تشکیل یافته، وقتی پایدار است که گره حداقل توسط دو میله که محورهای آنها در یک امتداد نمی باشد، به جسم صلب متصل شده باشد (شکل ۱ - ۲۴ - الف). اگر گره توسط دو میله هم امتداد به جسم صلب متصل شده باشد، سیستم حاصل ناپایدار آنی خواهد بود (شکل ۱ - ۲۴ - ب).



(ب) ناپایدار آنی (هندسی)



(الف) پایدار

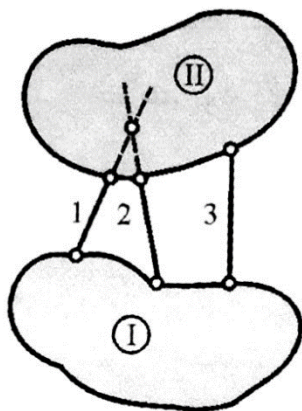
شکل ۱-۲۴ ترکیبات پایدار و ناپایدار یک جسم صلب و یک گره.

# قوانین پایداری جسم صلب در صفحه

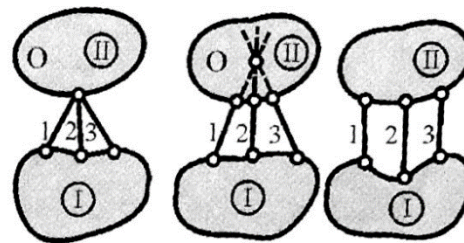
## ب) ترکیب پایدار دو جسم صلب

ترکیب دو جسم صلب وقتی تشکیل یک سیستم صلبی را می‌دهند که به یکی از روش‌های زیر به یکدیگر متصل شده باشند:

- ۱- توسط سه میله غیر موازی و غیر متقارب (شکل ۱ - ۲۵ - الف).
- ۲- توسط یک مفصل و یک میله رابط که محور میله از مفصل عبور نمی‌کند (شکل ۱ - ۲۵ - ب).
- ۳- توسط یک اتصال صلب (شکل ۱ - ۲۵ - پ).



ترکیب پایدار

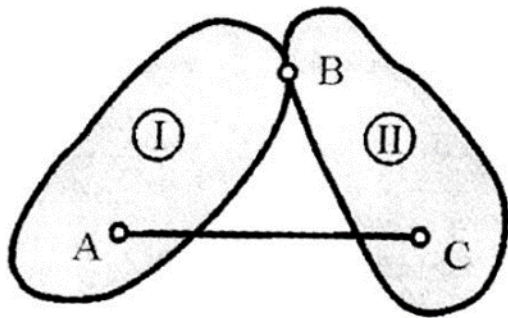


ترکیبات ناپایدار (سه میله متقارب یا موازی)

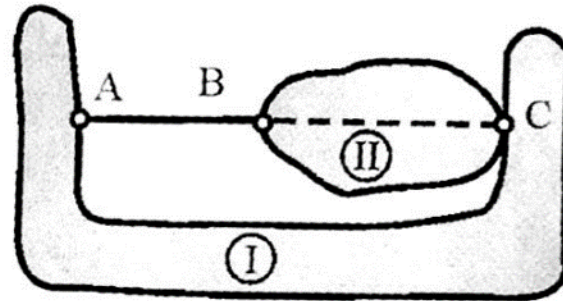
(الف)

شکل ۱-۲۵ ترکیبات پایدار و ناپایدار دو جسم صلب.

# قوانین پایداری جسم صلب در صفحه

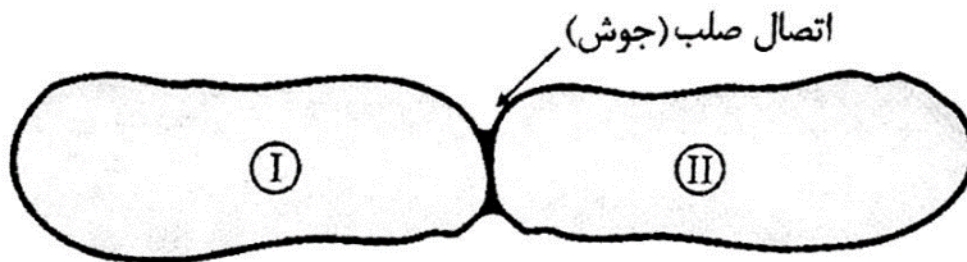


ترکیب پایدار



ترکیب ناپایدار - محور AB از C عبور می کند

(ب)



(پ)

شکل ۱-۲۵ ترکیبات پایدار و ناپایدار دو جسم صلب.

# قوانین پایداری جسم صلب در صفحه

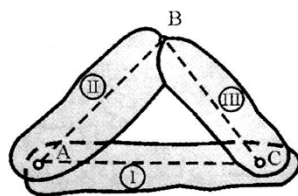
## پ) ترکیب پایدار سه جسم صلب

ترکیب سه جسم صلب وقتی تشکیل یک سیستم صلبی را می‌دهند که به یکی از روش‌های زیر به یکدیگر متصل شده باشند:

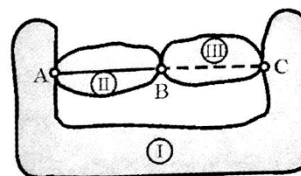
- ۱ - توسط سه مفصل که در یک امتداد قرار ندارند (شکل ۱ - ۲۶ - الف).
- ۲ - توسط شش میله که هر دو میله، دو جسم صلب را به یکدیگر متصل نمایند و محل تقاطع این دو میله که مفصل موهومی خوانده می‌شود، در روی یک خط مستقیم قرار نداشته باشند (شکل ۱ - ۲۶ - ب).
- ۳ - توسط ترکیبی از مفصل‌ها و میله‌ها به نحوی که مفصل‌های واقعی و موهومی در روی یک خط مستقیم قرار نگرفته باشند (شکل ۱ - ۲۶ - پ).



# قوانین پایداری جسم صلب در صفحه

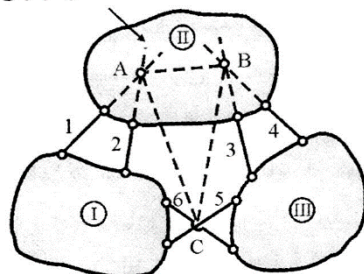


ترکیب پایدار



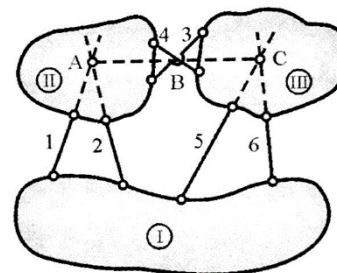
ترکیب ناپایدار

مفصل موهومی



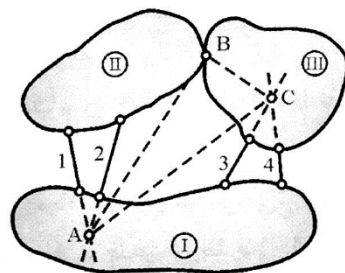
ترکیب پایدار

(الف)



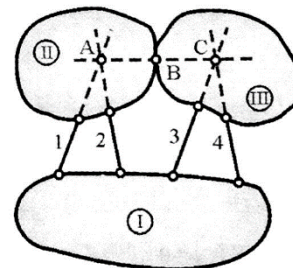
ترکیب ناپایدار

(ب)



ترکیب پایدار

(پ)



ترکیب ناپایدار

# ناپایداری ایستایی (استاتیکی)

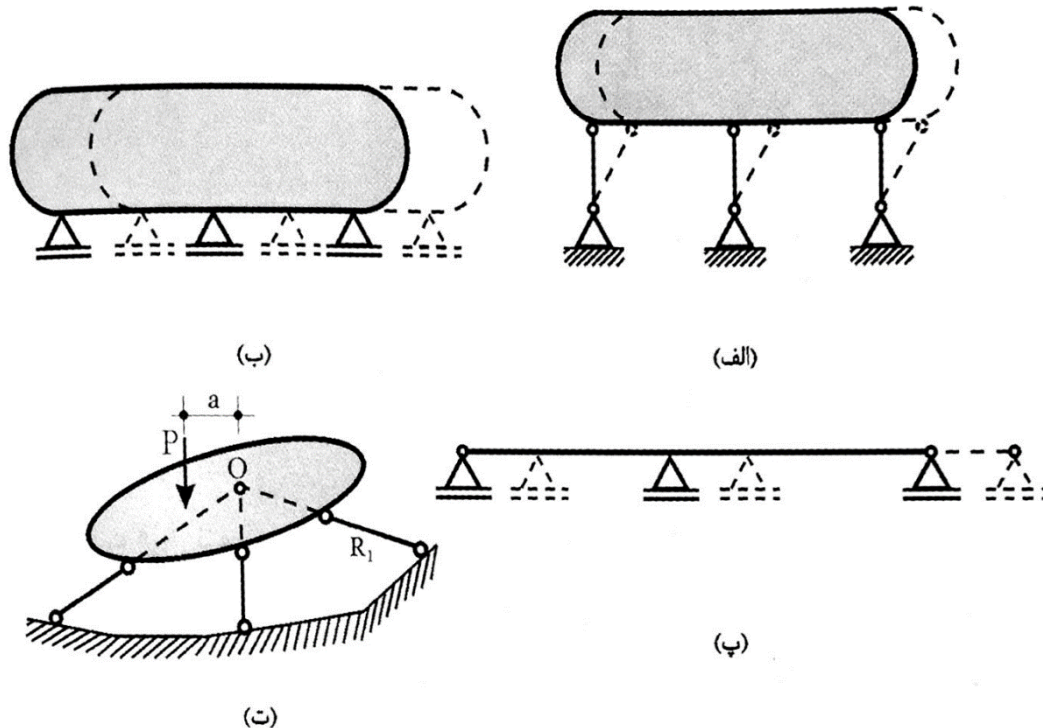
هر گاه در یک سازه تعداد عکس العمل های تکیه گاهی موجود، کمتر از حداقل مؤلفه های تکیه گاهی لازم برای ایجاد سازه پایدار باشد یا به عبارتی درجه نامعینی آن منفی باشد آن سازه ناپایدار ایستایی (استاتیکی) است.

$$DSI < 0$$



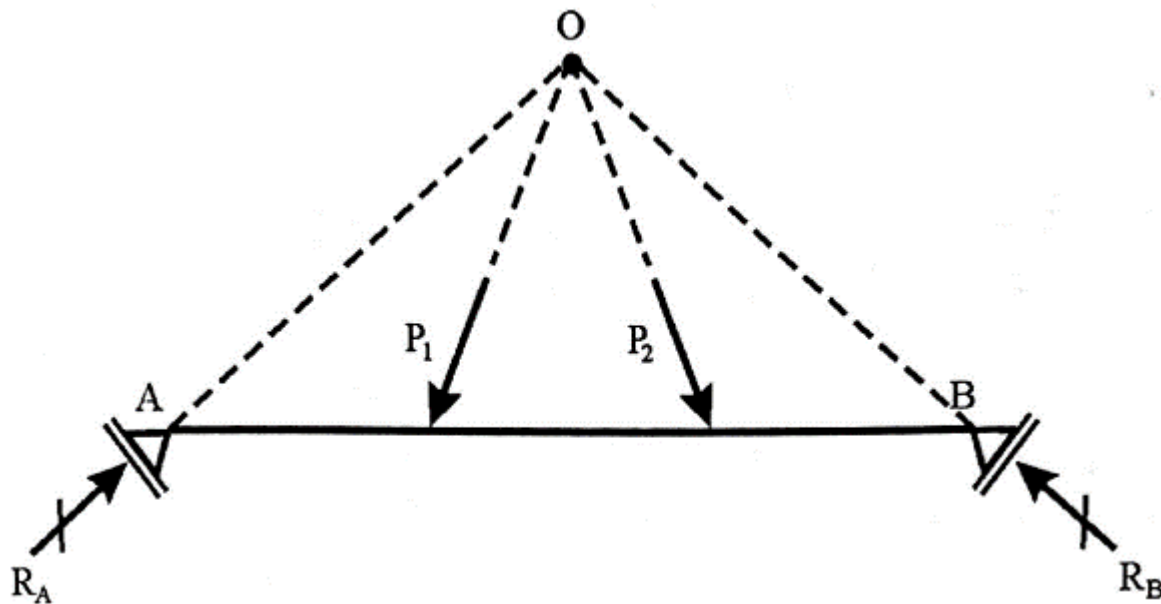
# ناپایداری هندسی (آنی)

اگر تعداد مؤلفه های تکیه گاهی مساوی یا بیش از روابط تعادل ایستایی باشد، ناپایداری هندسی سازه مورد بررسی قرار می گیرد. برای مثال سازه های زیر ناپایدار هندسی می باشند.



# مثال ۱۴

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



با سازه ناپایدار ایستایی

است به علت :

- نبود ۳ عکس العمل تکیه

گاهی مناسب

- همرس بودن عکس

العمل های تکیه گاهی

موجود

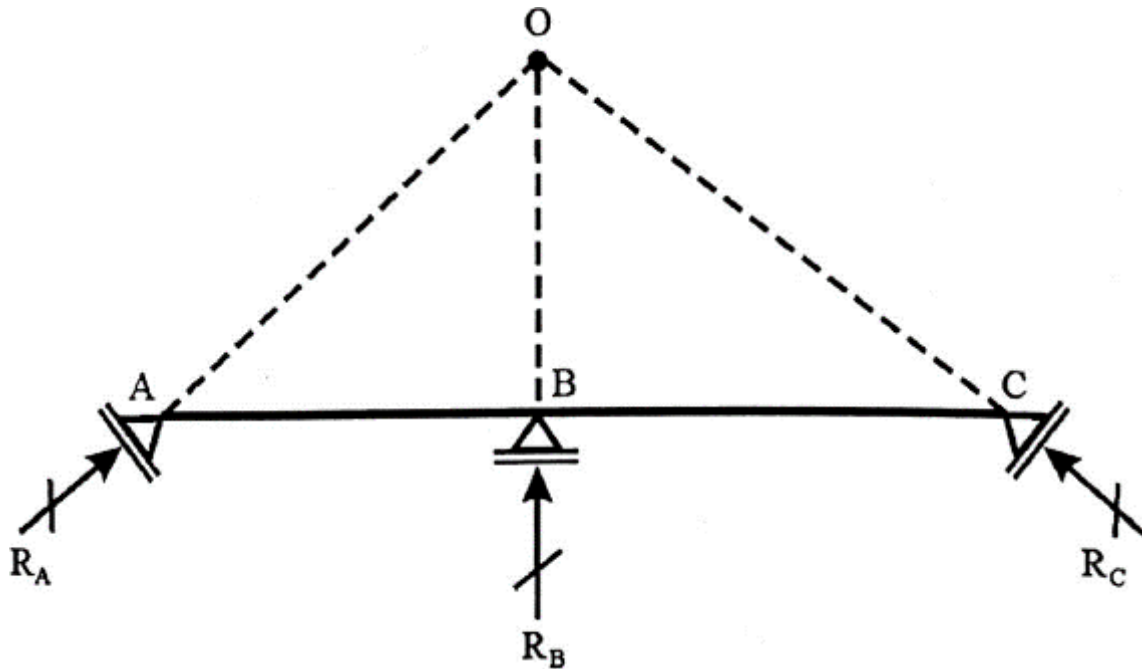
- درجه نامعینی استاتیکی

آن منفی می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} r = 1 + 1 = 2 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (2 + 0) - (0 + 3) = -1$$

# مثال ۱۵

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



با سازه ناپایدار هندسی

است به علت :

• هم‌رس بودن عکس

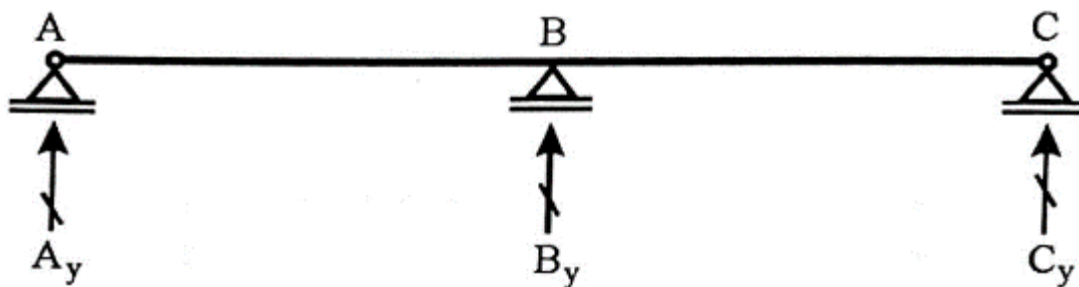
العمل‌های تکیه گاهی

موجود

$$\left. \begin{array}{l} r = 1 + 1 + 1 = 3 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (3 + 0) - (0 + 3) = 0$$

# مثال ۱۶

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



با سازه ناپایدار هندسی

است به علت :

• موازی بودن عکس

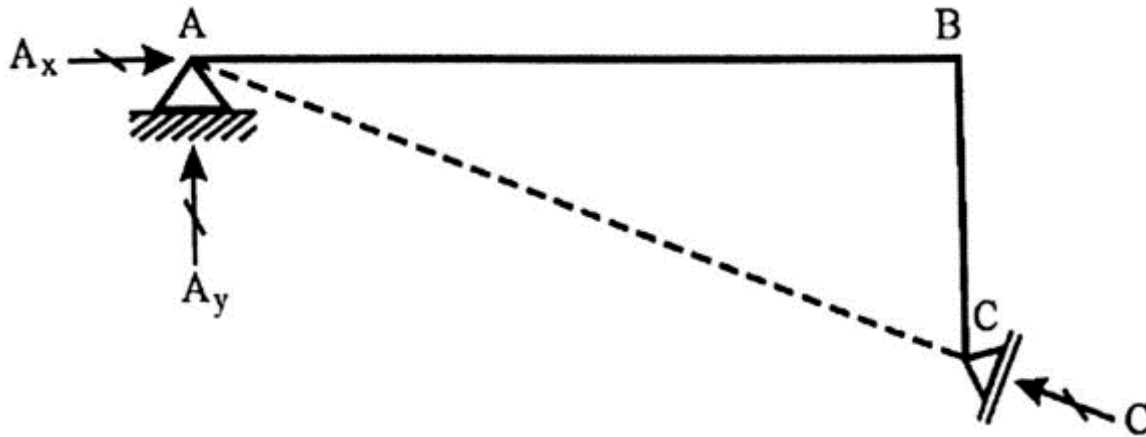
العمل های تکیه گاهی

موجود

$$\left. \begin{array}{l} r = 1 + 1 + 1 = 3 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (3 + 0) - (0 + 3) = 0$$

# مثال ۱۷

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



با سازه ناپایدار هندسی

است به علت :

• هم‌رس بودن عکس

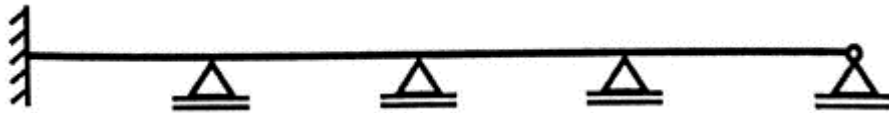
العمل‌های تکیه گاهی

موجود

$$\left. \begin{array}{l} r = 1 + 1 + 1 = 3 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (3 + 0) - (0 + 3) = 0$$

# مثال ۱۸

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :

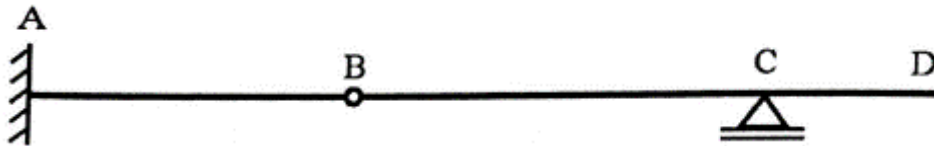


سازه پایدار و ۴ درجه نامعین  
ایستایی است.

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (7 + 0) - (0 + 3) = 4$$

# مثال ۱۹

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :

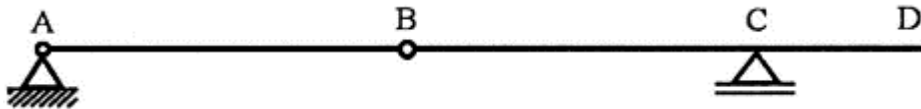


سازه پایدار و معین ایستایی است.

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 + 1 = 4 \\ c = 1 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (4 + 0) - (1 + 3) = 0$$

## مثال ۲۰

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



سازه ناپایدار ایستایی است به علت :

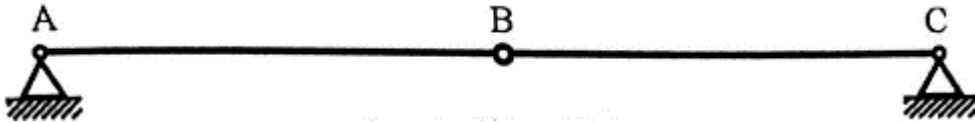
• درجه نامعینی منفی

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \\ c = 1 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (3 + 0) - (1 + 3) = -1$$



## مثال ۲۱

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



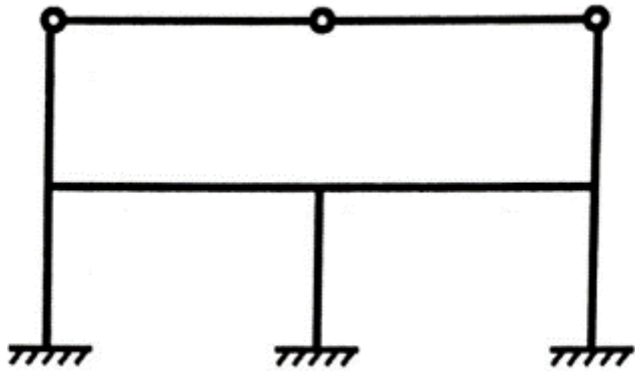
سازه ناپایدار هندسی است به علت :

- وجود سه مفصل در یک راستا

$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 2 = 4 \\ c = 1 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (4 + 0) - (1 + 3) = 0$$

## مثال ۲۲

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



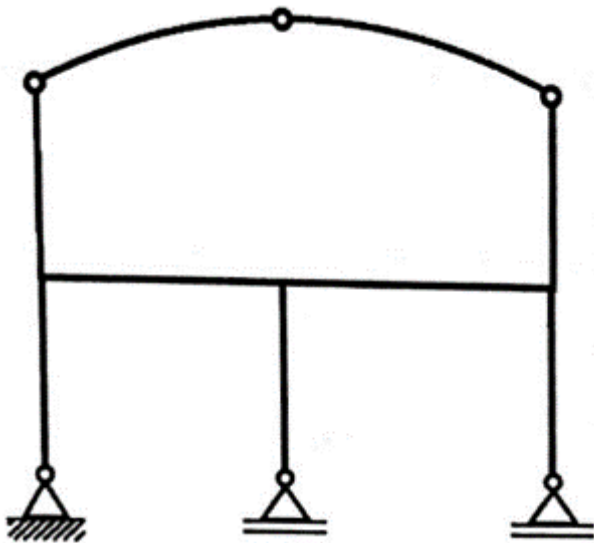
سازه ناپایدار هندسی است به علت :

- وجود سه مفصل در یک راستا

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \times 3 = 9 \\ c = 1 + 1 + 1 = 3 \\ k = 1 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (9 + 3 \times 1) - (3 + 3) = 6$$

## مثال ۲۳

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری و درجه نامعینی سازه زیر :



سازه پایدار و یک درجه نامعین است.

$$\left. \begin{array}{l} r = 2 + 1 + 1 = 4 \\ c = 1 + 1 + 1 = 3 \\ k = 1 \end{array} \right\} \rightarrow DSI = (r + 3k) - (c + 3) = (4 + 3 \times 1) - (3 + 3) = 1$$

## مثال ۲۴

مطلوبست تعیین پایداری یا ناپایداری، معینی و نامعینی مثال های ۵ تا ۱۱ :

مثال ۵ : سازه پایدار و ۸ درجه نامعین است.

مثال ۶ : سازه ناپایدار ایستایی است به علت درجه نامعینی منفی

مثال ۷ : سازه پایدار و معین است.

مثال ۸ : سازه پایدار و ۲۱ درجه نامعین است.

مثال ۹ : سازه پایدار و ۱۲ درجه نامعین است.

مثال ۱۰ : سازه پایدار و ۸ درجه نامعین است.

مثال ۱۱ : سازه پایدار و ۱ درجه نامعین است.

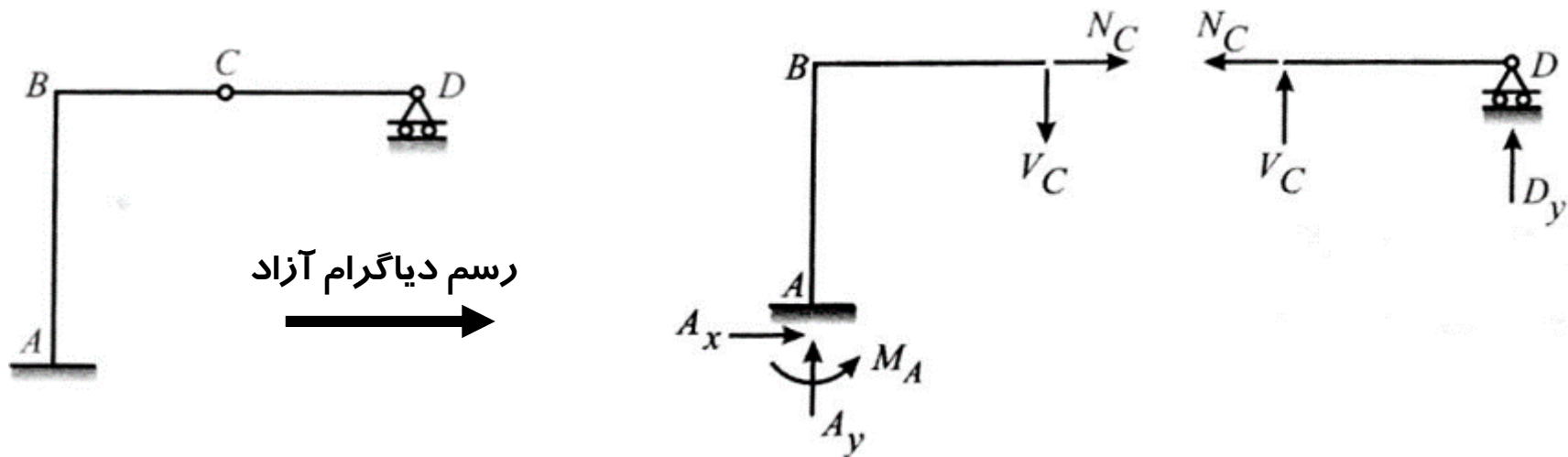
# عکس العمل های تکیه گاهی

در این قسمت با نحوه محاسبه نیروهای داخلی و عکس العمل های تیکه گاهی در سازه های معین آشنا می شویم.

همان طور که گفته شد سازه معین سازه ای است که کلیه عکس العمل های تکیه گاهی و نیروهای داخلی آن، با استفاده از معادلات تعادل قابل محاسبه است. در این گونه سازه ها درجه نامعینی صفر می باشد.

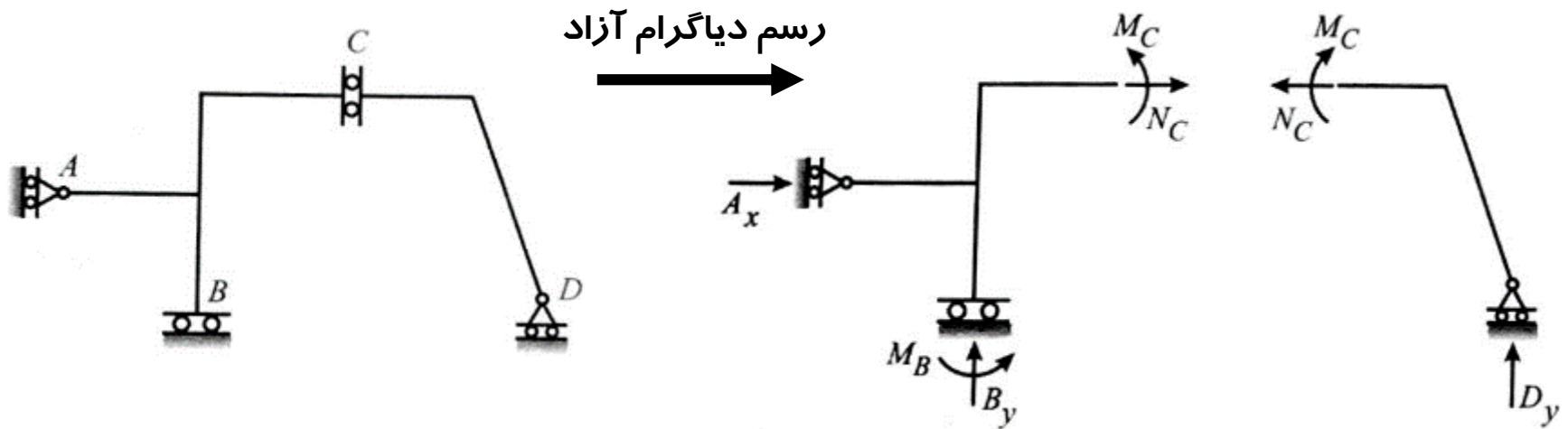
# مثال ۲۵

مطلوبست رسم دیاگرام آزاد سازه های زیر پس از جداسازی از نقطه C



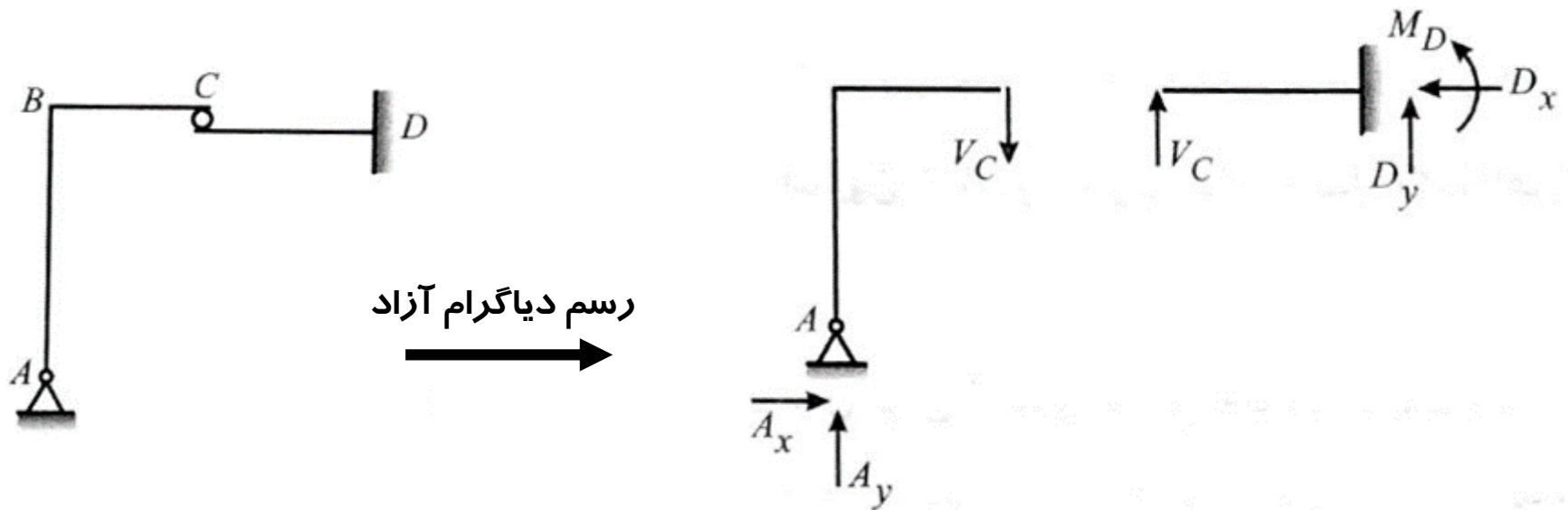
## مثال ۲۶

مطلوبست رسم دیاگرام آزاد سازه های زیر پس از جداسازی از نقطه C



## مثال ۲۷

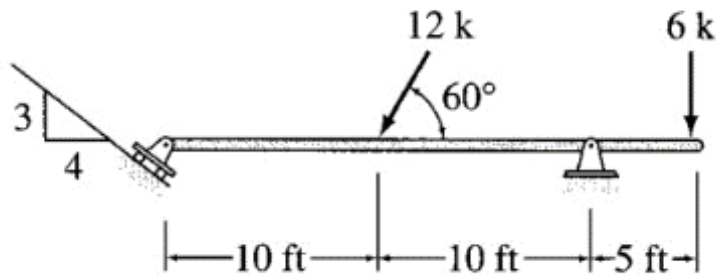
مطلوبست رسم دیاگرام آزاد سازه های زیر پس از جداسازی از نقطه C



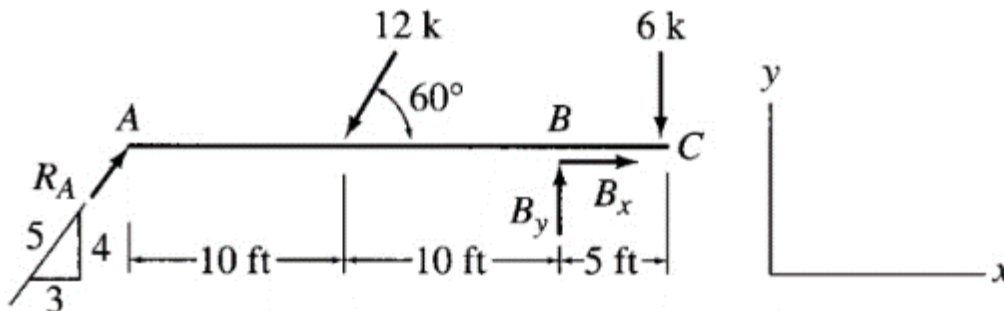


## مثال ۲۸

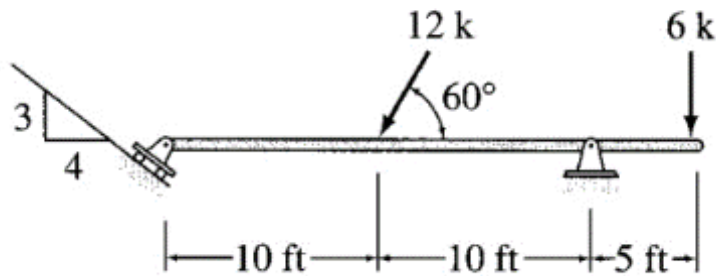
مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی سازه زیر :



رسم دیاگرام آزاد :



## مثال ٢٨



$$+\zeta \sum M_B = 0$$

$$-\frac{4}{5}R_A(20) + 12 \sin 60^\circ(10) - 6(5) = 0$$

$$R_A = 4.62 \text{ k} \nearrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\frac{3}{5}(4.62) - 12 \cos 60^\circ + B_x = 0$$

$$B_x = 3.23 \text{ k}$$

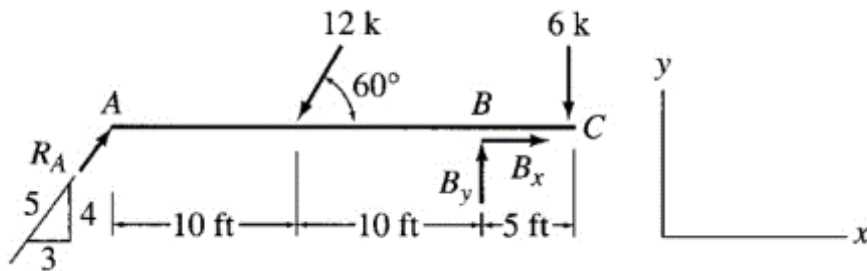
$$B_x = 3.23 \text{ k} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\frac{4}{5}(4.62) - 12 \sin 60^\circ + B_y - 6 = 0$$

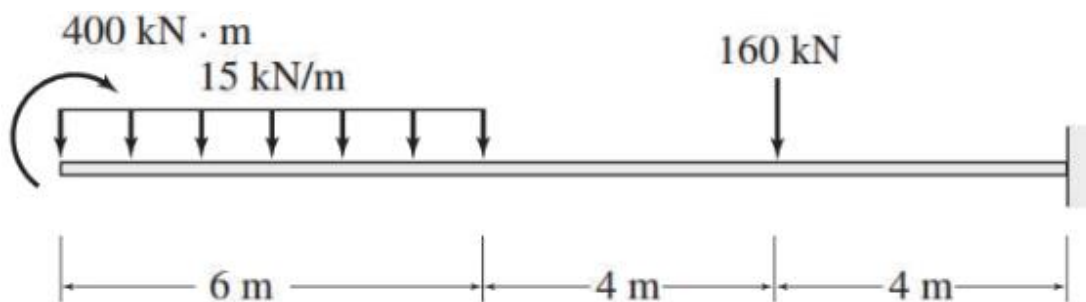
$$B_y = 12.7 \text{ k}$$

$$B_y = 12.7 \text{ k} \uparrow$$

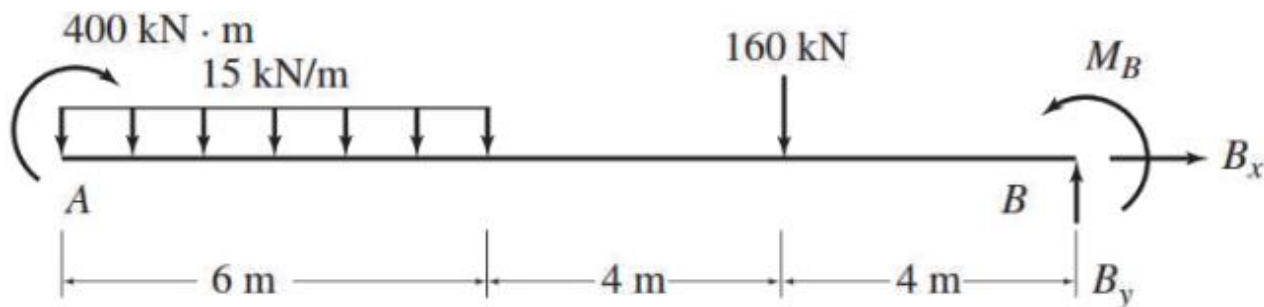


## مثال ۲۹

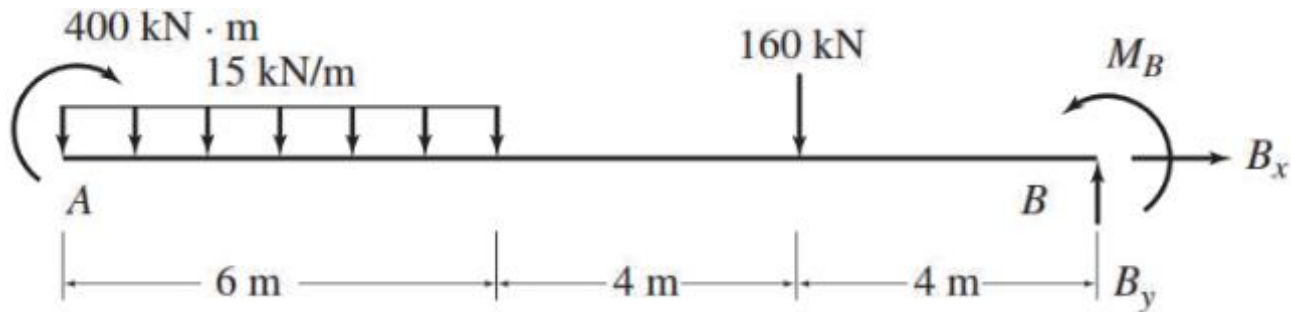
مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی سازه زیر :



رسم دیاگرام آزاد :



# مثال ۲۹



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-15(6) - 160 + B_y = 0$$

$$B_y = 250 \text{ kN}$$

$$B_y = 250 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\zeta \sum M_B = 0$$

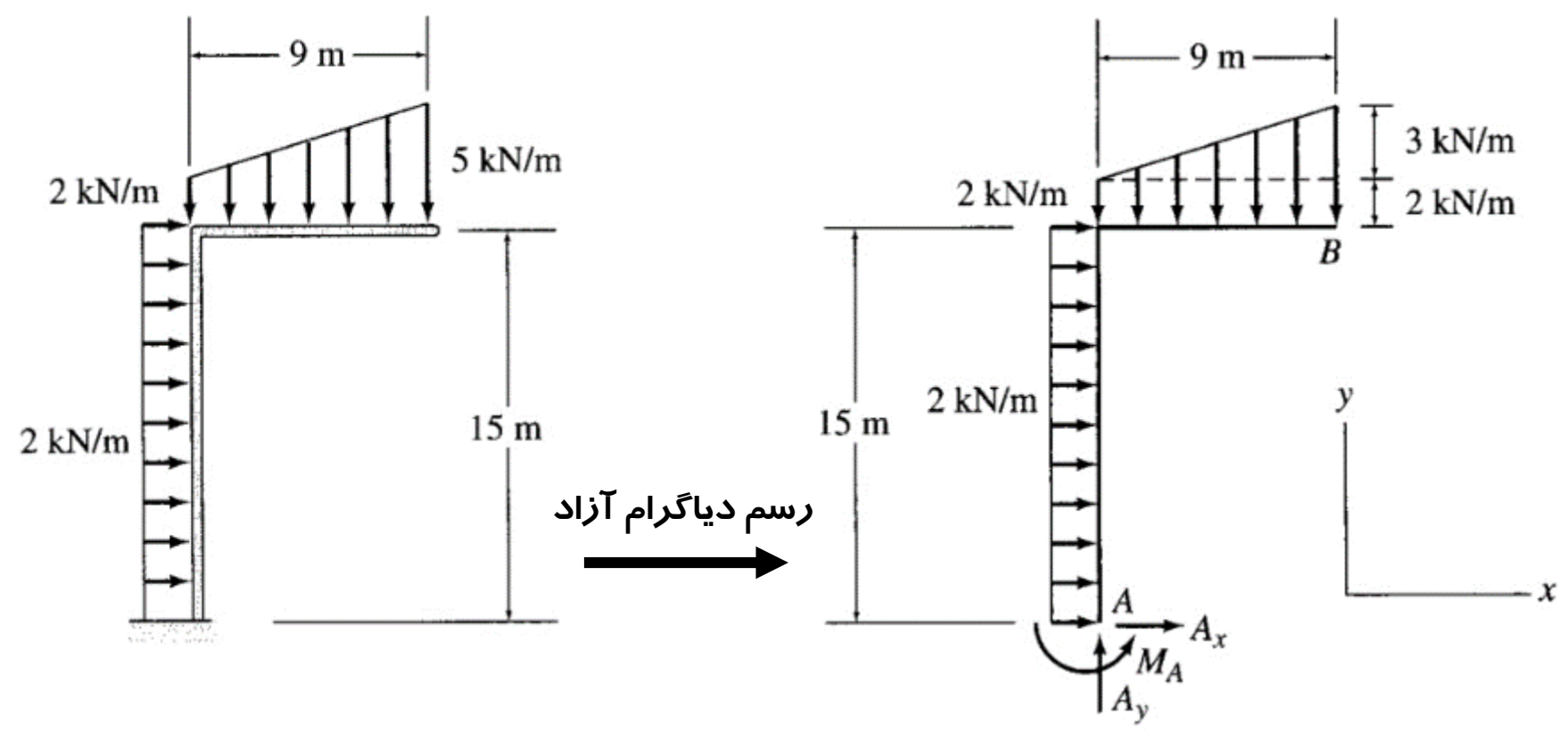
$$-400 + 15(6)(3 + 8) + 160(4) + M_B = 0$$

$$M_B = -1230 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

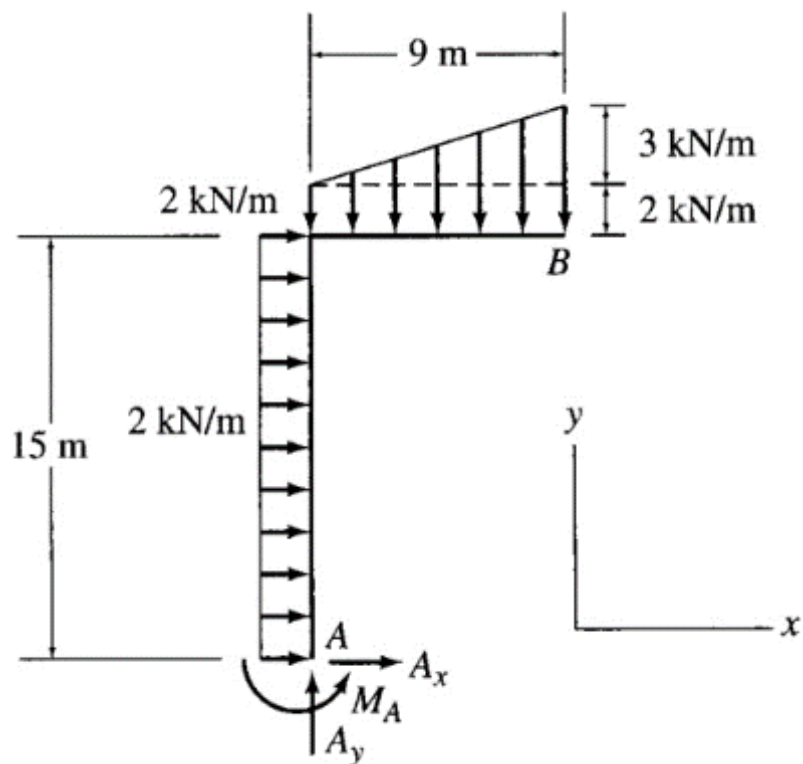
$$M_B = 1230 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

# مثال ۳۰

مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی سازه زیر :



## مثال ٣٠



$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x + 2(15) = 0$$

$$A_x = -30 \text{ kN}$$

$$A_x = 30 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 2(9) - \frac{1}{2}(3)(9) = 0$$

$$A_y = 31.5 \text{ kN}$$

$$A_y = 31.5 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\zeta \sum M_A = 0$$

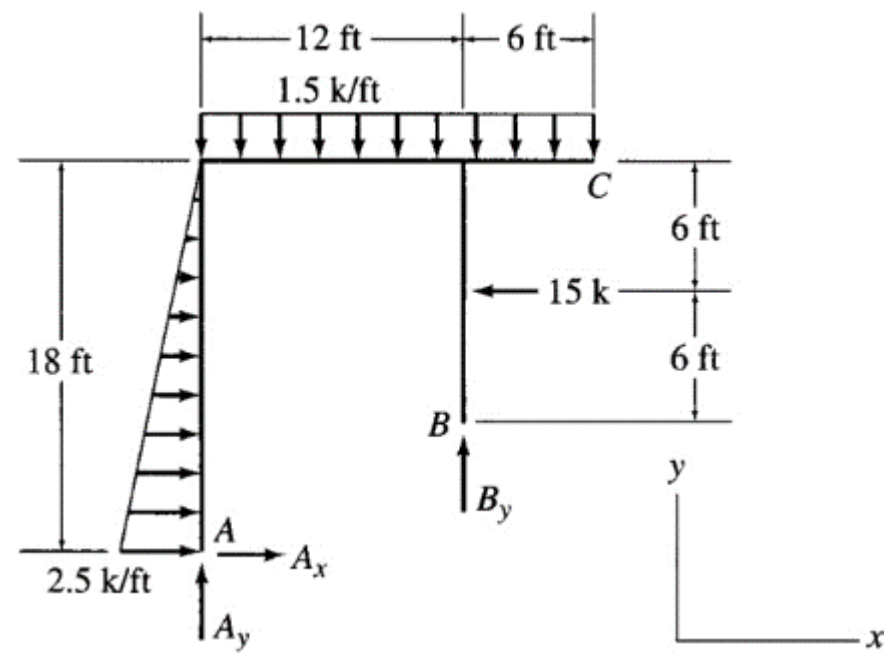
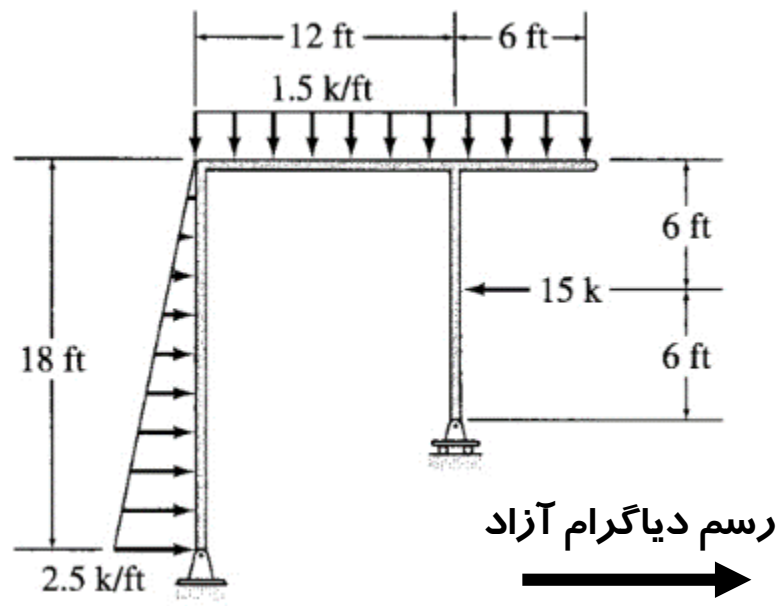
$$M_A - [2(15)]\left(\frac{15}{2}\right) - [2(9)]\left(\frac{9}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}(3)(9)\right]\frac{2}{3}(9) = 0$$

$$M_A = 387 \text{ kN-m}$$

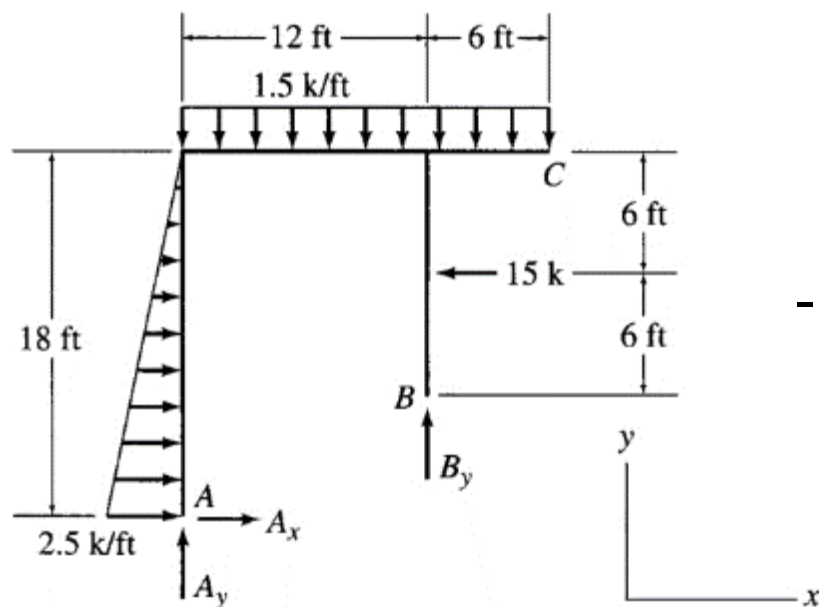
$$M_A = 387 \text{ kN-m} \zeta$$

# مثال ۳۱

مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی سازه زیر :



# مثال ٣١



$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x + \frac{1}{2}(2.5)(18) - 15 = 0$$

$$A_x = -7.5 \text{ k}$$

$$A_x = 7.5 \text{ k} \leftarrow$$

$$+\zeta \sum M_A = 0$$

$$-\left[\frac{1}{2}(2.5)(18)\right]\left(\frac{18}{3}\right) - [1.5(18)](9) + 15(12) + B_y(12) = 0$$

$$B_y = 16.5 \text{ k}$$

$$B_y = 16.5 \text{ k} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 1.5(18) + 16.5 = 0$$

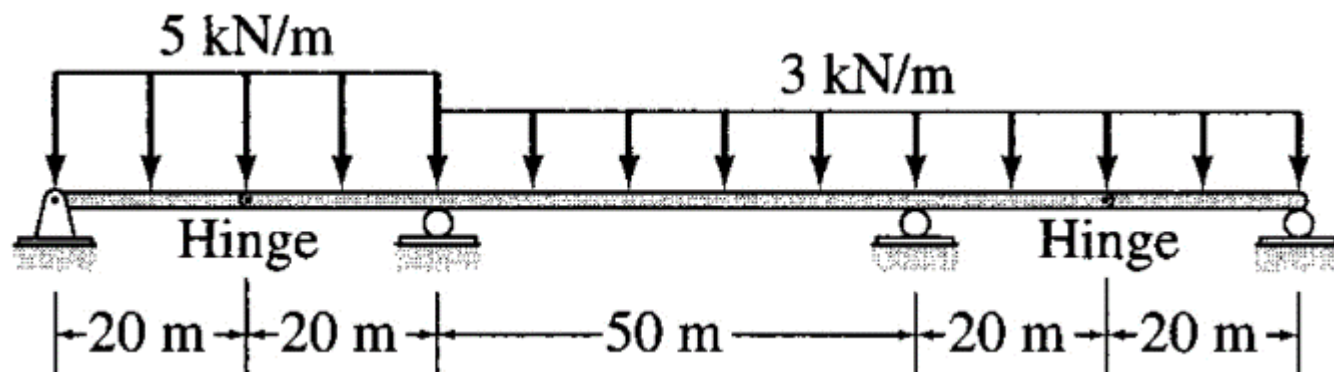
$$A_y = 10.5 \text{ k}$$

$$A_y = 10.5 \text{ k} \uparrow$$

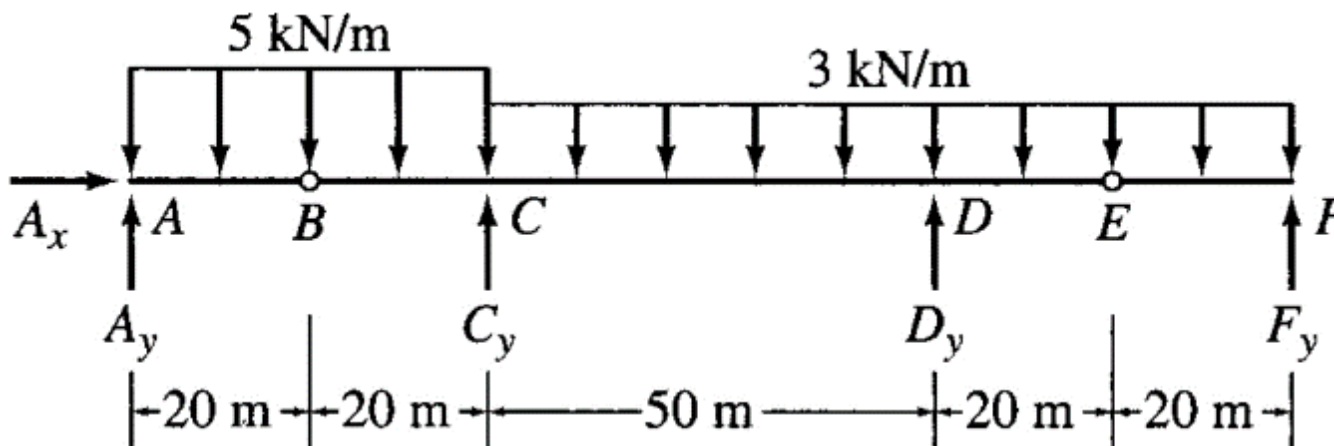


## مثال ۳۲

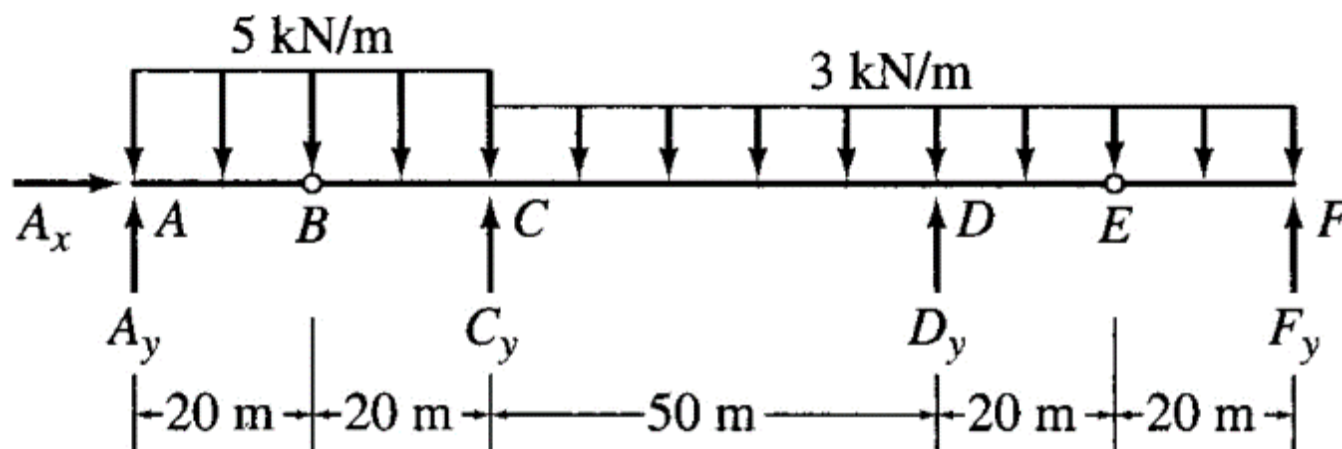
مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی سازه زیر :



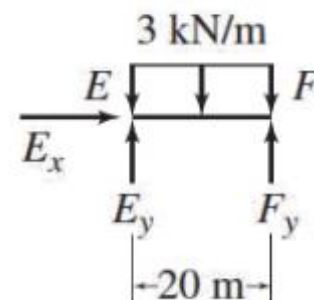
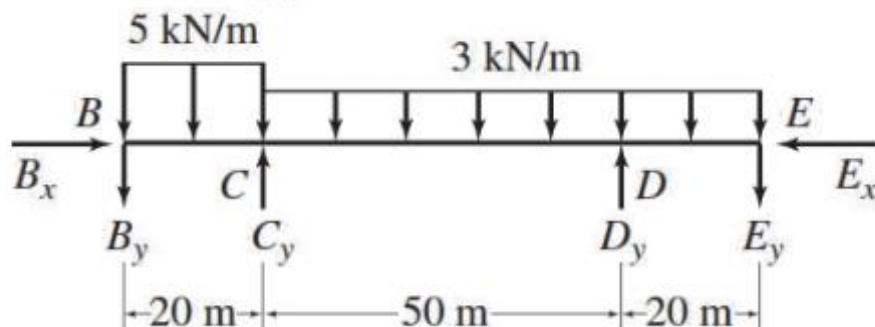
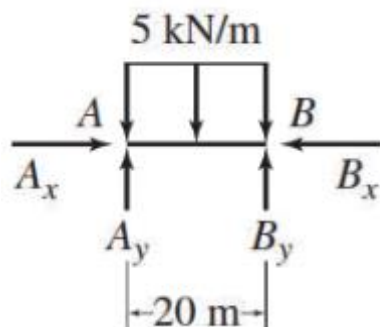
رسم دیاگرام آزاد :



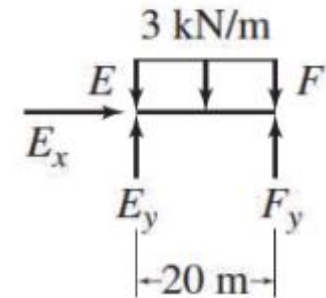
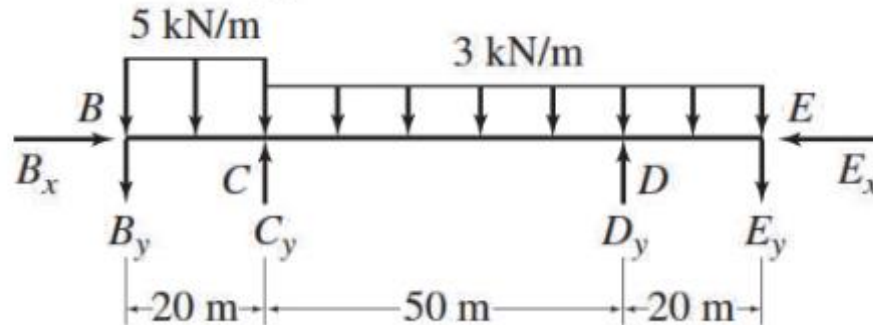
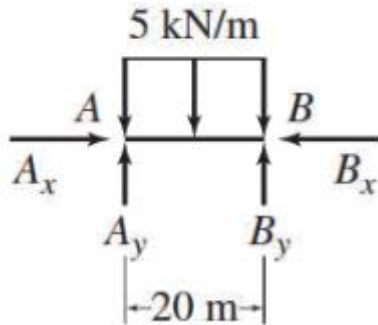
## مثال ۳۲



رسم دیاگرام آزاد + رسم نیروهای داخلی هر مقطع :



# مثال ٣٢



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$+ \zeta \sum M_B^{AB} = 0$$

$$-A_y(20) + [5(20)](10) = 0$$

$$A_y = 50 \text{ kN}$$

$$A_y = 50 \text{ kN} \uparrow$$

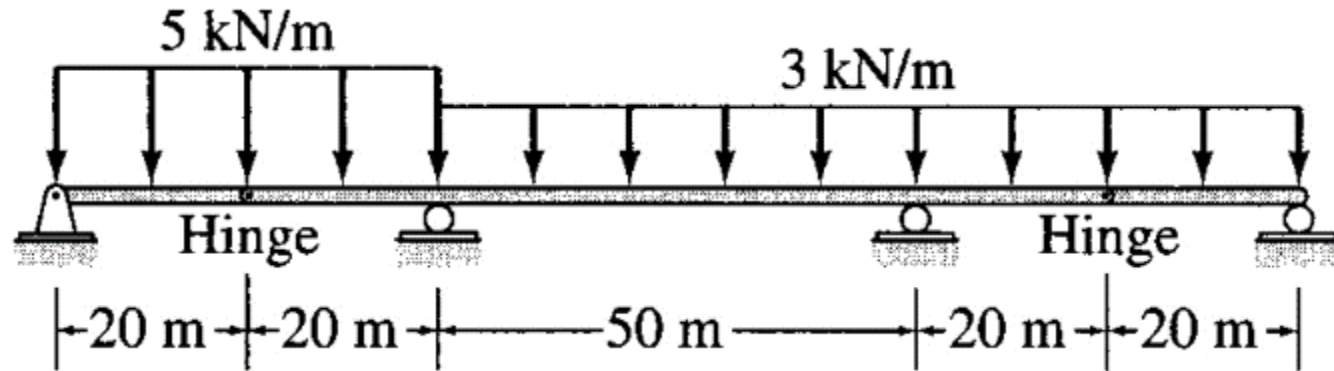
$$+ \zeta \sum M_E^{EF} = 0$$

$$-[3(20)](10) + F_y(20) = 0$$

$$F_y = 30 \text{ kN}$$

$$F_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$

## مثال ۳۲



$$+\zeta \sum M_D = 0$$

$$-50(90) + [5(40)](70) - C_y(50) + [3(90)](5) + 30(40) = 0$$

$$C_y = 241 \text{ kN}$$

$$C_y = 241 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

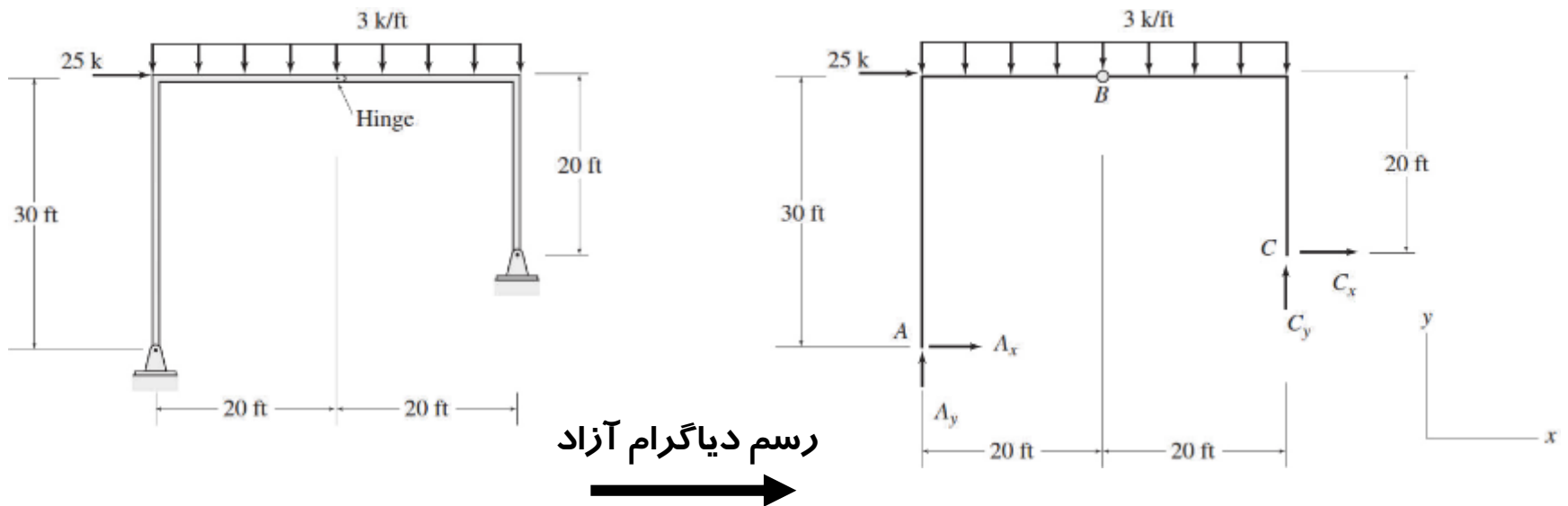
$$50 - 5(40) + 241 - 3(90) + D_y + 30 = 0$$

$$D_y = 149 \text{ kN}$$

$$D_y = 149 \text{ kN} \uparrow$$

# مثال ۳۳

مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی سازه زیر :



# مثال ٣٣

$$+\zeta \sum M_C = 0$$

$$A_x(10) - A_y(40) - 25(20) + 3(40)(20) = 0$$

$$A_x - 4A_y = -190$$

$$+\zeta \sum M_B^{AB} = 0$$

$$A_x(30) - A_y(20) + 3(20)(10) = 0$$

$$3A_x - 2A_y = -60$$

$$A_x = 14 \text{ k} \rightarrow$$

$$A_y = 51 \text{ k} \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$14 + 25 + C_x = 0$$

$$C_x = -39 \text{ k}$$

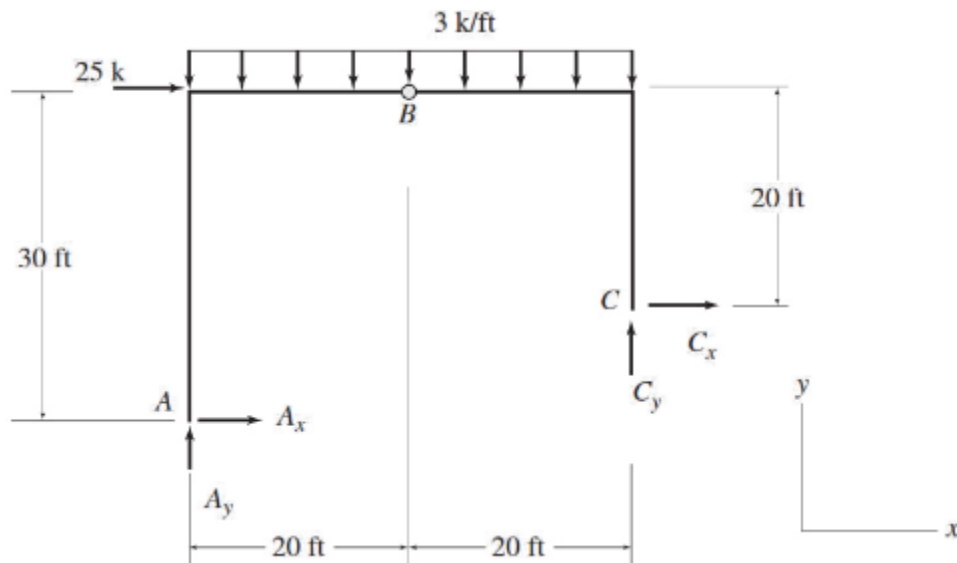
$$C_x = 39 \text{ k} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$51 - 3(40) + C_y = 0$$

$$C_y = 69 \text{ k}$$

$$C_y = 69 \text{ k} \uparrow$$



## فصل (۲)

نیروهای داخلی در تیرها و قاب ها

## تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار تغییرات آن ها در طول عضو

---

بعد از تعیین واکنش های تکیه گاهی گام بعدی تعیین نیروهای داخلی اعضا می باشد. برای این کار ابتدا با طبیعت نیروهای داخلی آشنا می شویم.

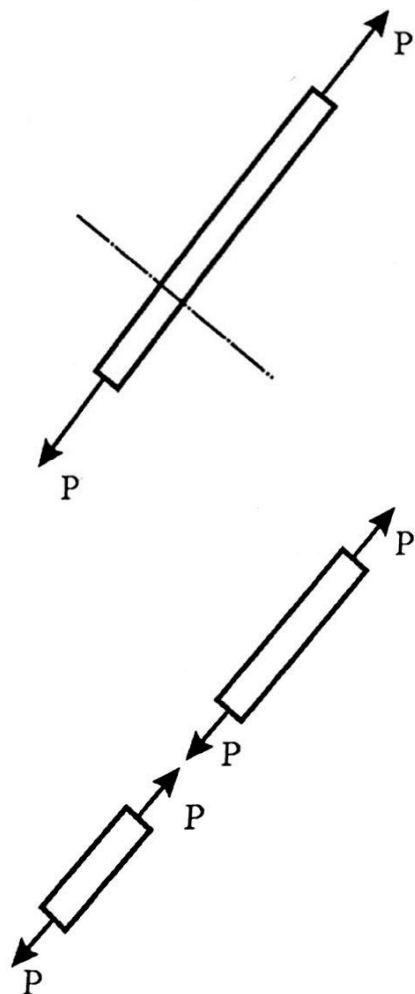
به طور کلی نیروی داخلی برآیند مجموعه تنش هایی است که در مقطع عضو ایجاد می شود.



# نیروی داخلی اعضای دو نیرویی

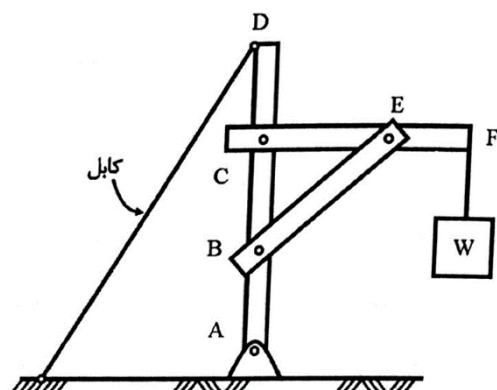
- اعضای دو نیرویی اعضای مستقیم می باشند که دو انتهای آن ها مفصلی است و فقط از طریق دو انتها تحت نیروهای خارجی قرار می گیرند.
- نمونه خوبی از اعضای دو نیرویی اعضای موجود در یک خرپا می باشد. از اعضای دو نیرویی ممکن است در قاب ها نیز استفاده گردد.
- اعضای دو نیرویی وقتی در حال تعادل هستند که نیروهای وارد بر دو انتهای آن ها هم امتداد و مختلف الجہت باشند. در این حالت ممکن است عضو دو نیرویی فشاری و یا کششی باشد.

# نیروی داخلی اعضای دو نیرویی



- برای تعیین نیروی داخلی در عضو دو نیرویی مقطعی از آن عبور می دهیم. ملاحظه می شود برای حفظ تعادل هر کدام از قطعات چپ و راست کافیهست یک نیروی محوری در محل قطع شده داشته باشیم.
- اگر محل مقطع را عوض کنیم مقدار نیروی محوری تغییر نمی کند و در طول عضو ثابت است.
- نیروی محوری در واقع برآیند تنش های قائم در مقطع می باشد.
- طبق قرار داد اگر کششی باشد با علامت مثبت (+) و اگر فشاری باشد با علامت منفی (-) در نظر گرفته می شود.

# نیروی داخلی در اعضای چند نیرویی



برای بررسی نیروهای داخلی اعضای چند نیرویی، در قاب شکل روبرو دیاگرام آزاد عضو AD رسم می گردد. برای مطالعه نیروهای داخلی، مقطعی مانند J از آن عبور داده و دیاگرام آزاد DJ را رسم می کنیم.

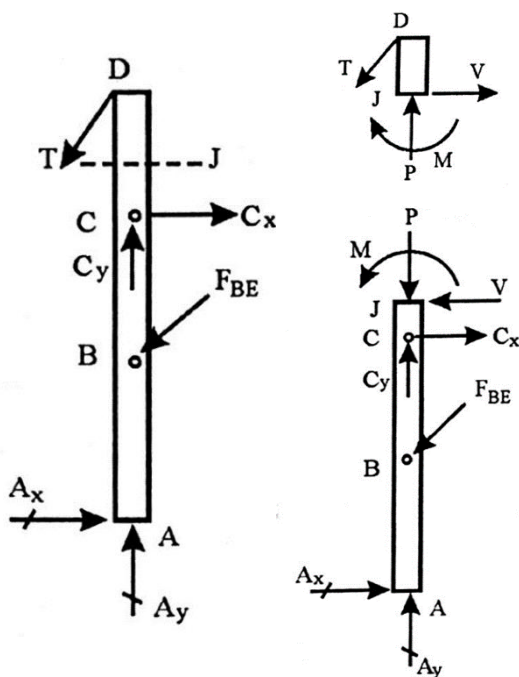
در این دیاگرام آزاد برای حفظ تعادل نیروها در امتداد قائم، نیاز به نیروی داخلی محوری  $P$  می باشد. برای تعادل در امتداد افق نیاز به نیروی برشی داخلی  $V$  و برای تعادل لنگر وجود لنگر خمشی  $M$  لازم است.

در اعضای چند نیرویی صفحه ای در حالت کلی وجود این ۳ نیروی داخلی لازم است.

$P$ : نیروی محوری داخلی = تلاش محوری

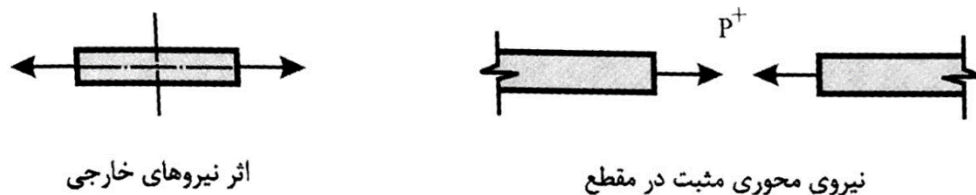
$V$ : نیروی برشی داخلی = تلاش برشی

$M$ : لنگر خمشی داخلی = تلاش خمشی

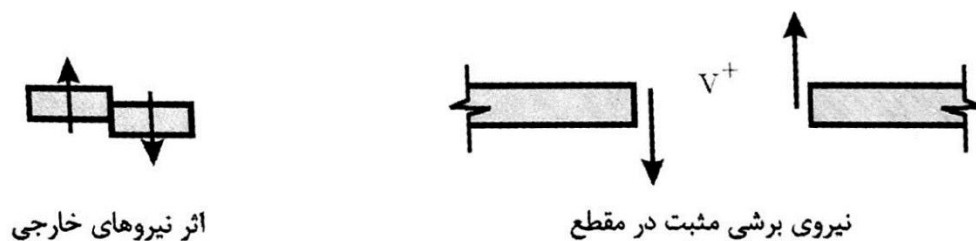


# قرارداد علامت نیروهای داخلی

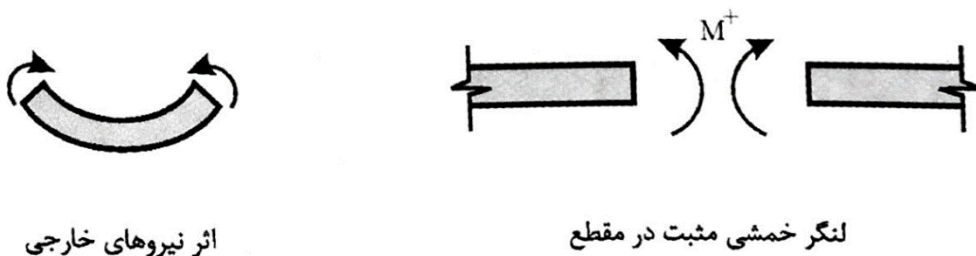
۱- نیروی محوری داخلی  $P$  وقتی مثبت است که کششی باشد.



۲- نیروی برشی داخلی  $V$  وقتی مثبت است که جهت آن منطبق با شکل زیر باشد.

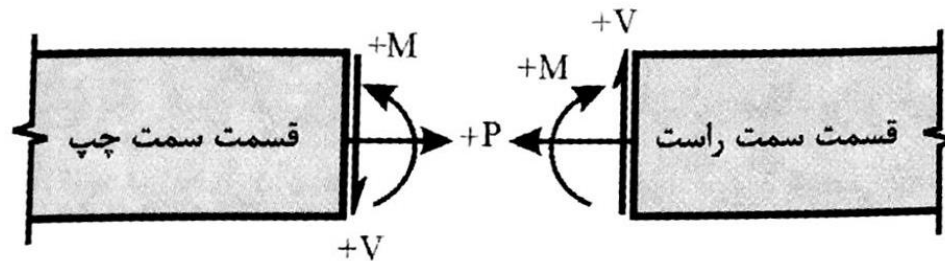


۳- لنگر خمشی داخلی  $M$  وقتی مثبت است که در تار پایین ایجاد کشش و در تار بالا ایجاد فشار کند.



# قرارداد علامت نیروهای داخلی

به طور کلی در شکل زیر نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی مثبت نشان داده شده اند.



نیروهای مقاوم داخلی

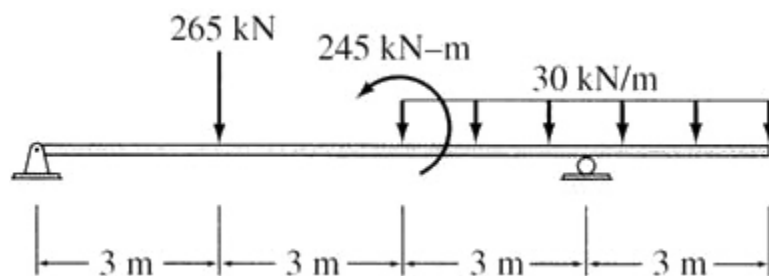
# روش مقطع زدن (Section Method)

ساده ترین روش برای رسم نمودار تغییرات نیروهای داخلی روش مقطع زدن است. در این روش در محل مورد مطالعه مقطعی عبور داده شده و نیروهای داخلی در جهت مثبت شان نمایش داده می شوند. معادلات تعادل برای قسمت چپ و راست را نوشته و نیروهای داخلی محاسبه می گردند.

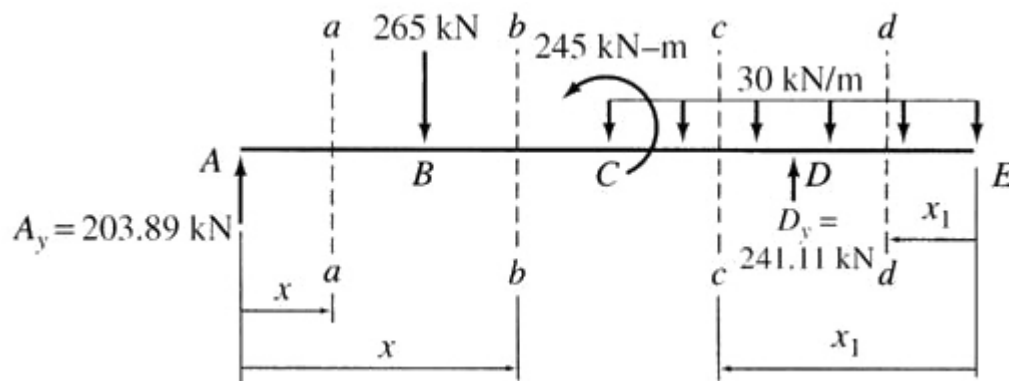
این روش در استاتیک مورد بحث قرار گرفته است و سعی می شود در مثال های آتی یادآوری از آن صورت گیرد.

# مثال ۱

مطلوبست رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی سازه زیر به روش مقطع زدن :

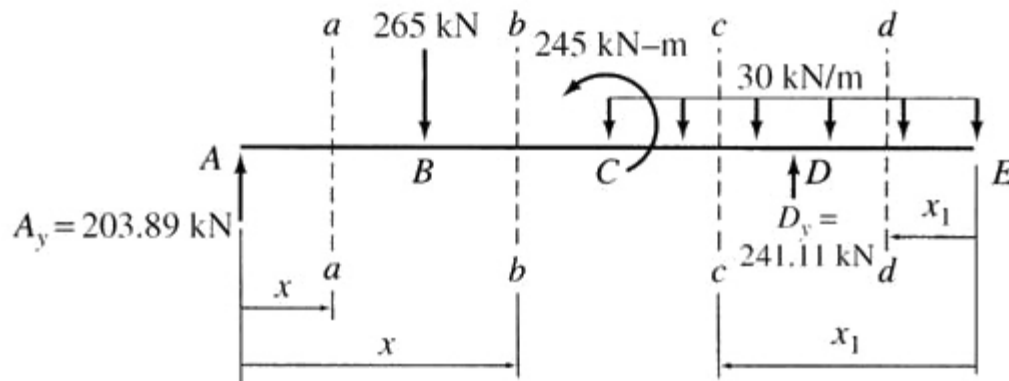


رسم دیاگرام آزاد :



# مثال ۱

محاسبه عکس العمل های  
تکیه گاهی :



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$+ \zeta \sum M_D = 0$$

$$-A_y(9) + 265(6) + 245 + 30(6)(0) = 0$$

$$A_y = 203.89 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$203.89 - 265 - 30(6) + D_y = 0$$

$$D_y = 241.11 \text{ kN} \uparrow$$



# مثال ۱

برای رسم دیاگرام برش در قطع AB مقطع aa را به فاصله  $x$  از تکیه گاه A رسم می کنیم :

$$V = 203.89 \text{ kN} \quad \text{for } 0 < x < 3 \text{ m}$$

حال با در نظر گرفتن مقطع bb برش در قطعه BC را محاسبه می کنیم :

$$V = 203.89 - 265 = -61.11 \text{ kN} \quad \text{for } 3 \text{ m} < x \leq 6 \text{ m}$$

برای محاسبه نیروهای برشی در سمت راست تیر بهتر است مختصات جدیدی تحت عنوان  $x_1$  تعریف کنیم . حال با رسم مقطع cc و dd برای قطعات ED و DC خواهیم داشت :

$$V = 30x_1 \quad \text{for } 0 \leq x_1 < 3 \text{ m}$$

$$V = 30x_1 - 241.11 \quad \text{for } 3 \text{ m} < x_1 \leq 6 \text{ m}$$

با استفاده از معادلات بالا و جایگذاری مختصات های مختلف نیروهای داخلی را در نقاط مورد نظر محاسبه می نماییم.

# مثال ۱

با توجه به معادله اول :

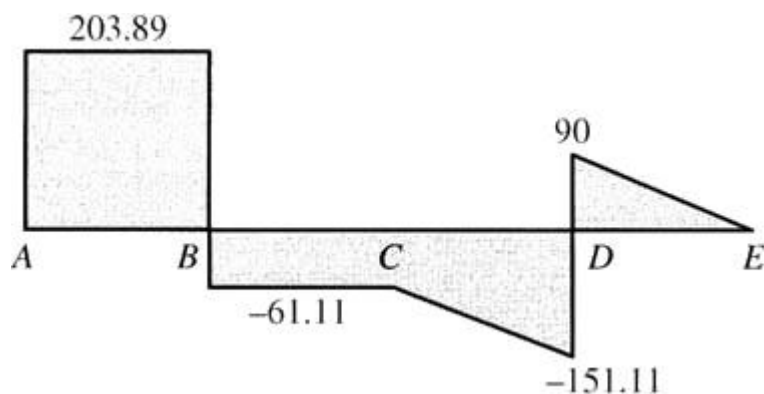
$$V_E = 30 \times 0 = 0 \text{ KN}$$

$$V_{D,R} \text{ راست} = 30 \times 3 = 90 \text{ KN}$$

با توجه به معادله دوم :

$$V_{D,L} \text{ چپ} = (30 \times 3) - 241.11 = -151.11 \text{ KN}$$

$$V_{C,R} \text{ راست} = (30 \times 6) - 241.11 = -61.11 \text{ KN}$$



دیاگرام برش (نمودار تغییرات نیروی برشی)  
بر حسب کیلونیوتن :

# مثال ۱

برای رسم دیاگرام خمش همانند مختصات ها و قطعاتی که برای رسم دیاگرام برش داشتیم  
برای مقطع AB داریم :

$$M = 203.89x \quad \text{for } 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

برای مقطع BC داریم :

$$M = 203.89x - 265(x - 3) = -61.11x + 795 \quad \text{for } 3 \text{ m} \leq x < 6 \text{ m}$$

برای مقطع ED داریم :

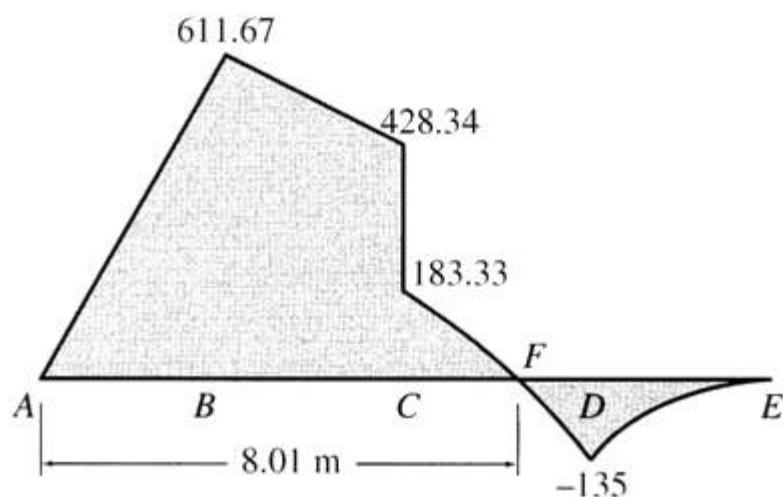
$$M = -30x_1 \left( \frac{x_1}{2} \right) = -15x_1^2 \quad \text{for } 0 \leq x_1 \leq 3 \text{ m}$$

برای مقطع DC داریم :

$$M = -15x_1^2 + 241.11(x_1 - 3) = -15x_1^2 + 241.11x_1 - 723.33 \quad \text{for } 3 \text{ m} \leq x_1 < 6 \text{ m}$$

# مثال ۱

دیاگرام خمشی (نمودار تغییرات لنگر خمشی) بر حسب کیلونیوتن-متر :



به نقطه ای که لنگر خمشی در آن صفر می باشد، نقطه عطف گفته می شود.

برای تعیین محل نقطه عطف کافی است در معادله قطعه مورد نظر ممان را برابر صفر قرار

دهیم.

$$M = -15x_1^2 + 241.11x_1 - 723.33 = 0$$

# مثال ۱

به نقطه ای که لنگر خمشی در آن صفر می باشد، نقطه عطف گفته می شود.  
برای تعیین محل نقطه عطف کافی است در معادله قطعه مورد نظر ممان را برابر صفر قرار دهیم.

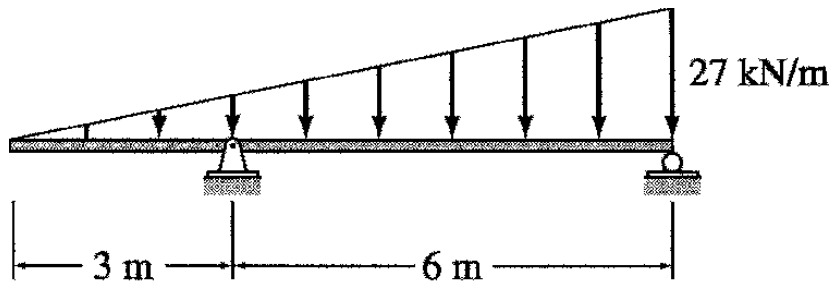
در این مثال با توجه به اینکه در نقطه F ممان صفر است پس نقطه عطف می باشد و برای تعیین محل آن با توجه به اینکه نقطه مورد نظر در قطعه DC قرار گرفته است می توان با استفاده از معادله قطعه DC نوشت :

$$M = -15x_1^2 + 241.11x_1 - 723.33 = 0 \longrightarrow x_1 = 3.99m$$

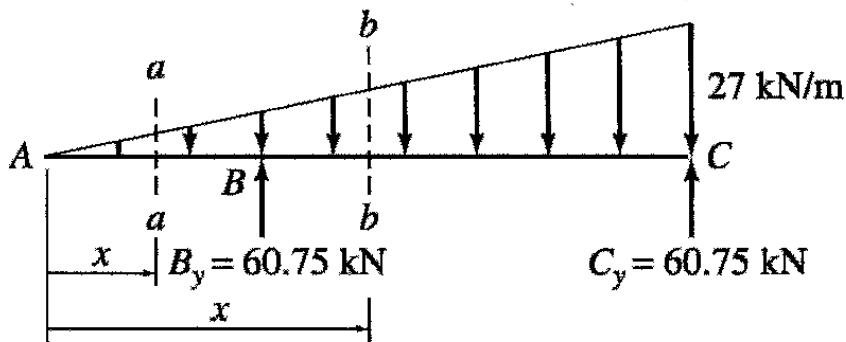
به عبارتی نقطه عطف در فاصله ۳/۹۹ متر از سمت راست تیر (نقطه E) قرار گرفته است.

## مثال ۲

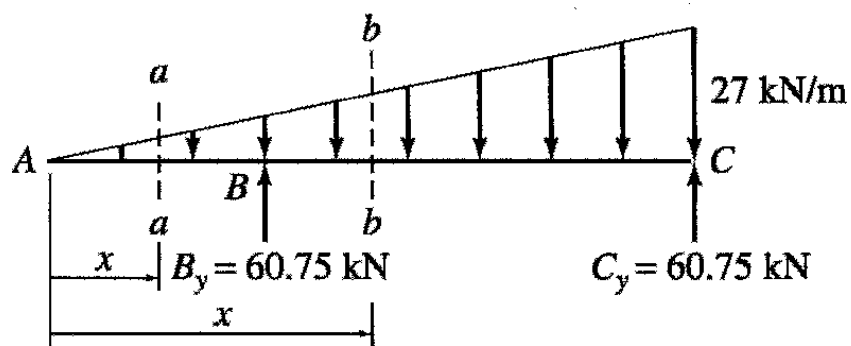
مطلوبست رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی سازه زیر به روش مقطع زدن :



رسم دیاگرام آزاد :



## مثال ۲



محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی :

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad B_x = 0$$

$$+ \zeta \sum M_c = 0$$

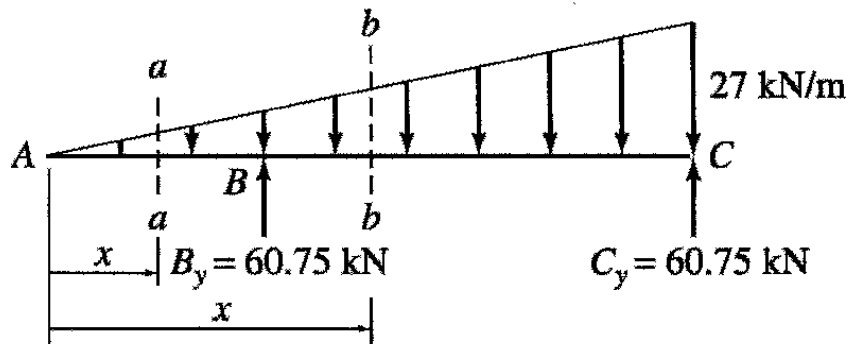
$$\left(\frac{1}{2}\right)(9)(27)\left(\frac{9}{3}\right) - B_y(6) = 0 \quad B_y = 60.75 \text{ kN } \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)(9)(27) + 60.75 + C_y = 0 \quad C_y = 60.75 \text{ kN } \uparrow$$

## مثال ۲

محاسبه نیروهای برشی داخلی :



$$w(x) = \left(\frac{27}{9}\right)x = 3x \text{ kN/m}$$

با رسم مقاطع aa و bb در قطعات AB و BC خواهیم داشت :

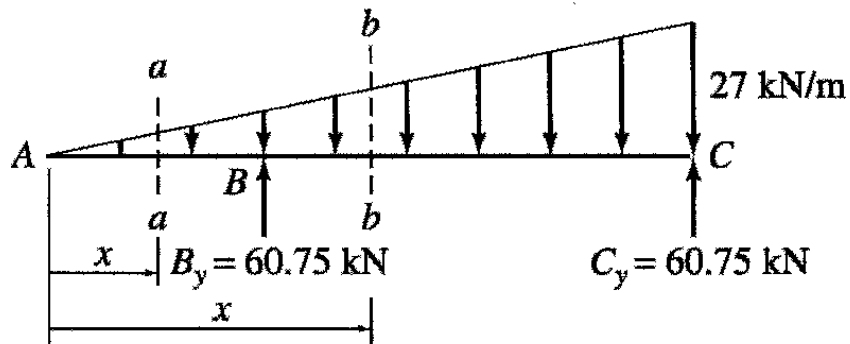
$$V = -\left(\frac{1}{2}\right)(x)(3x) = -\frac{3x^2}{2} \quad \text{for } 0 \leq x < 3 \text{ m}$$

$$V = -\left(\frac{3x^2}{2}\right) + 60.75 \quad \text{for } 3 \text{ m} < x < 9 \text{ m}$$

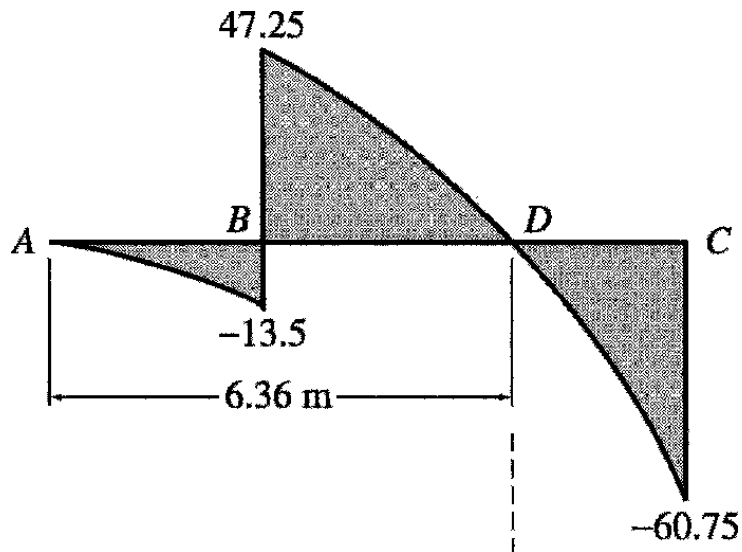


## مثال ۲

دیاگرام برش :



برای پیدا کردن محل نقطه D در قطعه BC داریم :

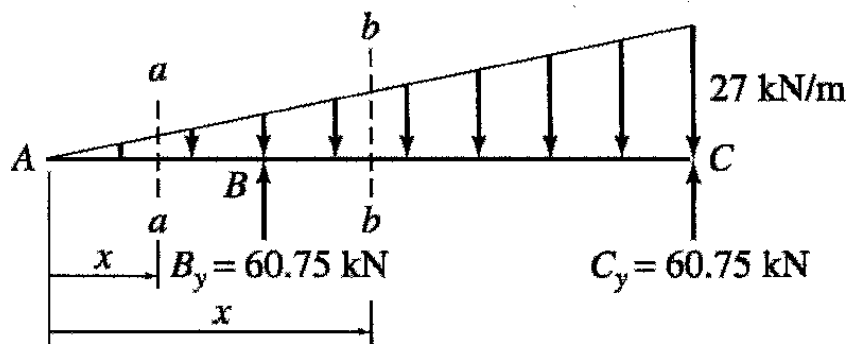


$$V = -\left(\frac{3x^2}{2}\right) + 60.75 = 0$$

$$x = 6.36 \text{ m}$$

## مثال ۲

محاسبه لنگرهای خمشی داخلی :



$$w(x) = \left(\frac{27}{9}\right)x = 3x \text{ kN/m}$$

همانند قبل با رسم مقاطع aa و bb در قطعات AB و BC خواهیم

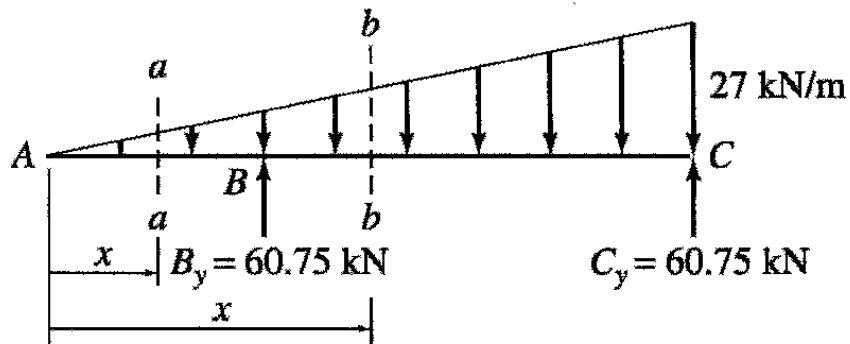
داشت :

$$M = -\left(\frac{1}{2}\right)(x)(3x)\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{x^3}{2} \quad \text{for } 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$M = -\left(\frac{x^3}{2}\right) + 60.75(x - 3) \quad \text{for } 3 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

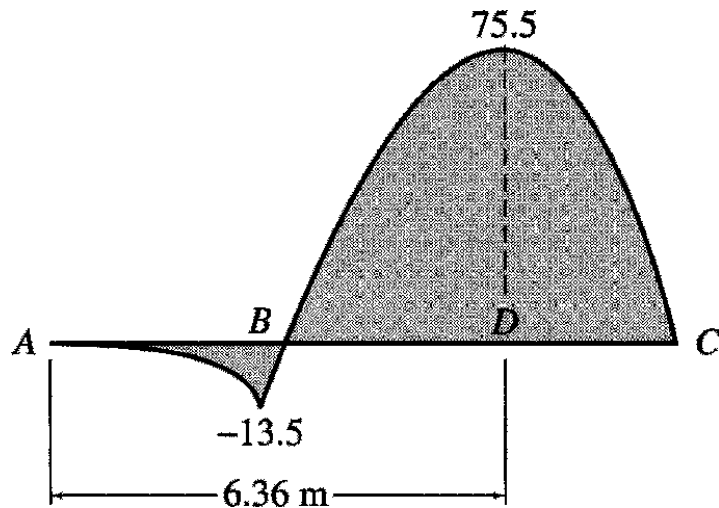
## مثال ۲

دیاگرام خمش :



برای پیدا کردن محل نقطه D (ماکزیمم ممان) از معادله  
ممان در قطعه BC مشتق می گیریم :

$$\frac{dM}{dx} = \left( -\frac{3x^2}{2} \right) + 60.75 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 6.36 \text{ m}$$



## مثال ۲

با توجه به محل ماکزیمم ممان (لنگر) می توان فهمید که مکان آن با مکان نقطه ای که برش صفر می باشد یکسان است !

همچنین مقایسه معادله برش در قطعه BC و معادله مشتق لنگر در قطعه BC نشان می دهد که با دو رابطه یکسان روبرو هستیم.

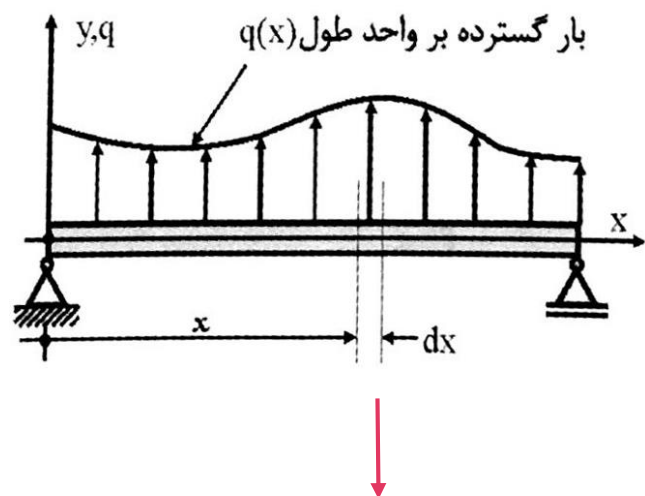
به عبارتی شیب دیاگرام خمش در یک نقطه برابر است با مقدار برش در آن نقطه.

در مورد نتایج فوق در اسلایدهای بعد بحث می شود.

حال در این مسئله با قرار دادن نقطه D در معادله لنگر قطعه BC میتوانیم مقدار حداکثر لنگر را بدست آوریم.

$$M_{\max} = -\left[\frac{(6.36)^3}{2}\right] + 60.75(6.36 - 3) = 75.5 \text{ kN-m}$$

## معادلات دیفرانسیل تعادل (رابطه بین بارگذاری، نیروی برشی و لنگر خمشی)



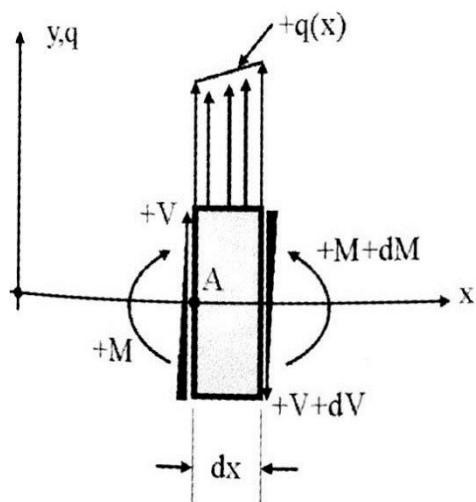
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0 \text{ و } V + qdx - (V + dV) = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = q$$

شیب نمودار برش، برابر با شدت بار وارده است.

تغییرات نیروی برشی بین دو نقطه C و D:

$$V_D - V_C = \int_{x_C}^{x_D} q dx$$

(سطح زیر منحنی بارگذاری بین نقاط C و D)



$$+ \curvearrowright \Sigma M_A = 0 \text{ و } (M + dM) - M - (V + dV)dx + qdx \frac{dx}{2} = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

شیب نمودار لنگر خمشی، برابر با نیروی برشی در هر مقطع است.

تغییرات لنگر خمشی بین دو نقطه C و D:

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx$$

(سطح زیر نمودار نیروی برشی بین مقاطع C و D)

# روش جمع زدن (Summation Method)

---

در این روش برای رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی از معادلات دیفرانسیل تعادل و نتایج حاصل از آن استفاده می شود. این روش بسیار کاربردی است و در مثال های آتی از آن استفاده می شود.

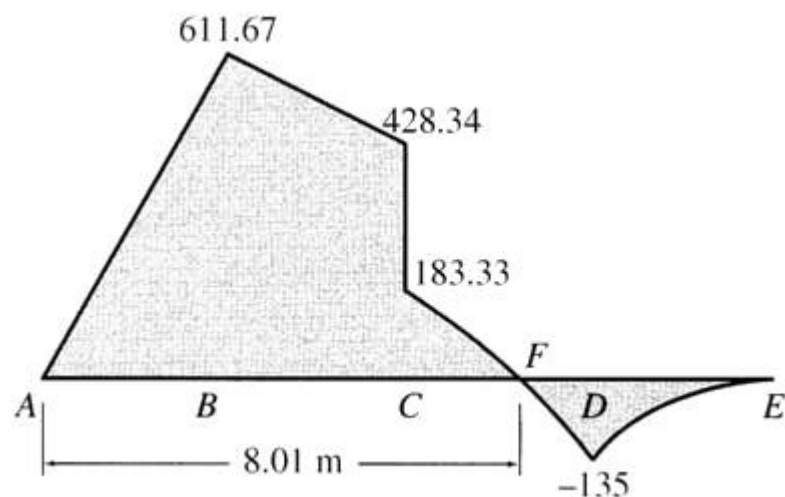
# منحنی کیفی تغییر شکل

منحنی کیفی تغییر شکل (منحنی الاستیک) یک سازه، به زبان ساده طرح کلی (و معمولاً اغراق آمیز) از سطح خنثای سازه در موقعیت تغییر شکل یافته آن تحت تأثیر کنش شرایط معینی از بارگذاری است.

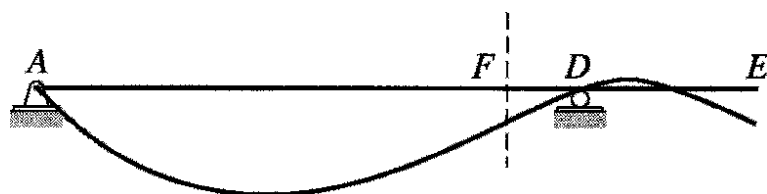
بر اساس قرار داد علامت پذیرفته شده لنگر مثبت باعث تقعر رو به بالای تیر (به جهت مثبت محور  $y$ ) می شود، در حالی که لنگر منفی سبب تقعر رو به پایین تیر می شود. با استفاده از علامت انحنا، منحنی تغییر شکل خمشی تیر را می توان سازگار با شرایط تکیه گاهی آن به آسانی ترسیم کرد.

## مثال ۳

با توجه به مثال ۱ یک منحنی تغییر شکل خمشی را ترسیم نمایید :



نمودار لنگر خمشی :

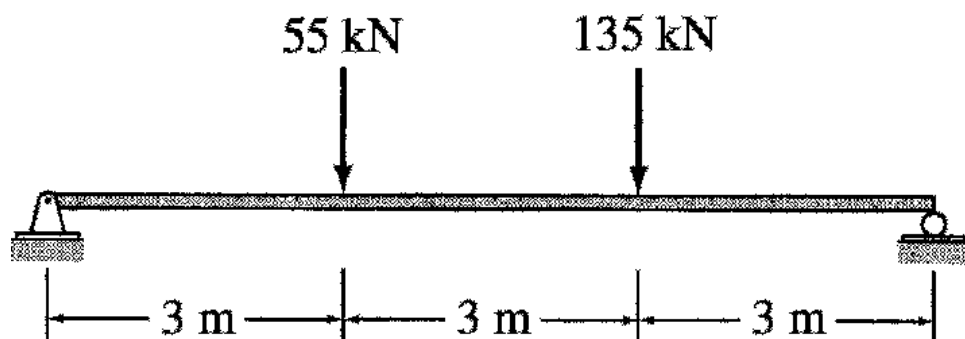


منحنی تغییر شکل خمشی :

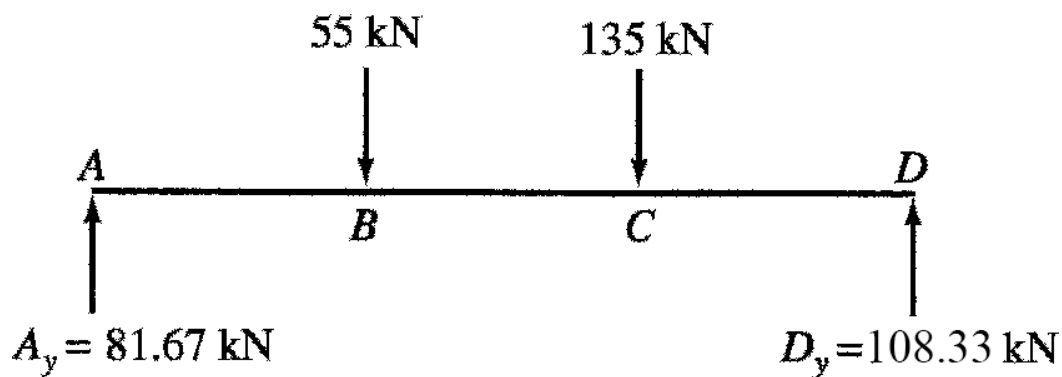


## مثال ۴

مطلوبست رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی سازه زیر به روش جمع زدن :

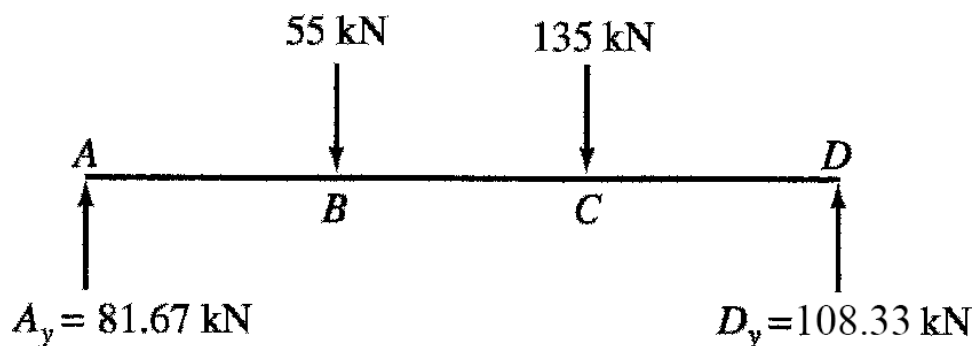


رسم دیاگرام آزاد :



## مثال ۴

محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی :



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

با استفاده از تناسب  $A_y = 55\left(\frac{6}{9}\right) + 135\left(\frac{3}{9}\right) = 81.67 \text{ kN} \quad A_y = 81.67 \text{ kN} \uparrow$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

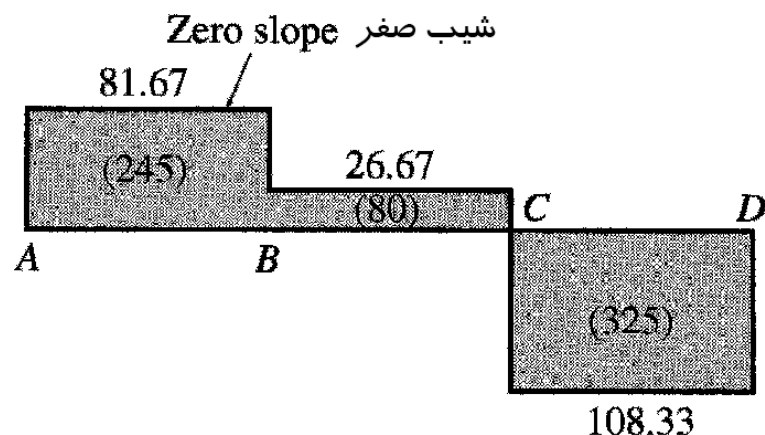
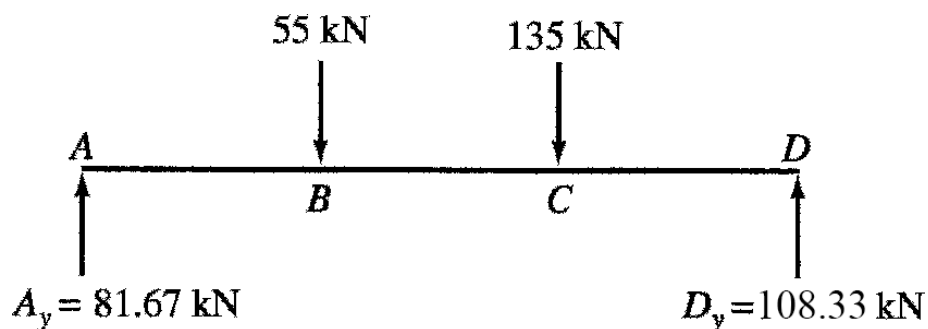
$$81.67 - 55 - 135 + D_y = 0$$

$$D_y = 108.33 \text{ kN}$$

$$D_y = 108.33 \text{ kN} \uparrow$$

# مثال ۴

رسم دیاگرام برش :



$$V_{A,R} = 81.67 \text{ kN}$$

$$V_{B,L} = 81.67 + 0 = 81.67 \text{ kN}$$

$$V_{B,R} = 81.67 - 55 = 26.67 \text{ kN}$$

$$V_{C,L} = 26.67 + 0 = 26.67 \text{ kN}$$

$$V_{C,R} = 26.67 - 135 = -108.33 \text{ kN}$$

$$V_{D,L} = -108.33 + 0 = -108.33 \text{ kN}$$

$$V_{D,R} = -108.33 + 108.33 = 0$$

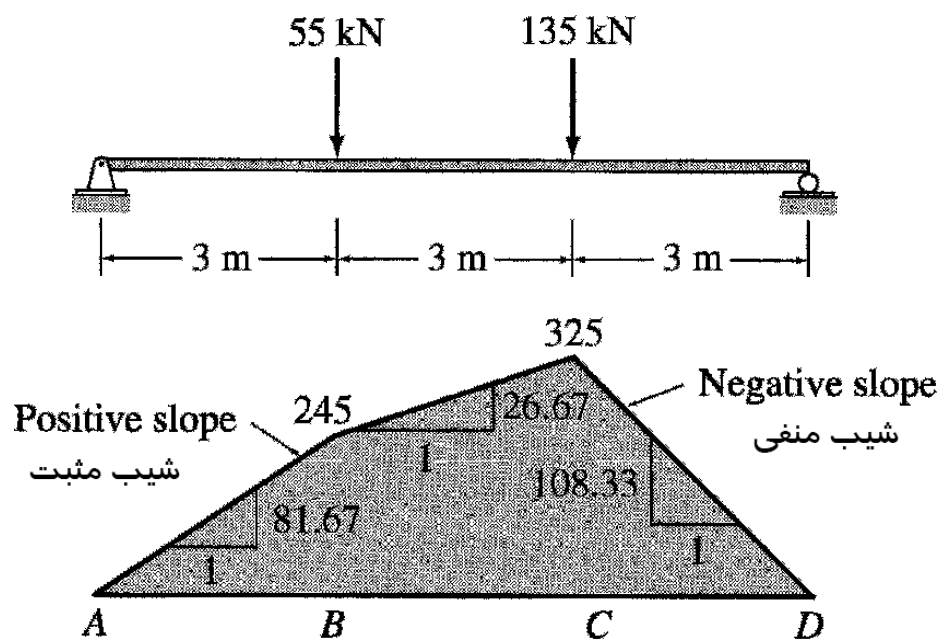
## مثال ۴

$$M_A = 0$$

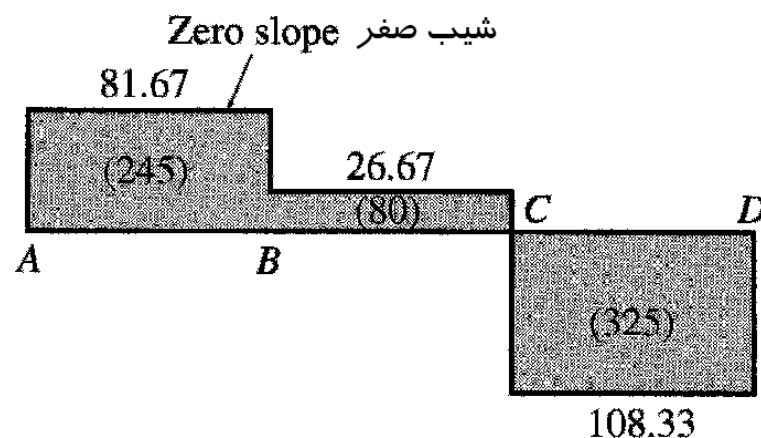
$$M_B = 0 + 245 = 245 \text{ kN-m}$$

$$M_C = 245 + 80 = 325 \text{ kN-m}$$

$$M_D = 325 - 325 = 0$$



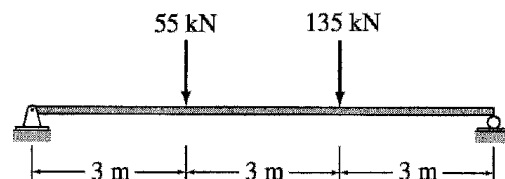
با استفاده از دیاگرام برش داریم :



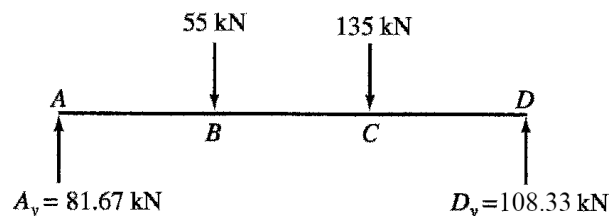
رسم دیاگرام لنگر خمشی :

# مثال ۴

سازه ایده آل :

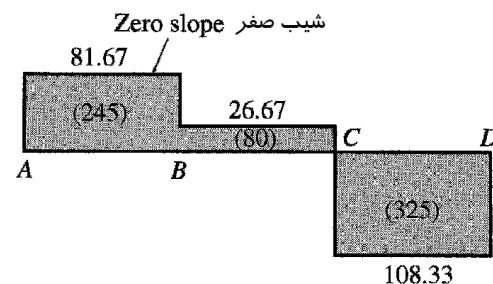


نمودار جسم آزاد :



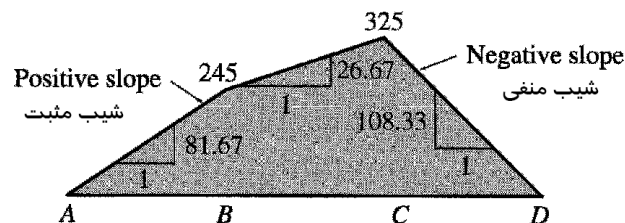
نمودار تغییرات نیروی برشی :

بر حسب KN

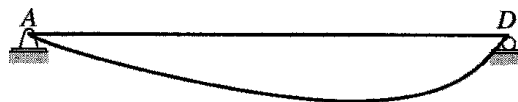


نمودار تغییرات لنگر خمشی :

بر حسب KN.m

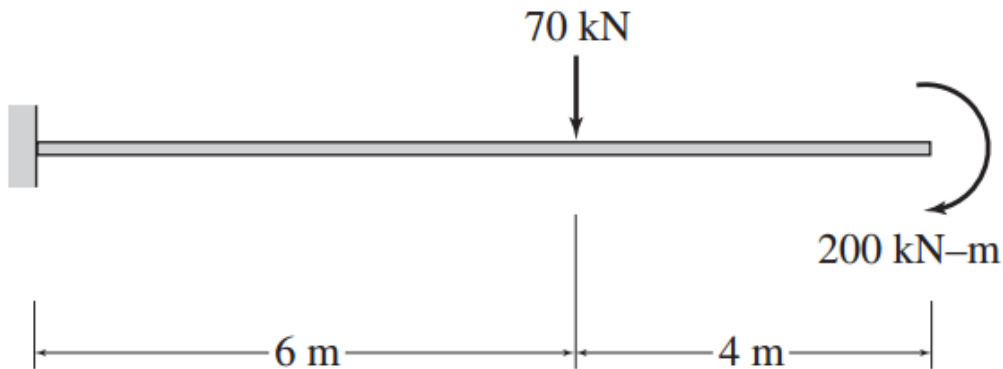


منحنی تغییر شکل خمشی :

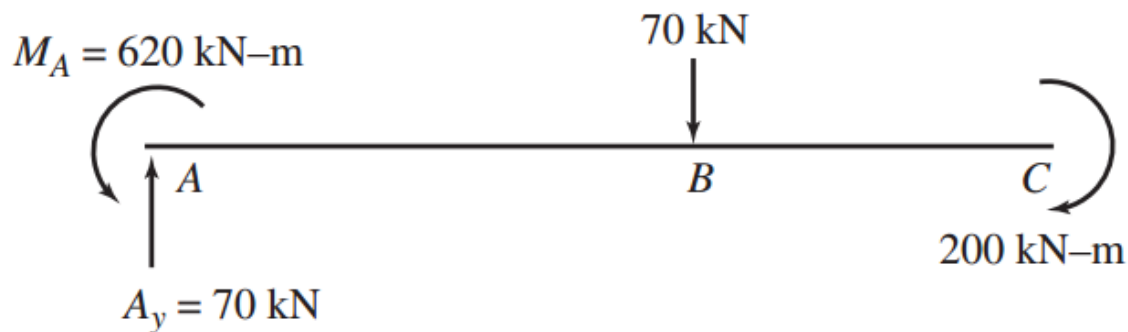


## مثال ۵

مطلوبست رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی سازه زیر به روش جمع زدن :

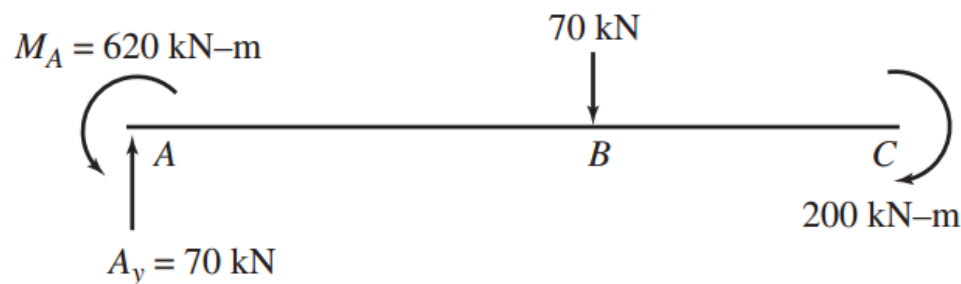


رسم دیاگرام آزاد :



# مثال ۵

محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی :



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 70 = 0$$

$$A_y = 70 \text{ kN}$$

$$A_y = 70 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ \curvearrowright \sum M_A = 0$$

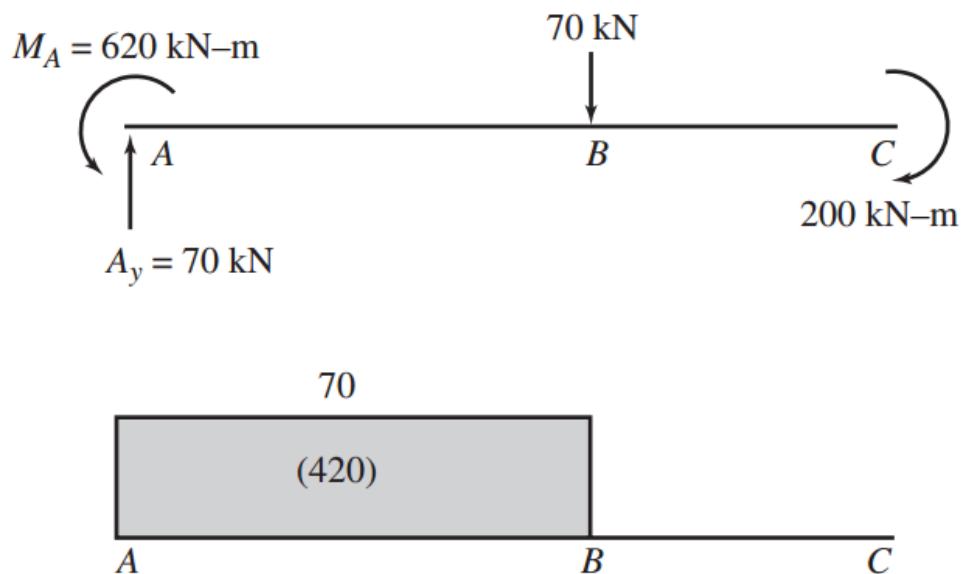
$$M_A - 70(6) - 200 = 0$$

$$M_A = 620 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_A = 620 \text{ kN-m} \curvearrowright$$

# مثال ۵

رسم دیاگرام برش :



$$V_{A,R} = 70 \text{ kN}$$

$$V_{B,L} = 70 + 0 = 70 \text{ kN}$$

$$V_{B,R} = 70 - 70 = 0$$

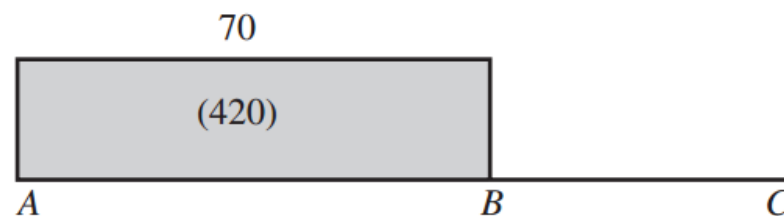
$$V_{C,L} = 0 + 0 = 0$$

$$V_{C,R} = 0 + 0 = 0$$

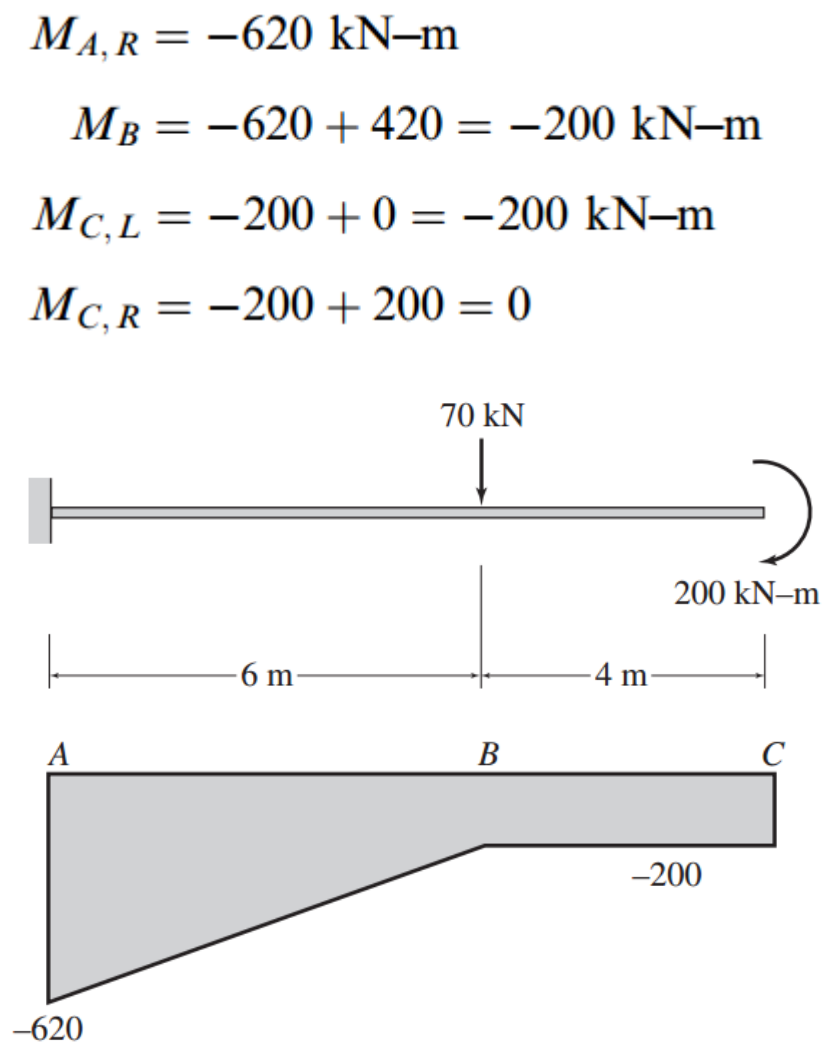


## مثال ۵

با استفاده از دیاگرام برش داریم :

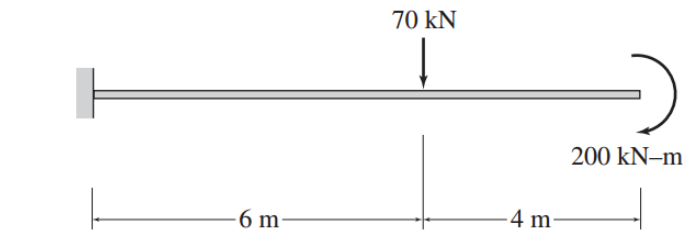


رسم دیاگرام لنگر خمشی :

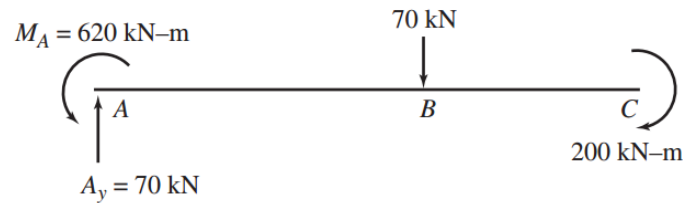


# مثال ۵

سازه ایده آل :

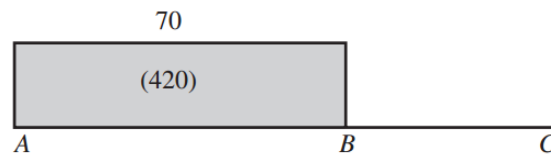


نمودار جسم آزاد :



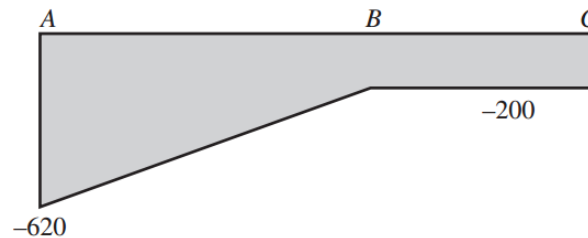
نمودار تغییرات نیروی برشی :

برحسب KN

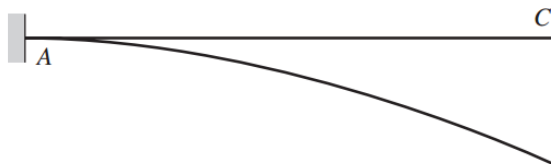


نمودار تغییرات لنگر خمشی :

برحسب KN.m

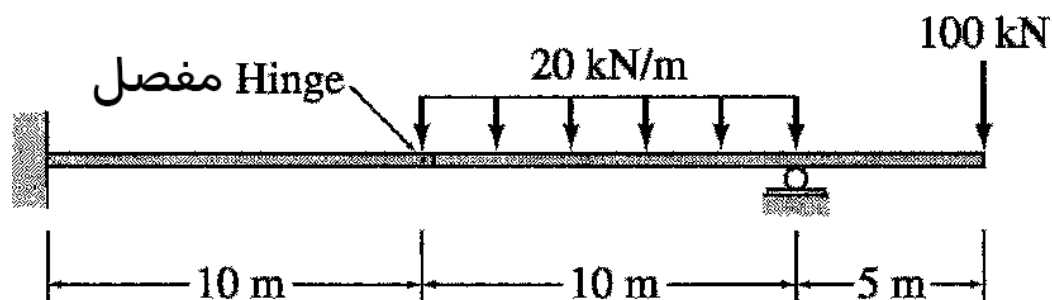


منحنی تغییر شکل خمشی :

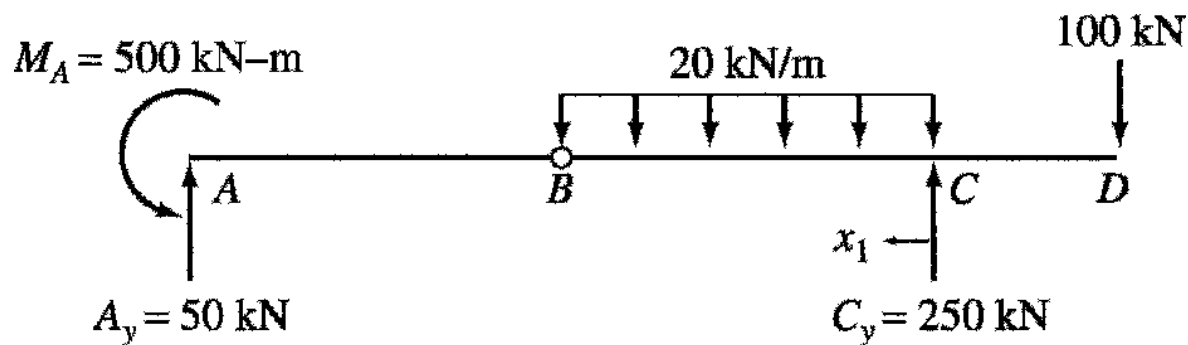


## مثال ۶

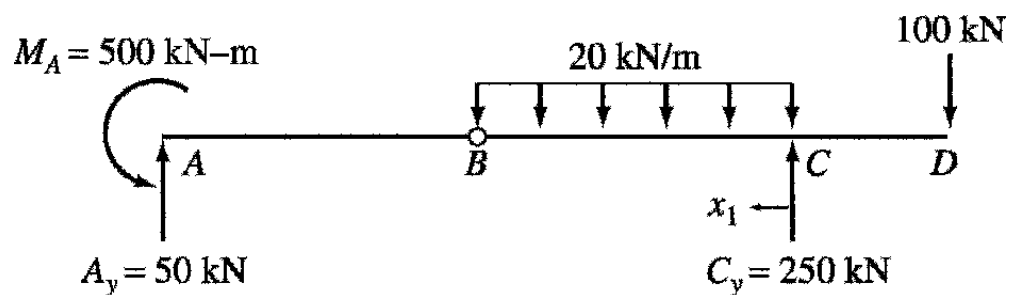
مطلوبست رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی سازه زیر به روش جمع زدن :



رسم دیاگرام آزاد :



## مثال ۶



محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی :

$$+ \zeta \sum M_B^{BD} = 0$$

$$-20(10)(5) + C_y(10) - 100(15) = 0$$

$$C_y = 250 \text{ kN}$$

$$C_y = 250 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 20(10) + 250 - 100 = 0$$

$$A_y = 50 \text{ kN}$$

$$A_y = 50 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ \zeta \sum M_A = 0$$

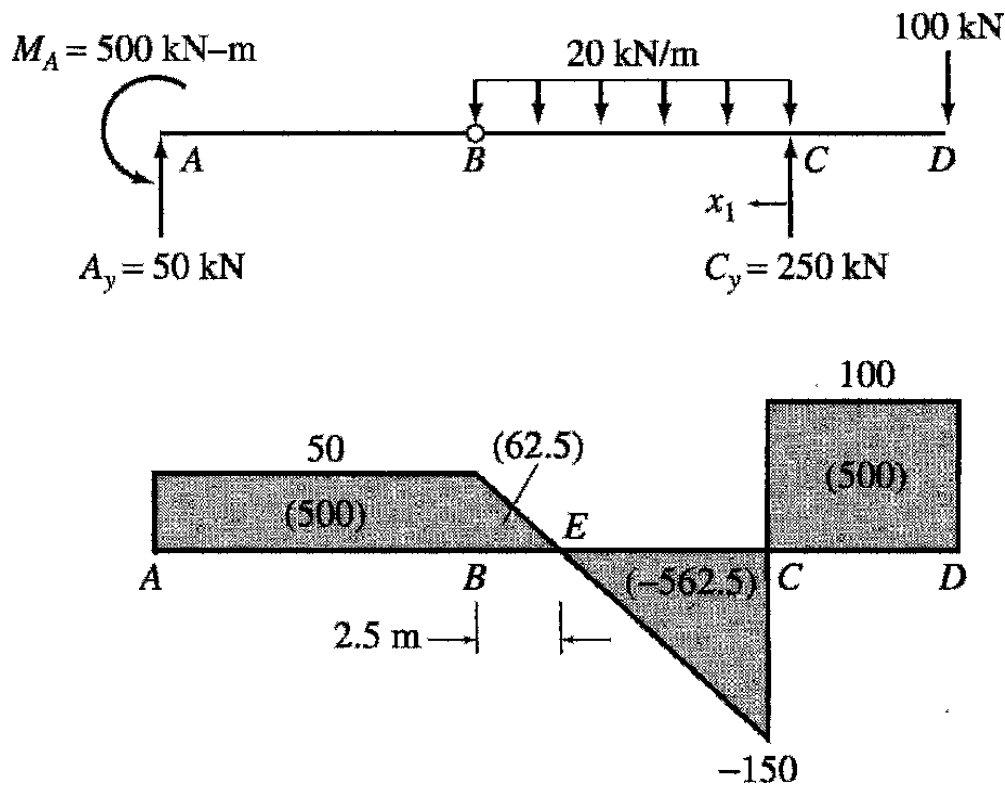
$$M_A - 20(10)(15) + 250(20) - 100(25) = 0$$

$$M_A = 500 \text{ kN-m}$$

$$M_A = 500 \text{ kN-m} \curvearrowleft$$

# مثال ۶

رسم دیاگرام برش :



$$V_{A,R} = 50 \text{ kN}$$

$$V_B = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$$

$$V_{C,L} = 50 - 20(10) = -150 \text{ kN}$$

$$V_{C,R} = -150 + 250 = 100 \text{ kN}$$

$$V_{D,L} = 100 + 0 = 100 \text{ kN}$$

$$V_{D,R} = 100 - 100 = 0$$

# مثال ۶

$$M_{A,R} = -500 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

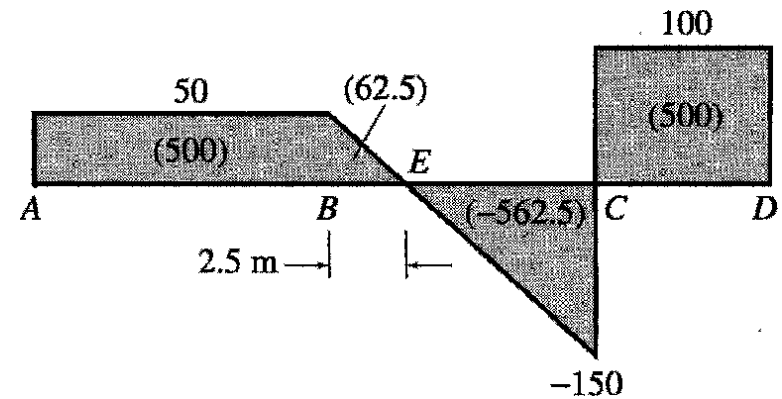
$$M_B = -500 + 500 = 0$$

$$M_E = 0 + 62.5 = 62.5 \text{ kN-m}$$

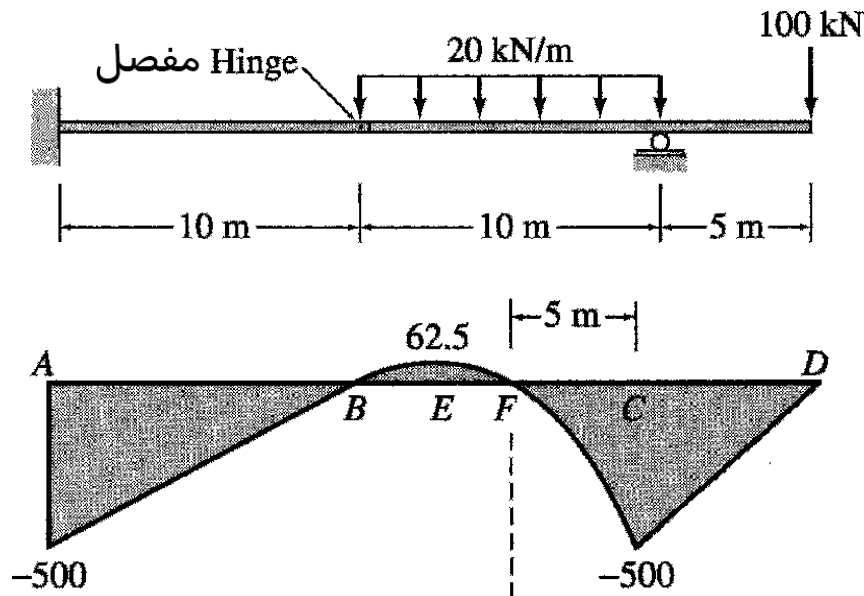
$$M_C = 62.5 - 562.5 = -500 \text{ kN-m}$$

$$M_D = -500 + 500 = 0$$

با استفاده از دیاگرام برش داریم :



رسم دیاگرام لنگر خمشی :



# مثال ۶

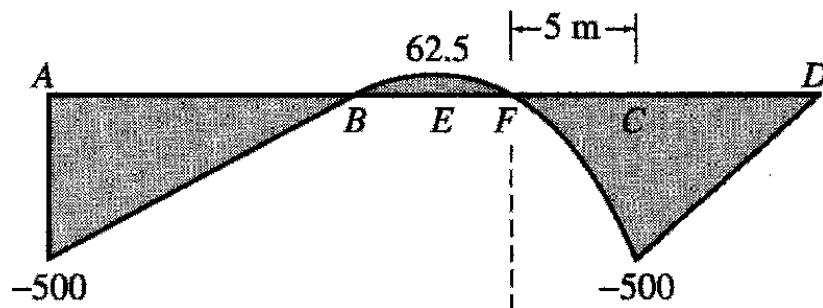
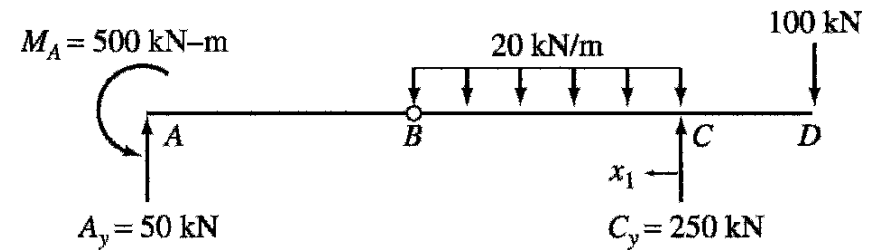
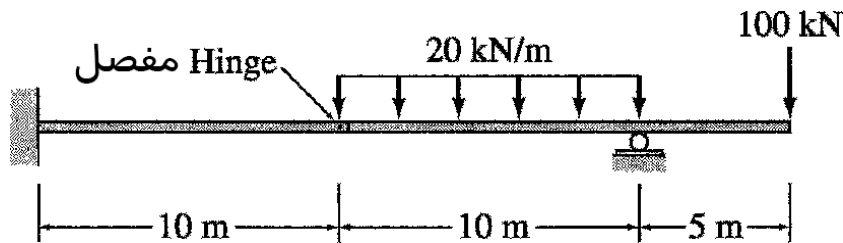
$$M = -100(5 + x_1) + 250x_1 - 20(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = 0$$

مکان نقطه F :

$$-10x_1^2 + 150x_1 - 500 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad \checkmark$$

$$x_1 = 10 \quad \times$$



# مثال ۶

سازه ایده آل :

نمودار جسم آزاد :

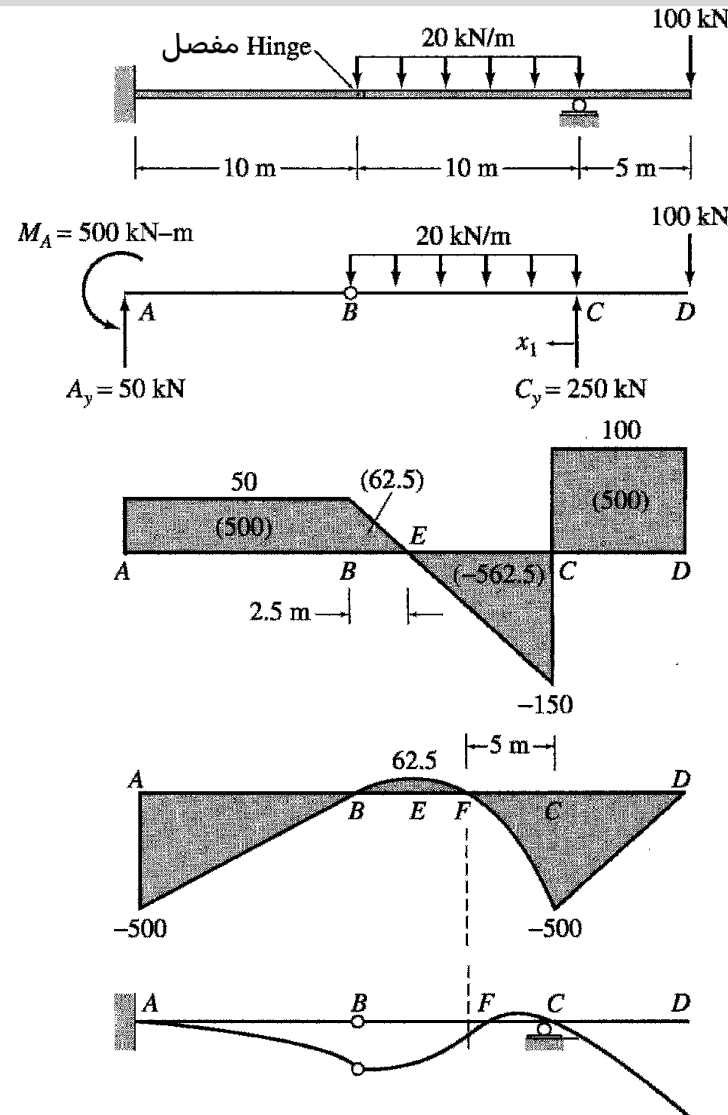
نمودار تغییرات نیروی برشی :

بر حسب KN

نمودار تغییرات لنگر خمشی :

بر حسب KN.m

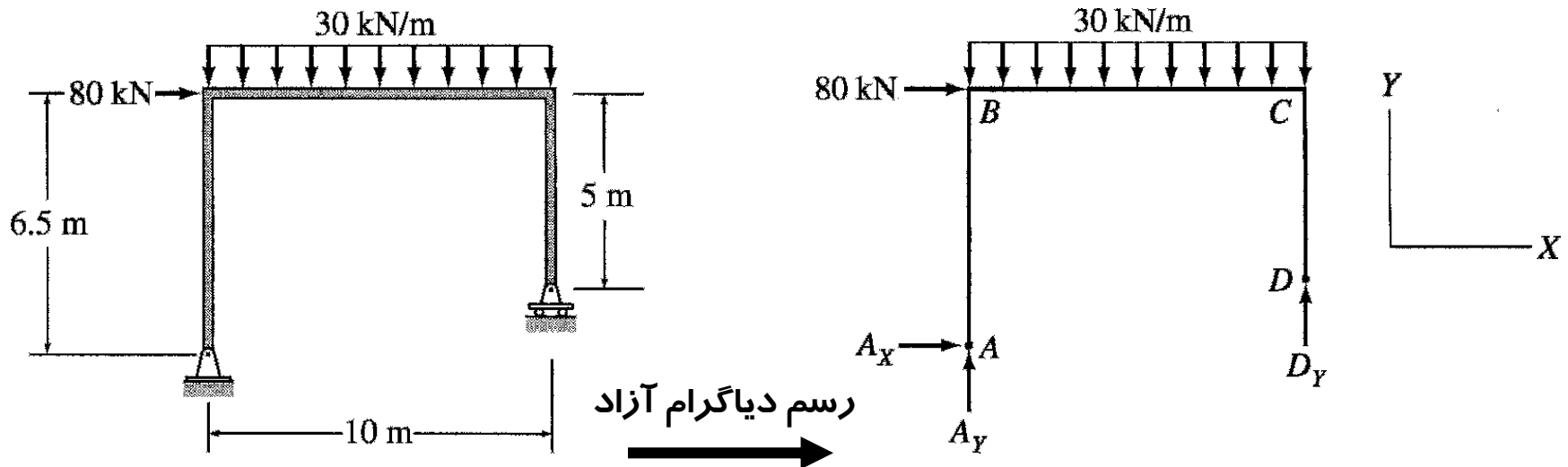
منحنی تغییر شکل خمشی:



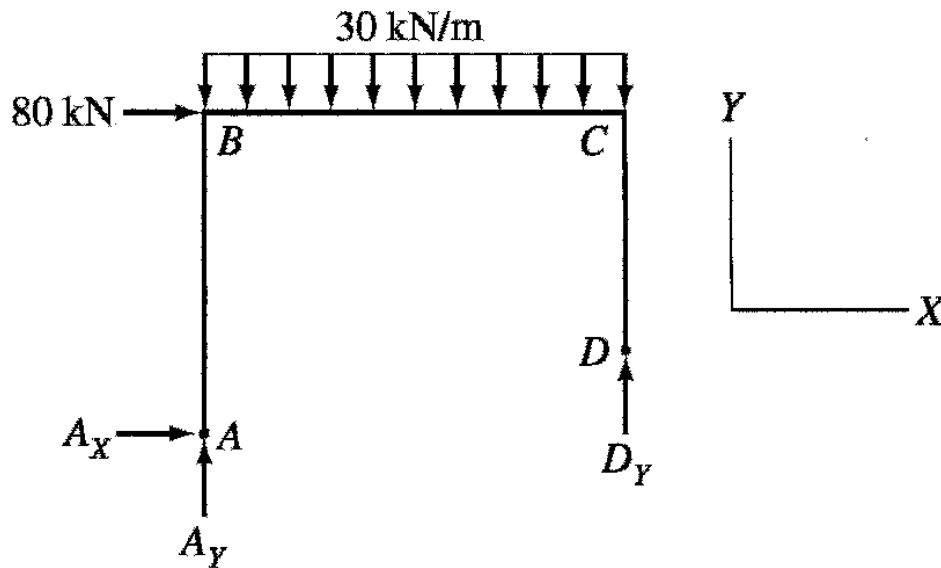


## مثال ۷

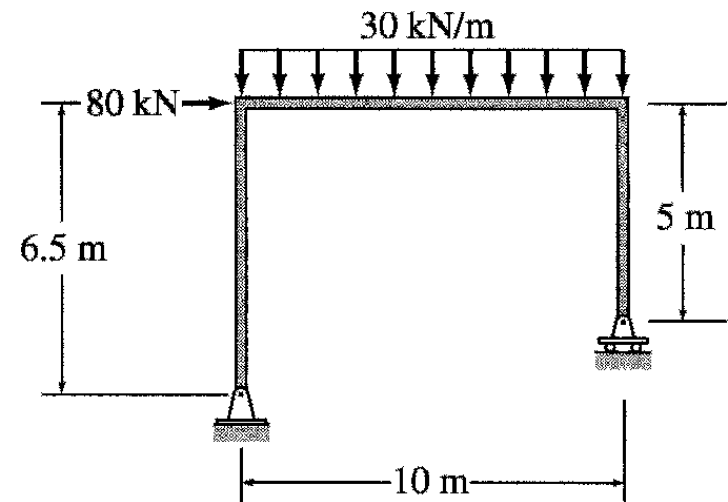
مطلوبست رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی سازه زیر به روش جمع زدن :



## مثال ۷



محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی :



$$A_X = -80 \text{ kN} \quad A_X = 80 \text{ kN} \leftarrow$$

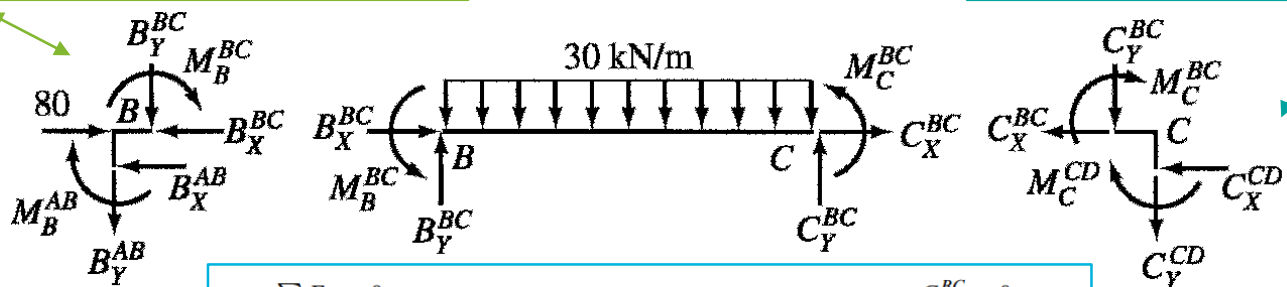
$$+ \zeta \sum M_A = 0 \quad -80(6.5) - 30(10)(5) + D_Y(10) = 0 \quad D_Y = 202 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_Y = 0 \quad A_Y - 30(10) + 202 = 0 \quad A_Y = 98 \text{ kN} \uparrow$$

# مثال ۷

$$B_X^{BC} = 0 \quad B_Y^{BC} = 98 \text{ kN} \quad M_B^{BC} = -520 \text{ kN-m}$$

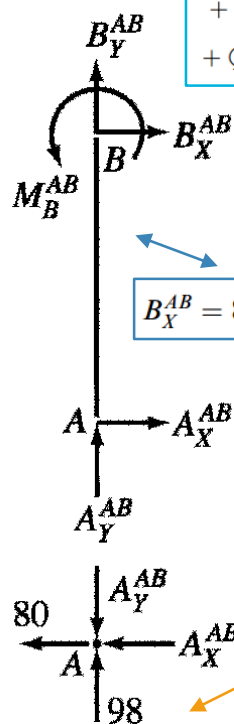
$$C_X^{CD} = 0 \quad C_Y^{CD} = -202 \text{ kN} \quad M_C^{CD} = 0$$



$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_X &= 0 & C_X^{BC} &= 0 \\ + \uparrow \sum F_Y &= 0 & 98 - 30(10) + C_Y^{BC} &= 0 & C_Y^{BC} &= 202 \text{ kN} \\ + \curvearrowright \sum M_B &= 0 & -520 - 30(10)(5) + 202(10) + M_C^{BC} &= 0 & M_C^{BC} &= 0 \end{aligned}$$

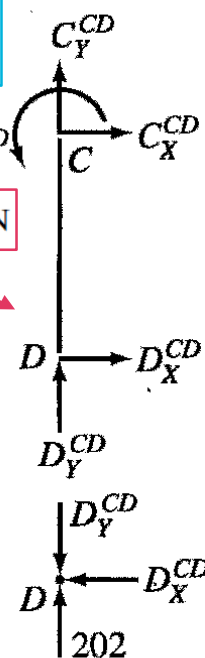
$$D_X^{CD} = 0 \quad D_Y^{CD} = 202 \text{ kN}$$

$$B_X^{AB} = 80 \text{ kN} \quad B_Y^{AB} = -98 \text{ kN} \quad M_B^{AB} = 520 \text{ kN-m}$$

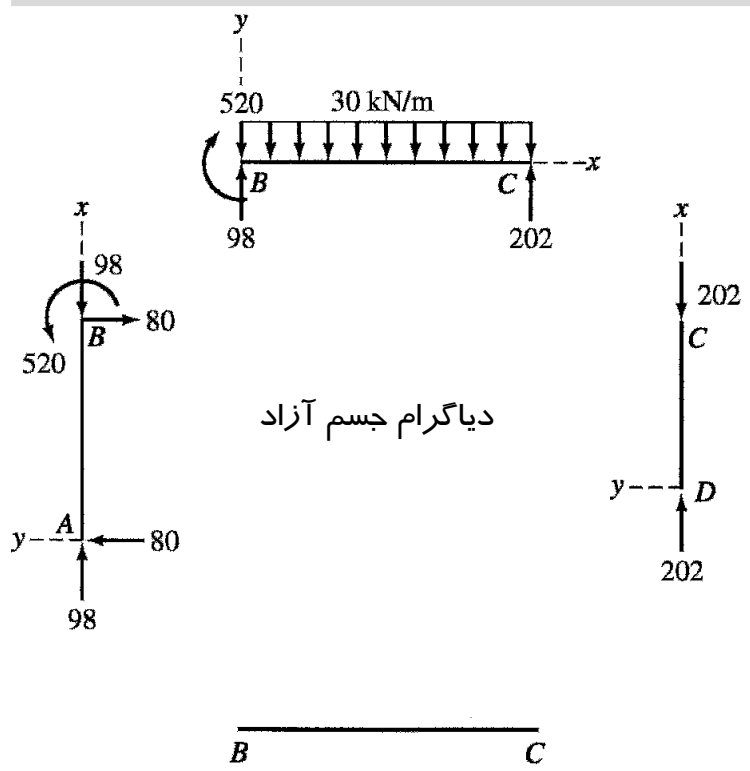


$$A_Y^{AB} = 98 \text{ kN}$$

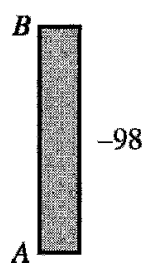
$$A_X^{AB} = -80 \text{ kN}$$



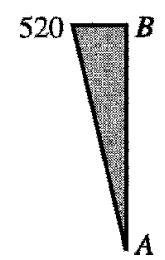
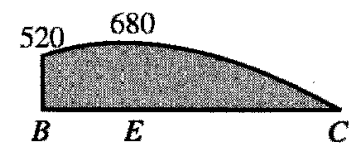
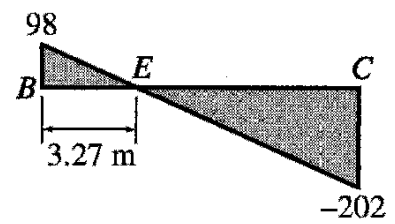
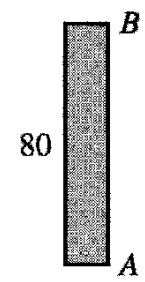
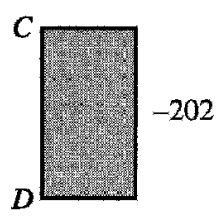
# مثال ۷



دیاگرام جسم آزاد



دیاگرام تغییرات نیروی محوری

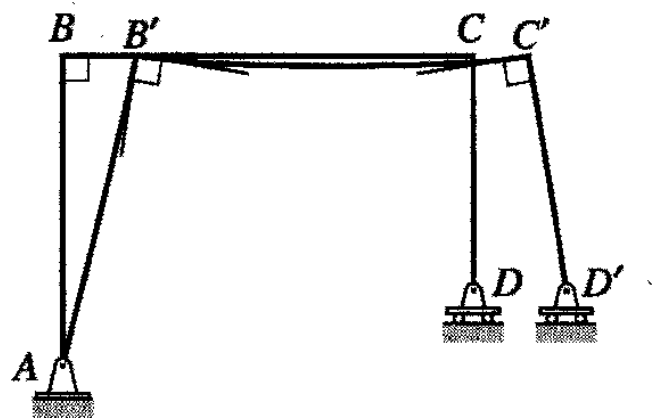
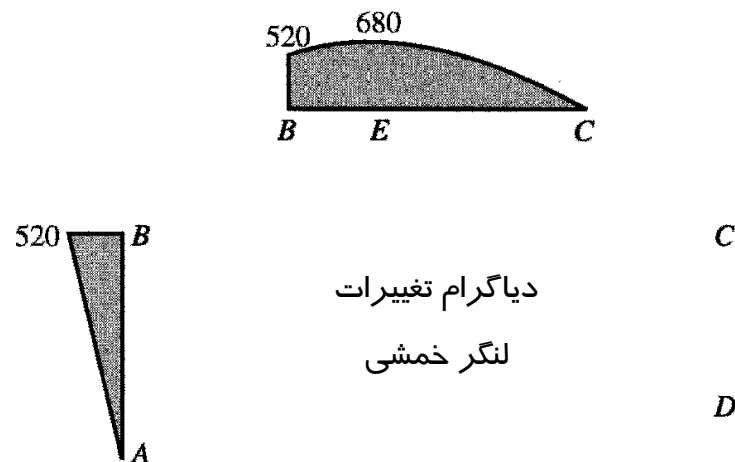
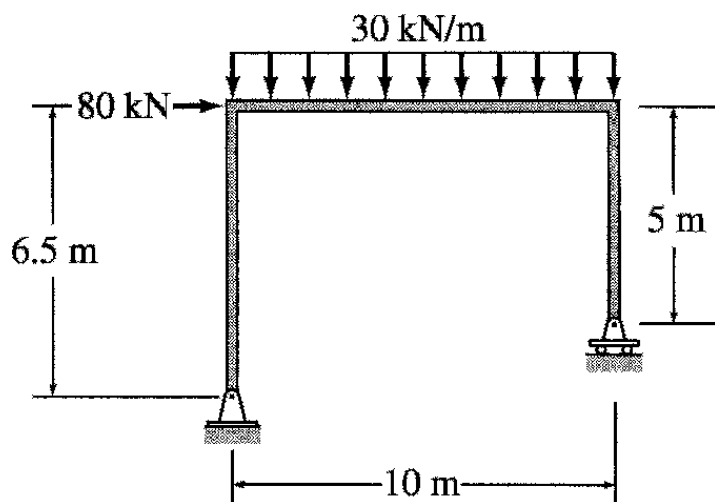


دیاگرام تغییرات لنگر خمشی

دیاگرام تغییرات نیروی برشی



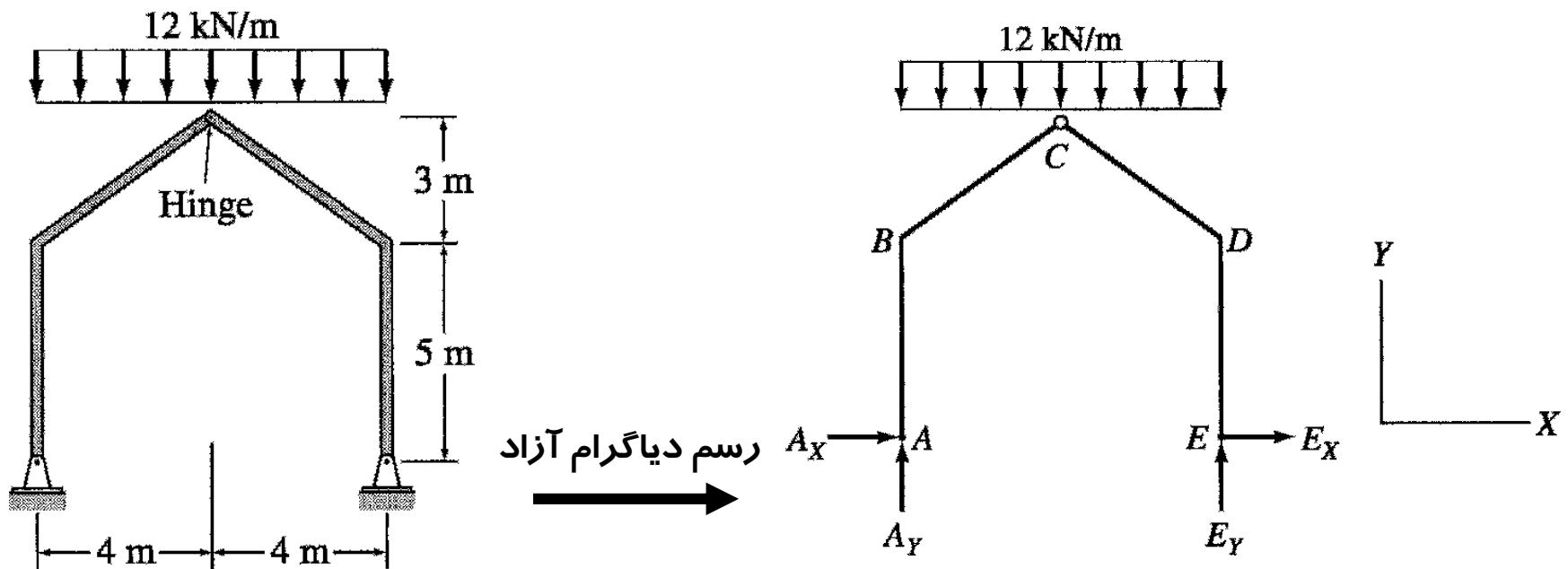
# مثال ۷



رسم منحنی تغییر شکل خمشی با استفاده  
از دیاگرام خمش و شرایط تکیه گاهی :

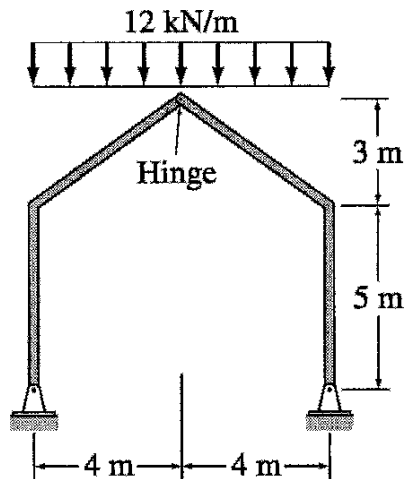
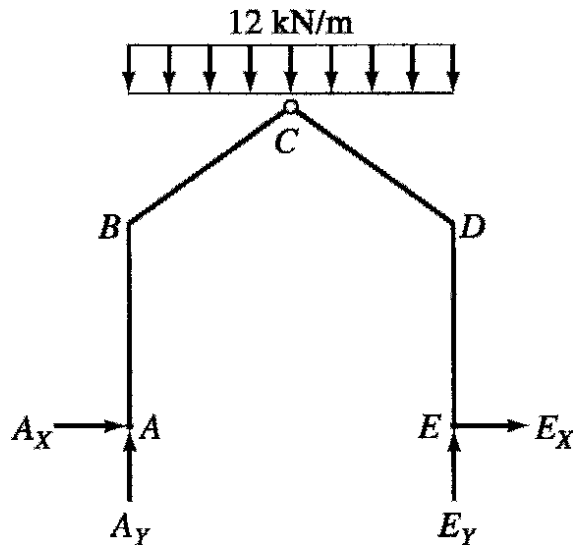
# مثال ۸

مطلوبست رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی سازه زیر به روش جمع زدن :



# مثال ۸

محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی :



$$+ \zeta \sum M_E = 0$$

$$-A_Y(8) + 12(8)(4) = 0$$

$$A_Y = 48 \text{ kN } \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_Y = 0$$

$$48 - 12(8) + E_Y = 0$$

$$E_Y = 48 \text{ kN } \uparrow$$

$$+ \zeta \sum M_C^{AC} = 0$$

$$A_X(8) - 48(4) + 12(4)(2) = 0$$

$$A_X = 12 \text{ kN } \rightarrow$$

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0$$

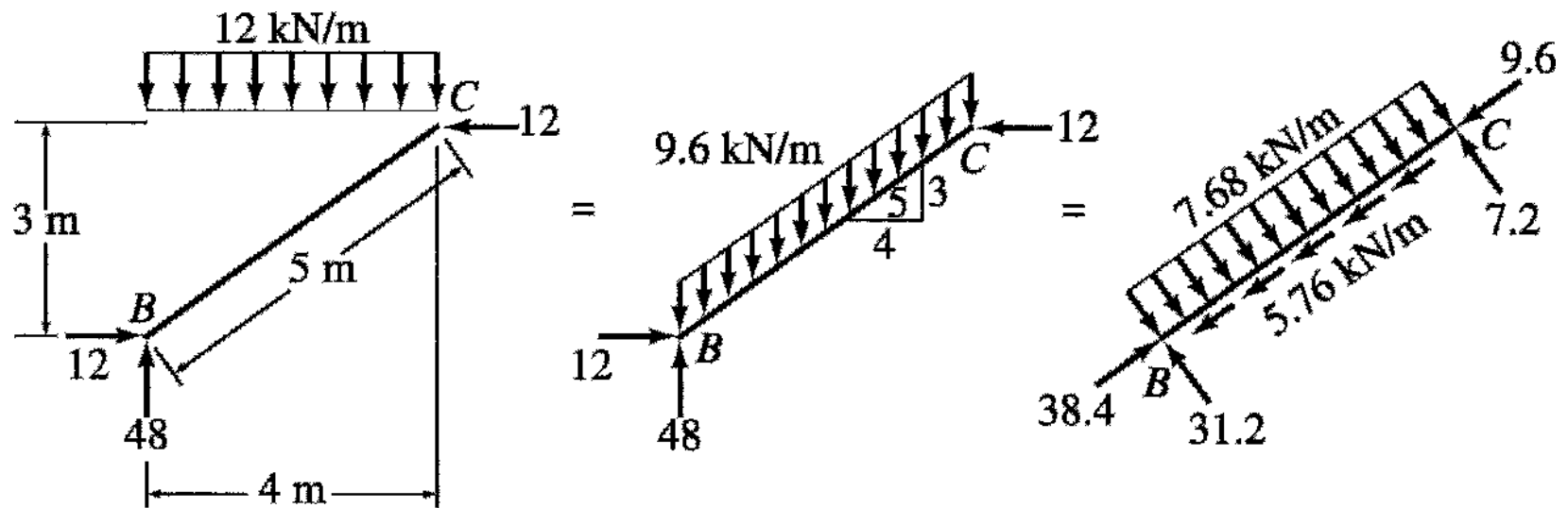
$$12 + E_X = 0$$

$$E_X = -12 \text{ kN}$$

$$E_X = 12 \text{ kN } \leftarrow$$

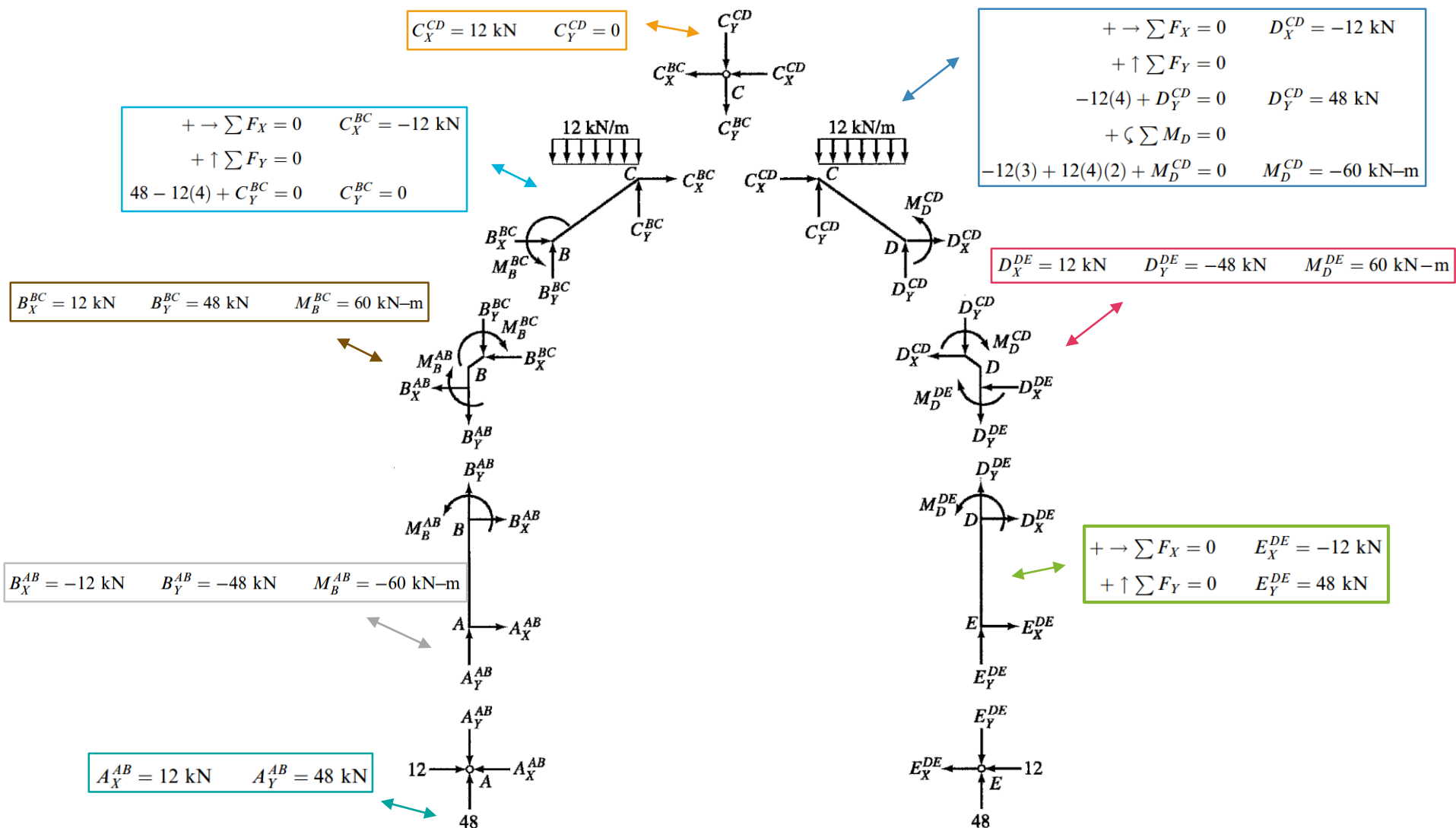
# مثال ۸

تجزیه بارها روی عضو مورب :

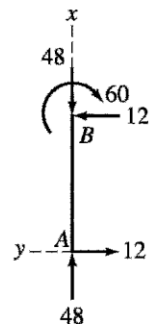
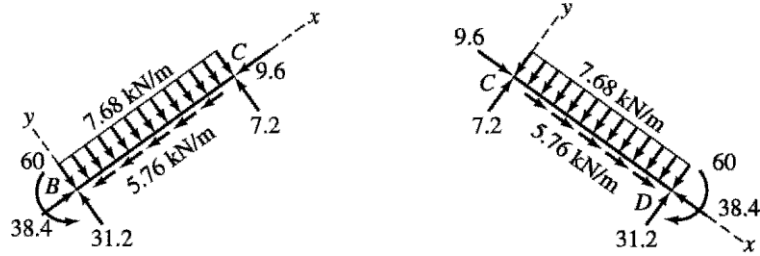




# مثال ۸



# مثال ۸



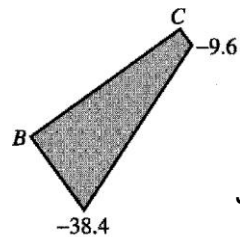
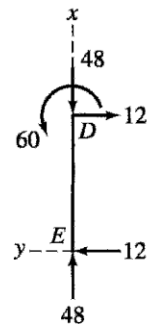
دیاگرام جسم آزاد

$$AB \quad P = -48$$

$$BC \quad P = -38.4 + 5.76x$$

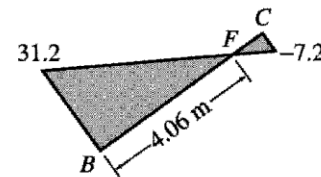
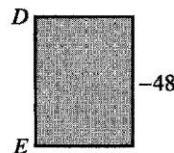
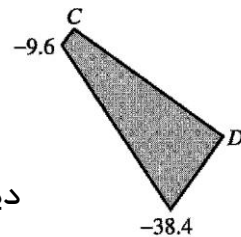
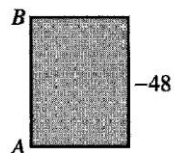
$$CD \quad P = -9.6 - 5.76x$$

$$DE \quad P = -48$$



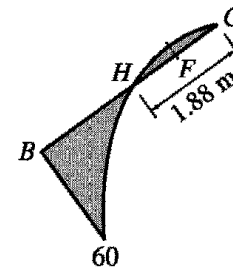
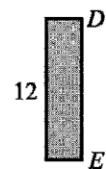
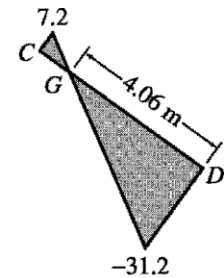
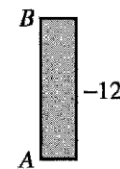
دیاگرام تغییرات

نیروی محوری



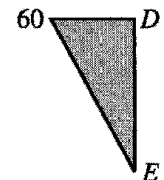
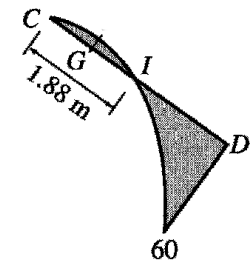
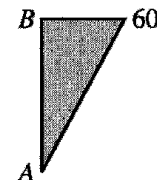
دیاگرام تغییرات

نیروی برشی

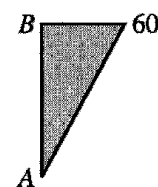
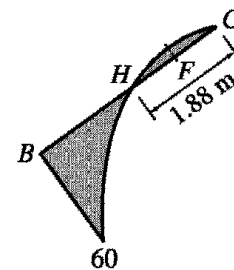
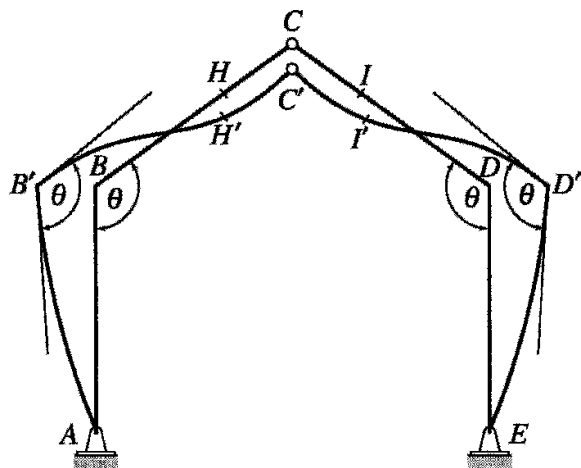
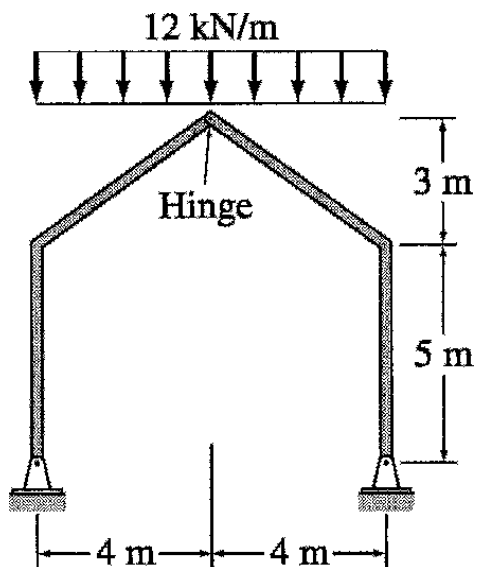


دیاگرام تغییرات

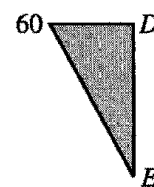
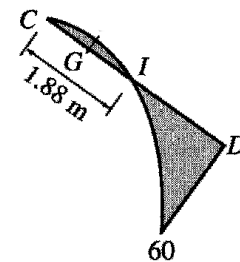
لنگر خمشی



# مثال ۸



دیاگرام تغییرات  
لنگر خمشی



رسم منحنی تغییر شکل خمشی با استفاده از دیاگرام  
خمش و شرایط تکیه گاهی :

با تشکر از توجه شما