

فصل پنجم:

تغییر شکل سازه‌ها

۵-۱ مقدمه

سازه‌ها همچون دیگر اجسام فیزیکی تحت تأثیر نیروهای وارده دچار تغییر شکل می‌شوند. از دیگر دلایل معمول تغییر شکل سازه‌ها می‌توان به تغییرات دما و نشست‌های تکیه‌گاهی اشاره کرد. چنانچه با حذف عامل ایجاد کننده تغییر شکل، تغییر شکل ناپدید شود و سازه شکل اولیه خود را بازیابد، این نوع تغییر شکل را تغییر شکل الاستیک یا ارتجاعی می‌نامند. تغییر شکل دائمی سازه را تغییر شکل غیر الاستیک یا خمیری (غیر ارتجاعی) می‌نامند. در درس تحلیل سازه ۱ فقط بر روی تغییر شکل الاستیک خطی تمرکز می‌شود. این نوع تغییر شکل به صورت خطی همراه با بارهای اعمال شده تغییر می‌کند. می‌دانیم برای پاسخ خطی سازه به بارهای وارده، سازه باید از مصالح الاستیک خطی ساخته شده باشد و تغییر شکل‌های آن نیز کوچک باشد. در چنین سازه‌هایی اصل برهم‌نهی یا جمع آثار قوا معتبر است.

روش‌های محاسبه تغییر شکل‌های خمشی را به‌طور کلی می‌توان به دو گروه دسته‌بندی کرد:

۱. روش‌های هندسی: بر اساس در نظر گرفتن هندسه شکل تغییر یافته سازه

۲. روش‌های کار - انرژی: بر اساس اصول پایه‌ای کار و انرژی

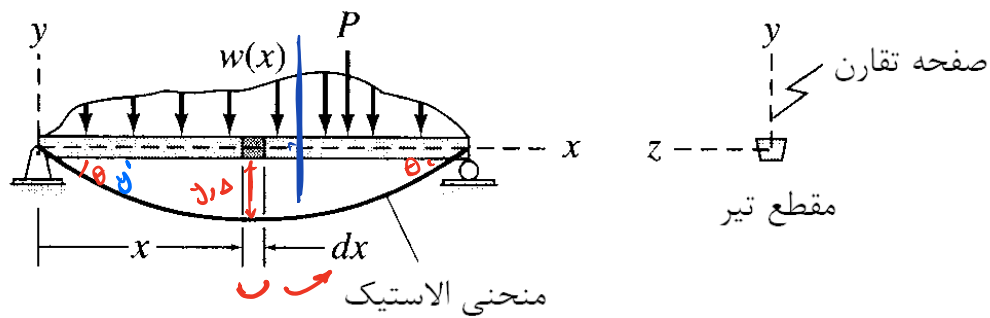
در این فصل ابتدا به بررسی روش‌های هندسی معمول برای تعیین شیب و تغییر شکل خمشی تیرهای معین استاتیکی می‌پردازیم و در قسمت دوم روش‌های کار و انرژی مورد بحث قرار می‌گیرد.

۵-۲ تئوری تیر الاستیک (معادله دیفرانسیل تغییر شکل خمشی تیر)

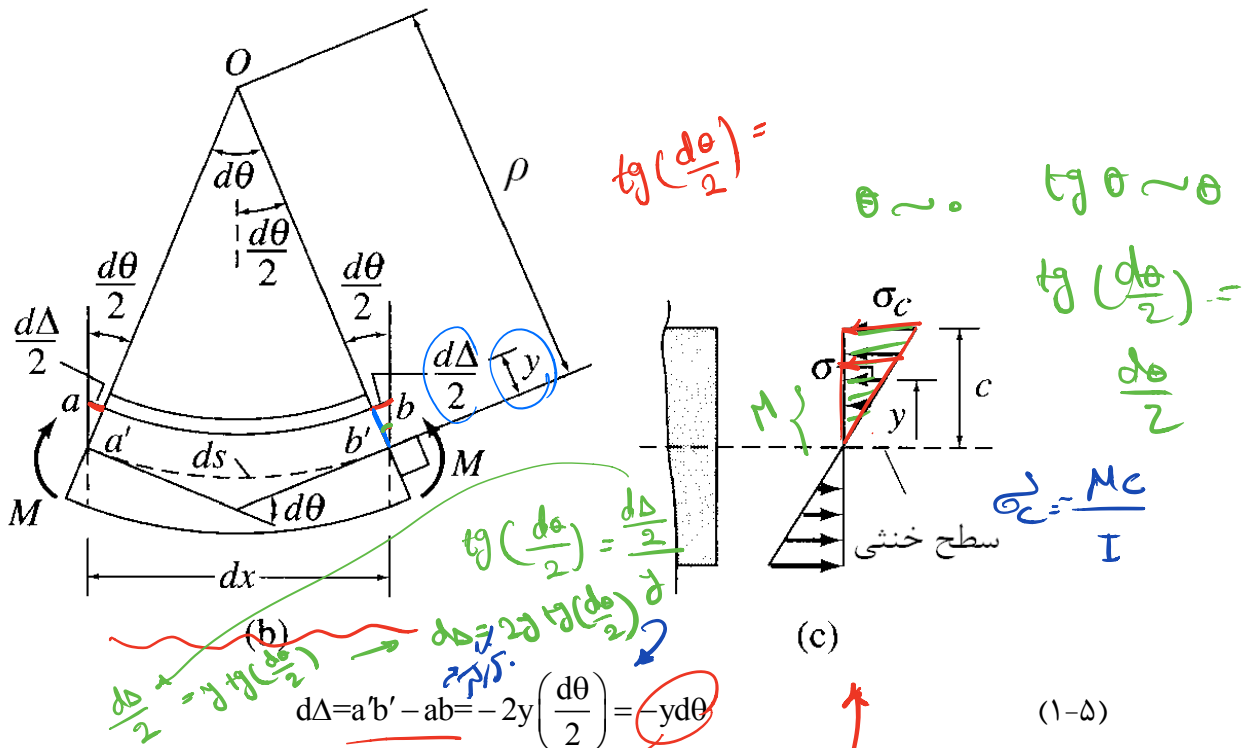
تیر الاستیک در ابتدا مستقیمی را در نظر می‌گیریم که تحت تأثیر بارگذاری دلخواه عمود بر خط مرکز خود و واقع در سطح تقارن مقطع خود قرار دارد (شکل a). سطح خنثی تیر در حالت تغییر شکل یافته را منحنی الاستیک یا منحنی تغییر شکل خمشی تیر می‌نامند. برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک تیر، توجه خود را بر روی جزء بی‌نهایت کوچک dx از تیر متمرکز می‌کنیم (شکل b). همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، فرض می‌کنیم که مقاطع صفحه‌ای عمود بر سطح خنثای تیر پیش از خمش، پس از خمش نیز به صورت صفحه‌ای و عمود بر سطح خنثی باقی می‌مانند. قرارداد علامت لنگر خمشی M همانند قرارداد مطرح شده در فصل نیروهای داخلی اعضا می‌باشد که بر اساس آن لنگر خمشی مثبت باعث ایجاد فشار در تارهای بالای سطح خنثی (در جهت مثبت y) می‌شود. تنش‌ها و کرنش‌های کششی مثبت در نظر گرفته

می‌شوند. شیب منحنی الاستیک یعنی $\theta = \frac{dy}{dx}$ بسیار کوچک فرض می‌شود که θ^2 در مقایسه با واحد ناچیز

باشد و $\sin(\theta) = \theta$ و $\cos(\theta) = 1$ ، توجه داشته باشید که $d\theta$ نشانگر تغییر شیب در طول بی‌نهایت کوچک dx است. با توجه به شکل b مشاهده می‌شود که تغییر شکل خمشی تار اختیاری ab واقع در فاصله y از سطح خنثی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:



(a)



(c)

با توجه به کوچک بودن تغییر شکل‌ها و دانستن آنکه $dx = ds = \rho d\theta$ ، بنابراین کرنش تار ab برابر است با:

$$\epsilon = \frac{d\Delta}{dx} = \frac{d\Delta}{ds} = -\frac{y d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (2-5)$$

ρ شعاع انحنا نقطه‌ای مشخص روی منحنی الاستیک تیر می‌باشد.

با جایگزین کردن رابطه تنش-کرنش خطی $\sigma = \epsilon \times E$ در معادله بالا نتیجه می‌شود:

$$\sigma = E \epsilon$$

$$\sigma = -\frac{E y}{\rho} \quad (3-5)$$

که در اینجا σ تنش در تار ab و E نشانگر مدول الاستیسیته (یانگ) می‌باشد. معادله فوق بیانگر آن است که مقدار تنش به صورت خطی همراه با فاصله y از سطح خنثی تغییر می‌کند (شکل c). چنانچه σ_c نشانگر تنش در بالاترین تار واقع در فاصله c از سطح خنثی باشد (شکل c)، در این صورت تنش σ در فاصله y از سطح

خنثی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \quad \sigma = \frac{\sigma_c y}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_c}{c} \quad (4-5)$$

از آنجاکه لنگر خمشی M برابر است با جمع لنگرهای وارد بر تمامی تارهای موجود در سطح مقطع تیر حول محور خنثی، می توان نوشت:

$$M = \int_A -\sigma y dA \quad (5-5)$$

با جایگزین کردن معادله (۴-۵) در معادله (۵-۵) نتیجه می شود:

$$M = -\frac{\sigma_c}{c} \int_A y^2 dA = -\frac{\sigma_c}{c} I \quad (6-5)$$

یا:

$$\sigma_c = -\frac{Mc}{I} \quad (7-5)$$

I ممان اینرسی تیر نسبت به تار خنثی.

با استفاده از معادله (۳-۵) داریم:

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \quad \sigma = -\frac{My}{I} \quad (8-5)$$

حال از ترکیب معادلات (۳-۵) و (۸-۵) رابطه لنگر-انحنا به دست می آید:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (9-5)$$

اصطلاحاً انحنا نامیده می شود.

در رابطه (۹-۵) به حاصل ضرب EI اصطلاحاً **سختی (صلبیت) خمشی** تیر اطلاق می شود و همیشه مقدار مثبتی را به خود اختصاص می دهد.

در کتب ریاضی رابطه انحنا به صورت زیر تعریف شده است:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y / dx^2}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' \quad (10-5)$$

به طور کلی حل معادله دیفرانسیل غیرخطی فوق بسیار پیچیده است، اما از آنجاکه تغییر شکل های الاستیک مجاز در مسائل مهندسی کوچک می باشند، شیب منحنی تغییر شکل بسیار کوچک می باشد ($\frac{dy}{dx} = 0$) و مربع آن یک کمیت قابل صرف نظر خواهد بود در نتیجه:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \approx y'' \quad (11-5)$$

با جایگزین کردن معادله (۵-۱۱) در معادله (۵-۹) معادله دیفرانسیل زیر برای تغییر شکل خمشی تیرها به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad y'' = \frac{M}{EI} \quad (۵-۱۲)$$

به معادله فوق، معادله اویلر-برنولی تیرها گفته می‌شود. از آنجاکه $\theta = \frac{dy}{dx} = y'$ ، معادله (۵-۱۲) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\theta'' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (۵-۱۳)$$

قسمت اول: روش‌های هندسی

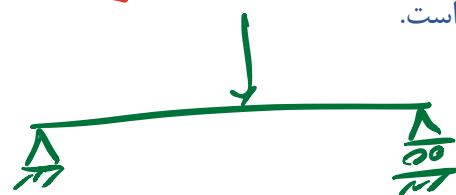
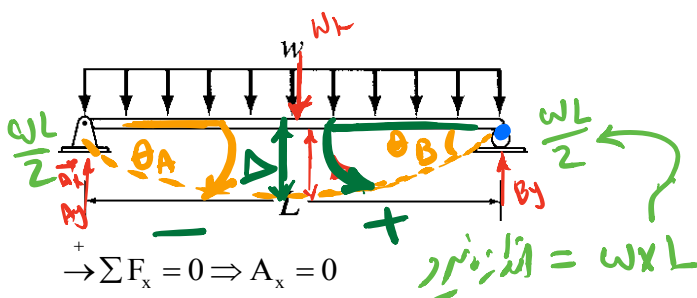
۵-۳ روش انتگرال‌گیری مستقیم (انتگرال دوپل)

روش انتگرال‌گیری مستقیم اصولاً نیازمند نوشتن عبارت $\frac{M}{EI}$ بر حسب فاصله x در امتداد محور تیر و انتگرال‌گیری پی‌درپی از این عبارت برای به دست آوردن معادلات شیب و تغییر شکل منحنی الاستیک است. ثابت‌های انتگرال با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند.



تمرین ۱:

معادلات شیب و تغییر شکل خمشی تیر نشان داده شده در شکل را با روش انتگرال‌گیری مستقیم (دوپل) تعیین کنید. همچنین مقدار شیب را در دو انتهای تیر و تغییر مکان نقطه میانی دهانه را حساب کنید. EI ثابت است.



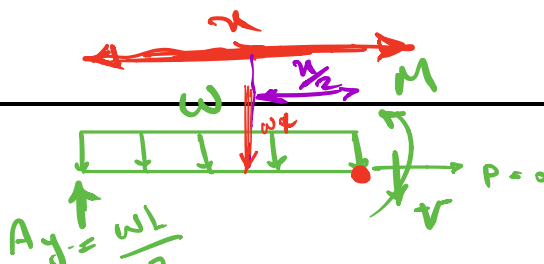
محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow$$

$$(-A_y \times L) + (w \times L \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{wL}{2} - wL + B_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{wL}{2} \uparrow$$



$$M - \frac{wL}{2}(x) + w(x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

معادله لنگر خمشی: برای تعیین معادله لنگر مقطعی را در فاصله x از تکیه گاه A عبور می دهیم.

$$M = \frac{wL}{2}(x) - (wx)\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

معادله $\frac{M}{EI}$: سختی خمشی EI تیر ثابت است؛ بنابراین معادله $\frac{M}{EI}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EI} = \frac{w}{2EI}(Lx - x^2)$$

معادله شیب و تغییر شکل خمشی (تغییر مکان): با انتگرال گیری از معادله $\frac{M}{EI}$ شیب به دست می آید و با

انتگرال گیری از معادله شیب، تغییر شکل خمشی (تغییر مکان) به دست می آید.

$$\theta = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

$$x = \frac{L}{2} \quad \theta = 0$$

$$y = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1x + C_2$$

$$0 = C_2$$

ثابت های انتگرال با اعمال شرایط مرزی به دست می آید:

$$\text{در } A: \frac{wL^4}{24EI} + C_1L = 0$$

$$\text{در } B: C_1 = -\frac{wL^3}{24EI}$$

با اعمال شرایط مرزی اول در معادله y داریم $C_2 = 0$

با اعمال شرایط مرزی دوم در معادله y داریم:

$$0 = \frac{w}{2EI}\left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12}\right) + C_1L \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{24EI}$$

بدین ترتیب معادلات شیب و تغییر مکان تیر عبارتند از:

$$\theta = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{12}\right)$$

$$y = \frac{wx}{12EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{L^3}{2}\right)$$

$$x = \frac{L}{2}$$

شیب در دو انتهای A و B : به ترتیب با جایگزین کردن $x=L$ و $x=0$ در معادله شیب خواهیم داشت:

$$\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI}$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$$

$$x=0 \quad \theta \text{ در } A$$

$$x=L \quad \theta \text{ در } B$$

تغییر مکان میانه دهانه: با جایگزین کردن $x=L/2$ در معادله تغییر مکان خواهیم داشت:

$$y_c = -\frac{5wL^4}{384EI}, \quad y_c = \frac{5wL^4}{384EI}$$

$$DST = (r + 3k) \cdot (c + 3) \Rightarrow 3 - 3 \cdot 0$$

شیب و تغییر مکان نقطه B از تیر طره زیر را به روش انتگرال گیری مستقیم (دو برابر) تعیین کنید.

$$\begin{aligned} x=0 & \quad y=0 \\ x=0 & \quad \theta=0 \end{aligned}$$

$$r=3 \quad k=0 \quad c=0$$

$$EI = \text{constant}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$I = 315 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$200 \times 10^6 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

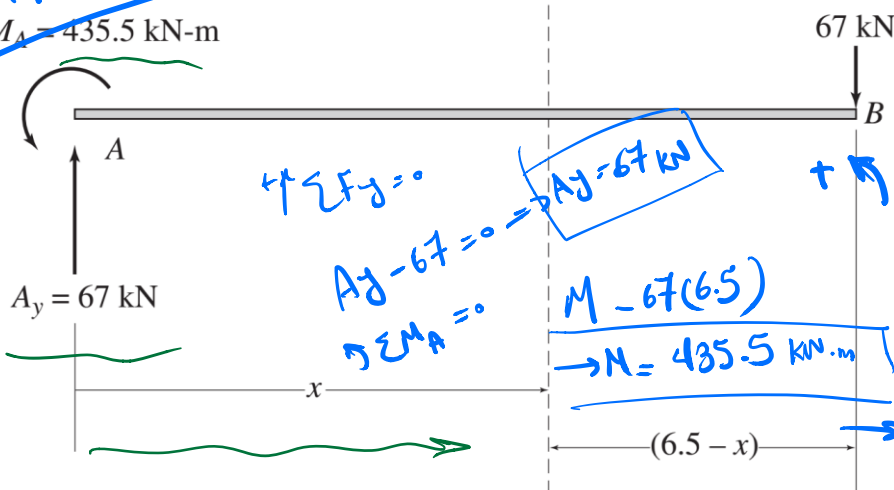
$$315 \times 10^6 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

حل:

$$\sum M_0 = 0$$

$$M + 435.5 - 67x = 0$$

$$435.5$$



$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 67 = 0 \Rightarrow A_y = 67 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M - 67(6.5) = 0$$

$$\Rightarrow M = 435.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(6.5 - x)$$

$$\sum M_0 = 0$$

$$6.5 - x$$

$$-M - 67(6.5 - x) = 0$$

$$\Rightarrow M = 67(6.5 - x)$$

معادله لنگر خمشی: برای تعیین معادله لنگر مقطعی را در فاصله x از تکیه گاه A عبور می دهیم. با در نظر

گرفتن مقطع سمت راست خواهیم داشت:

$$M = -67(6.5 - x)$$

تغییر مکان
شیب

$$\frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EI} = -\frac{67}{EI}(6.5 - x)$$

معادله شیب و تغییر شکل خمشی (تغییر مکان): با انتگرال گیری از معادله $\frac{M}{EI}$ شیب به دست می آید و با

انتگرال گیری از معادله شیب، تغییر شکل خمشی (تغییر مکان) به دست می آید.

$$\theta = \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{67}{EI}(6.5x - \frac{x^2}{2}) + C_1$$

$$0 = C_1$$

$$y = -\frac{67}{EI}(3.25x^2 - \frac{x^3}{6}) + C_1x + C_2$$

$$0 = -\frac{67}{EI}(0 - 0) + 0 + C_2$$

$$0 = C_2$$

ثابت‌های انتگرال با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند:

در A:

① $x=0$

$y=0$

در A:

② $x=0$

$\theta=0$

با اعمال شرایط مرزی دوم در معادله θ داریم $C_1 = 0$

با اعمال شرایط مرزی دوم در معادله y داریم $C_2 = 0$

بدین ترتیب معادلات شیب و تغییر مکان تیر عبارت‌اند از:

شیب $\theta = -\frac{67}{EI} (6.5x - \frac{x^2}{2})$

تغییر مکان $y = -\frac{67}{EI} (3.25x^2 - \frac{x^3}{6})$

شیب و تغییر مکان B: به ترتیب با جایگزین کردن $x=6.5$ و E و I در معادله شیب و تغییر مکان خواهیم داشت:

$\theta_B = 0.0224 \text{ rad}$

$y_B = -0.0974 \text{ m}$

۵-۴ روش لنگر-سطح

روش لنگر-سطح برای محاسبه شیب و تغییر شکل خمشی تیرها توسط چارلز گرین در سال ۱۸۷۳ ابداع شد. این روش بر پایه دو قضیه به نام قضایای لنگر-سطح استوار است که هندسه منحنی الاستیک تیر را به نمودار $\frac{M}{EI}$ ارتباط می‌دهند که خود با تقسیم مختصات عرضی نمودار لنگر خمشی M به صلبیت خمشی EI ترسیم می‌شود.

برای دستیابی به قضایای لنگر-سطح تیر نشان داده شده در شکل را با بارگذاری دلخواه در نظر بگیرید. منحنی الاستیک و نمودار $\frac{M}{EI}$ این تیر نیز نشان داده شده‌اند. با توجه به رابطه (۵-۱۳)، برای تعیین تغییرات شیب در

بین نقاط A و B بر روی تیر، با انتگرال‌گیری از معادله در فاصله A تا B نتیجه می‌شود:

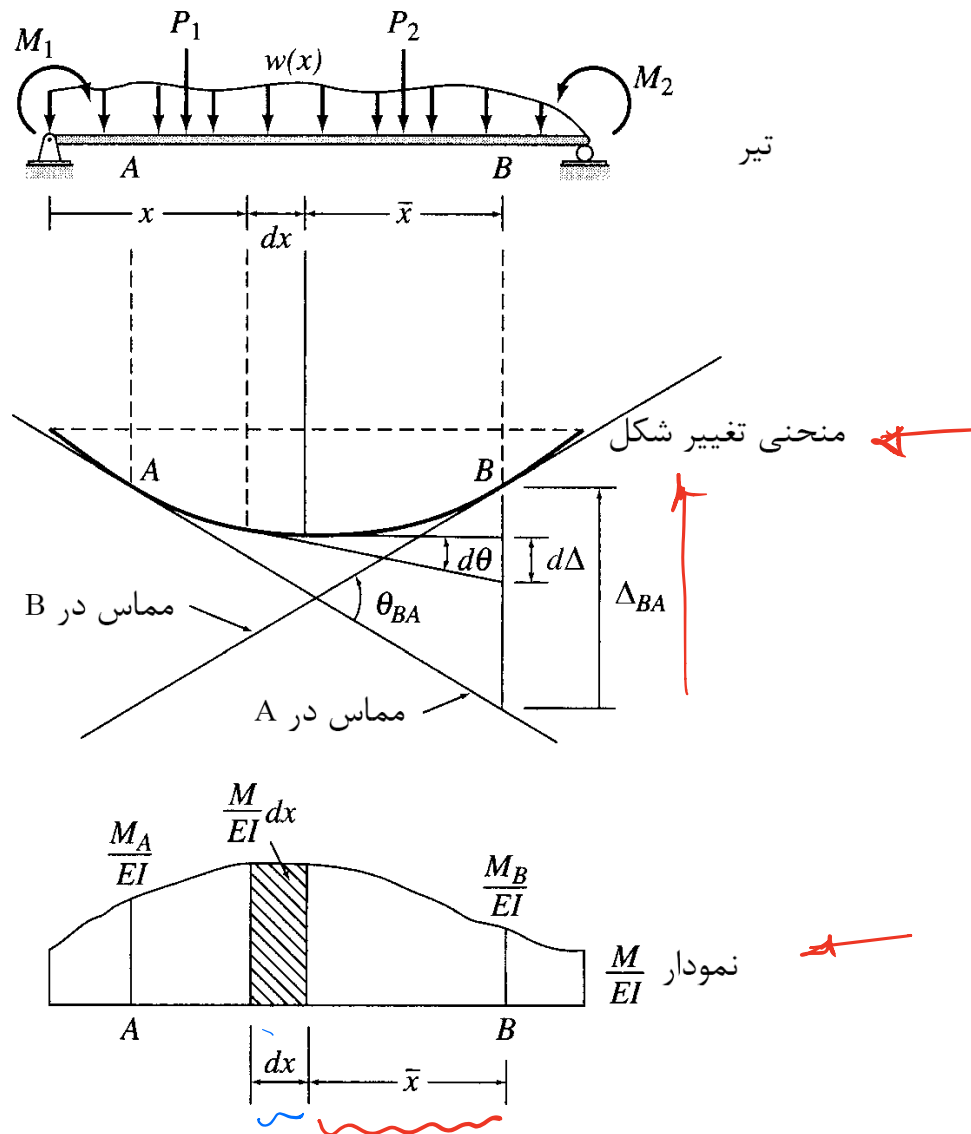
$$\int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \Rightarrow \theta_{BA} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (۵-۱۴)$$

که در اینجا θ_A و θ_B به ترتیب شیب منحنی الاستیک تیر در نقاط A و B نسبت به محور تیر در حالت تغییر شکل نیافته (افقی)، θ_{BA} نمایانگر زاویه بین مماس‌های بر منحنی الاستیک در نقاط A و B، $\int_A^B \frac{M}{EI} dx$ نشانگر

سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در بین نقاط A و B است.

معادله (۵-۱۴) نشانگر عبارت ریاضی قضیه اول لنگر-سطح است که آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: تغییر شیب در بین مماس‌های بر منحنی الاستیک تیر در هر دو نقطه دلخواه برابر است با سطح زیر نمودار

$\frac{M}{EI}$ در بین این دو نقطه، به شرطی که منحنی الاستیک در بین این دو نقطه پیوسته باشد.



بازهم با در نظر گرفتن تیر نشان داده شده در شکل مشاهده می‌شود که تغییر $d\Delta$ در بین مماس‌های ترسیم شده در دو انتهای جزء بی‌نهایت کوچک dx بر روی خط عمود بر محور تغییر شکل نیافته تیر در نقطه B

به صورت زیر بیان می‌شود:

$$d\Delta = \bar{x}(d\theta) \quad (5-15)$$

با جایگزین کردن معادله (5-13) در (5-15) نتیجه می‌شود:

$$d\Delta = \left(\frac{M}{EI} \right) \bar{x} dx \quad (5-16)$$

با انتگرال گیری از معادله فوق در بین هر دو نقطه دلخواه A و B روی تیر نتیجه می‌شود:

$$\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$\int_A^B d\Delta = \int_A^B \frac{M}{EI} \bar{x} dx \Rightarrow \Delta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} \bar{x} dx \quad (17-5)$$

که در اینجا Δ_{BA} نشانگر انحراف مماسی B از مماس بر نقطه A یعنی تغییر شکل نقطه B در امتداد عمود بر محور تغییر شکل نیافته تیر نسبت به مماس بر نقطه A می باشد (اندیس اول نشانگر نقطه تعیین انحراف است و لنگرگیری حول آن انجام می شود، درحالی که اندیس دوم نشانگر نقطه ترسیم مماس بر منحنی الاستیک می باشد).

معادله (17-5) نشانگر عبارت ریاضی قضیه دوم لنگر-سطح است که آن را می توان به صورت زیر بیان کرد: انحراف مماسی یک نقطه بر روی منحنی الاستیک در امتداد عمود بر محور تغییر شکل نیافته تیر نسبت به مماس بر منحنی الاستیک در نقطه ای دیگر برابر است با لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در بین این دو نقطه حول نقطه ای که انحراف از آن مورد نظر است. البته به شرطی که منحنی الاستیک در بین این دو نقطه پیوسته باشد.

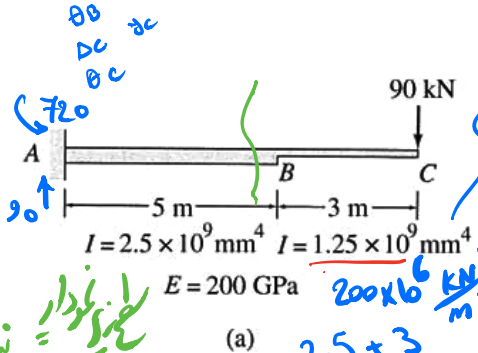
فاصله \bar{x} همیشه مثبت در نظر گرفته می شود.

$$\frac{3}{8} = \frac{x}{720} \Rightarrow \frac{720 \times 3}{8} = 270$$

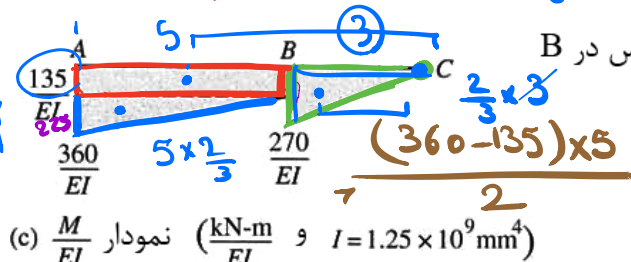
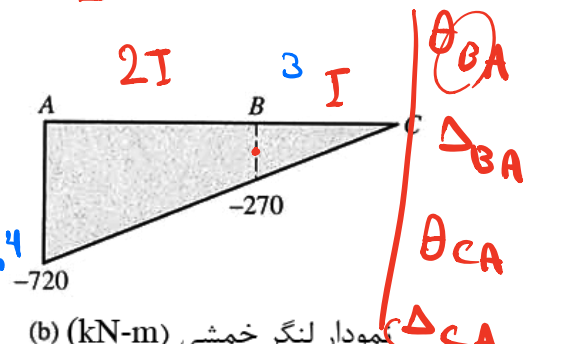
روش جمع زدن ساده تر است.

تمرین ۱: Δ_{BA} θ_{BA}

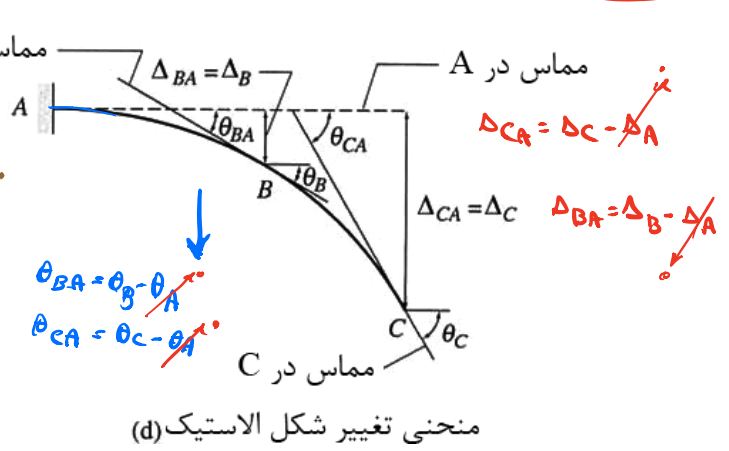
شیب و تغییر مکان نقاط B و C از تیر طره زیر (شکل a) را به روش لنگر-سطح تعیین کنید.



نصل هم $1.25 \times 10^9 \times 10^{-12} \text{ m}^4$
نیروی داخلی



$$\frac{(135}{EI} + \frac{360}{EI}) \times 5}{2}$$



حل:

نمودار لنگر خمشی: در شکل b نشان داده شده است.

نمودار $\frac{M}{EI}$: همان طور که در شکل a مشخص شده است، مقدار ممان اینرسی بخش های AB و BC از تیر متفاوت می باشد.

با در نظر گرفتن $I = I_{BC} = 1.25 \times 10^9 \text{ mm}^4$ به عنوان ممان اینرسی مرجع، I_{AB} را بر حسب I به صورت زیر بیان می کنیم:

$$I_{AB} = 2.5 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 2 \times 1.25 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 2I$$

که نشان می دهد برای ترسیم نمودار $\frac{M}{EI}$ بر حسب EI، باید نمودار لنگر خمشی بخش AB از تیر را بر ۲ تقسیم کنیم (شکل c)

منحنی الاستیک: منحنی الاستیک (تغییر شکل) تیر در شکل d نشان داده شده است. به دلیل گیردار بودن تکیه گاه A، شیب در نقطه A صفر است ($\theta_A = 0$)، یعنی همان طور که در شکل نشان داده شده است، مماس بر منحنی الاستیک در نقطه A افقی است.

شیب در نقطه B: با معلوم بودن شیب در نقطه A می توان شیب در نقطه B را با محاسبه تغییر شیب θ_{BA} در بین نقاط A و B تعیین کرد.

$$\theta_{BA} = \frac{1}{EI} \left((135 \times 5) + \left(\frac{1}{2} \times (360 - 135) \times 5 \right) \right) = \frac{1237.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

Handwritten notes: محاسبه تغییر شیب، محاسبه مساحت زون زده، $\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A$

با توجه به شکل d مشاهده می شود که به دلیل افقی بودن مماس بر نقطه A، شیب در نقطه B (θ_B) برابر

است با زاویه θ_{BA} میان مماس های نقاط A و B بنابراین:

$$\theta_B = \theta_{BA} = \frac{1237.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

Handwritten note: $\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A$

با جایگزین کردن مقادیر عددی E و I نتیجه می شود:

$$\theta_B = \theta_{BA} = \frac{1237.5}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} \text{ rad} = 0.0049 \text{ rad}$$

تغییر مکان نقطه B: با توجه به شکل d مشاهده می شود که تغییر مکان نقطه B نسبت به محور تغییر شکل نیافته تیر برابر است با انحراف مماسی از نقطه A، بنابراین:

$$\Delta_B = \Delta_{BA}$$

$$\Delta_{BA} = \Delta_B - \Delta_A$$

Handwritten note: $\Delta_{BA} = \Delta_B - \Delta_A$

بر اساس قضیه دوم لنگر سطح داریم:

$$\Delta_{BA} = \frac{1}{EI} \left((135 \times 5 \times 2.5) + \left(\frac{1}{2} \times (360 - 135) \times 5 \times \frac{5 \times 2}{3} \right) \right) = \frac{3562.5 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

Handwritten notes: محاسبه تغییر مکان، $\Delta_{BA} = \Delta_B - \Delta_A$

بنابراین:

$$\Delta_B = \Delta_{BA} = \frac{3562.5 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{3562.5}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} = 14.25 \text{ mm}$$

شیب در نقطه C: با توجه به شکل d مشاهده می شود:

$$\theta_C = \theta_{CA}$$

$$\theta_{CA} = \theta_C - \theta_A$$

بنابراین:

$$\theta_{CA} = \frac{1}{EI} \left((135 \times 5) + \left(\frac{1}{2} \times (360 - 135) \times 5 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 270 \times 3 \right) \right) = \frac{1642.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

بنابراین:

$$\theta_C = \theta_{CA} = \frac{1642.5 \text{ kN.m}^2}{EI} = \frac{1642.5}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} = 0.0067 \text{ rad}$$

تغییر مکان نقطه C: با توجه به شکل d دیده می شود که:

$$\Delta_C = \Delta_{CA}$$

$$\Delta_{CA} = \Delta_C - \Delta_A$$

بنابراین:

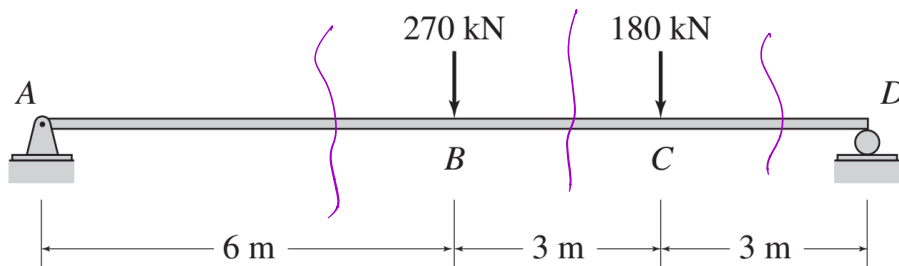
$$\Delta_{CA} = \frac{1}{EI} \left((135 \times 5 \times (2.5 + 3)) + \left(\frac{1}{2} \times (360 - 135) \times 5 \times \left(\frac{5 \times 2}{3} + 3 \right) \right) + \left(\frac{1}{2} \times 270 \times 3 \times \frac{3 \times 2}{3} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_{CA} = \frac{8085 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

$$\Delta_C = \Delta_{CA} = \frac{8085 \text{ kN.m}^3}{EI} = \frac{8085}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} = 32 \text{ mm}$$

تمرین ۴:

با استفاده از روش لنگر سطح شیب دو انتهای A و D و تغییر مکان نقاط B و C از تیر زیر را تعیین کنید.

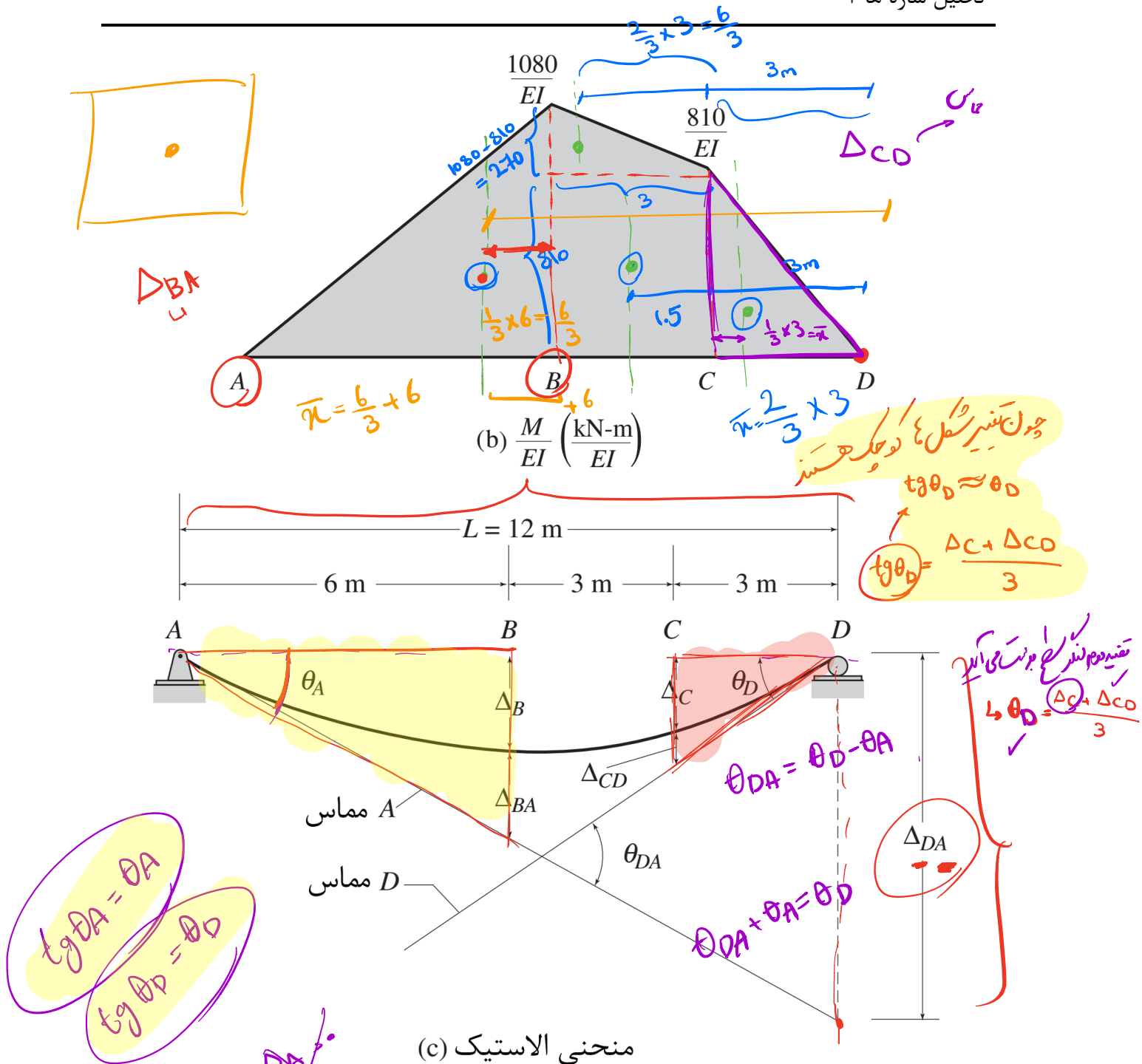


$$\begin{aligned} EI &= \text{constant} \\ E &= 12.5 \text{ GPa} \\ I &= 1.92 \times 10^{10} \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

(a)

$$12.5 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$1.92 \times 10^{10} \times 10^{-12} \text{ m}^4$$



حل:

✓ نمودار $\frac{M}{EI}$: به دلیل ثابت بودن EI در طول تیر، نمودار $\frac{M}{EI}$ همانند نمودار لنگر خمشی می باشد (شکل b).

منحنی الاستیک: منحنی الاستیک (تغییر شکل) تیر در شکل c نشان داده شده است.

شیب در نقطه A: شیب منحنی الاستیک در هیچ نقطه ای از تیر مشخص نیست، بنابراین با استفاده از مماس بر تکیه گاه A به عنوان مماس مرجع، شیب θ_A را با توجه به این نکته که تغییر مکان در محل تکیه گاه A و D صفر است، تعیین می کنیم.

با توجه به شکل c و با فرض آنکه θ_A آن قدر کوچک باشد که $\tan(\theta_A) = \theta_A$ ، مشاهده می شود که:

برای ارزیابی انحراف مماسی Δ_{DA} از قضیه دوم لنگر سطح استفاده می کنیم:

$$\Delta_{DA} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{1}{2} \times 1080 \times 6 \times \frac{6}{3} + 6 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 270 \times 3 \times \frac{6}{3} + 3 \right) + (810 \times 3 \times 4.5) + \left(\frac{1}{2} \times 810 \times 3 \times \frac{6}{3} \right) \right)$$

بنابراین شیب در نقطه A برابر است با:

$$\theta_A = \frac{\Delta_{DA}}{L} = \frac{41310 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{\Delta_{DA}}{L} = \frac{41310}{EI} = \frac{3442.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

با جایگزین کردن مقادیر E و I نتیجه می شود:

$$\theta_A = \frac{3442.5 \text{ kN.m}^2}{EI} = \frac{3442.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 0.014 \text{ rad}$$

شیب در نقطه D: با توجه به شکل c مشاهده می شود که:

$$\theta_D = \theta_{DA} - \theta_A$$

با استفاده از قضیه اول لنگر سطح داریم:

$$\theta_{DA} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{1}{2} \times 1080 \times 6 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 270 \times 3 \right) + (810 \times 3) + \left(\frac{1}{2} \times 810 \times 3 \right) \right)$$

$$\Rightarrow \theta_{DA} = \frac{7290 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

بنابراین:

$$\theta_D = \frac{7290}{EI} - \frac{3442.5}{EI} = \frac{3847.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

با جایگزین کردن مقادیر E و I نتیجه می شود:

$$\theta_D = \frac{3847.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 0.016 \text{ rad}$$

تغییر مکان نقطه B: با در نظر گرفتن بخش AB از منحنی الاستیک در شکل c و با فرض آنکه θ_A آن قدر

کوچک باشد که $\tan(\theta_A) = \theta_A$ داریم:

$$\theta_A = \frac{\Delta_B + \Delta_{BA}}{6} \Rightarrow \Delta_B = 6\theta_A - \Delta_{BA}$$

$$\Delta_{BA} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \times 1080 \times 6 \times \frac{6}{3} \right) \Rightarrow \Delta_{BA} = \frac{6480 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

بنابراین:

$$\Delta_B = 6 \left(\frac{3442.5}{EI} \right) - \frac{6480}{EI} = \frac{14175 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{14175}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 59 \text{ mm}$$

تغییر مکان نقطه C: با در نظر گرفتن بخش CD از منحنی الاستیک در شکل c و با فرض آنکه θ_D آن قدر کوچک باشد که $\tan(\theta_D) = \theta_D$ داریم:

$\theta_D = 0.05$ (در شکل c)

$$\theta_D = \frac{\Delta_C + \Delta_{CD}}{3} \Rightarrow \Delta_C = 3\theta_D - \Delta_{CD}$$

و:

$$\Delta_{CD} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \times 810 \times 3 \times \frac{3}{3} \right) \Rightarrow \Delta_{CD} = \frac{1215 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

سختی شفت، به نظر

بنابراین:

$$\Delta_C = 3 \left(\frac{3847.5}{EI} \right) - \frac{1215}{EI} = \frac{10327.5 \text{ kN.m}^3}{EI} \Rightarrow \Delta_C = \frac{10327.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 43 \text{ mm}$$

۵-۵ تیر مزدوج

روش تیر مزدوج توسط Otto Mohr در سال ۱۸۶۸ ابداع شد. بسیاری از مهندسين روش تیر مزدوج را به دلیل قرارداد علامت روشمند و کاربرد سر راست آن بدون نیاز به ترسیم منحنی الاستیک سازه ترجیح می دهند.

روش تیر مزدوج بر پایه شباهت روابط میان بار، نیروی برشی و لنگر خمشی با روابط میان $\frac{M}{EI}$ ، شیب و تغییر

شکل خمشی استوار است (جدول ۱).

جدول ۱	
روابط بار، نیروی برشی، لنگر خمشی	روابط $\frac{M}{EI}$ ، شیب، تغییر شکل خمشی
$\frac{dV}{dx} = w$	$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$
$\frac{dM}{dx} = V$ ، $\frac{d^2M}{dx^2} = w$	$\frac{dy}{dx} = \theta$ ، $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

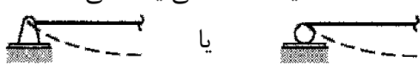



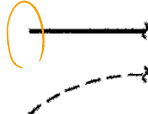



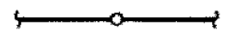
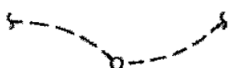


تیر مزدوج متناظر با تیر واقعی، تیر فرضی هم طول با تیر واقعی است، اما تکیه گاه های خارجی و اتصالات داخلی آن طوری است که چنانچه تیر فرضی با نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر واقعی بارگذاری شود، نیروی برشی و لنگر خمشی هر نقطه از این تیر مزدوج به ترتیب با شیب و تغییر مکان (تغییر شکل خمشی) نقطه متناظر از تیر

واقعی، برابر است.

۵-۵-۱ تکیه‌گاه‌های تیر مزدوج

تکیه‌گاه‌های خارجی و اتصالات داخلی تیر مزدوج از روی روابط مشابه میان تیر فرضی و تیر واقعی متناظر تعیین می‌شوند، بدین مفهوم که نیروی برشی و لنگر خمشی در هر نقطه‌ای از تیر فرضی باید با شیب و تغییر شکل خمشی آن نقطه از تیر واقعی سازگار باشد. در جدول ۲ و ۳ همتای مزدوج انواع مختلف تکیه‌گاه‌های واقعی نشان داده شده‌اند.

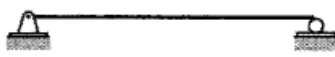
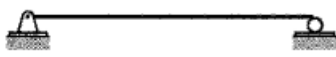
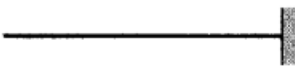
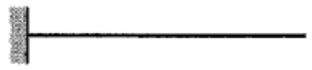
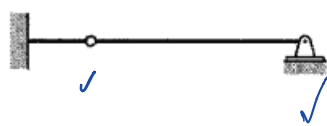


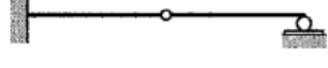
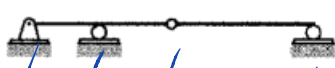


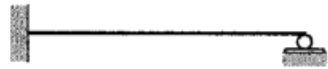
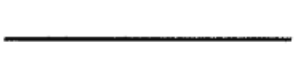
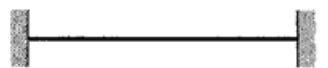
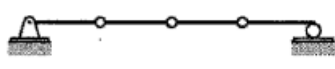

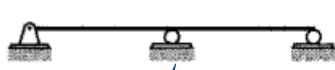
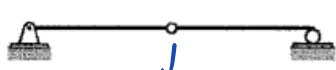

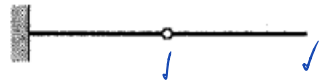
جدول ۲

تیر واقعی	تیر مزدوج
نوع تکیه‌گاه	نوع تکیه‌گاه
تکیه‌گاه مفصلی یا غلتکی یا 	تکیه‌گاه مفصلی یا غلتکی یا 
تکیه‌گاه گیردار 	انتهای آزاد 
انتهای آزاد 	تکیه‌گاه گیردار 
تکیه‌گاه مفصلی و غلتکی داخلی یا 	مفصل خمشی  $M=0$
مفصل خمشی  یا 	تکیه‌گاه غلتکی داخلی  یا 

در تیر واقعی
خارجی
(فصل ۲)

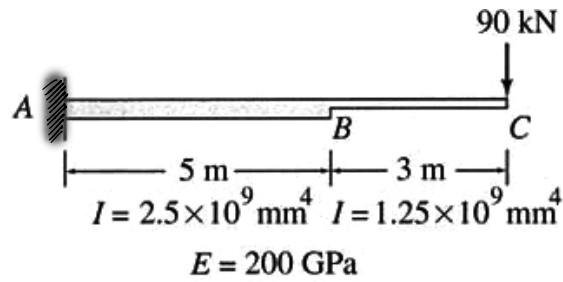
در تیر واقعی
مفصل داخلی
مفصل خارجی

جدول ۳

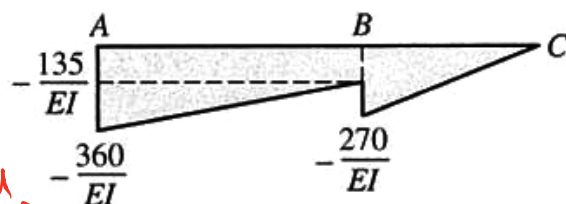
تیر مزدوج	تیر واقعی
	
(a)	
	
(b)	
	
(c)	
	
(d)	
	
(e)	
	
(f)	
	
(g)	
	
(h)	
	
(i)	
	
(j)	

تمرین ۵:

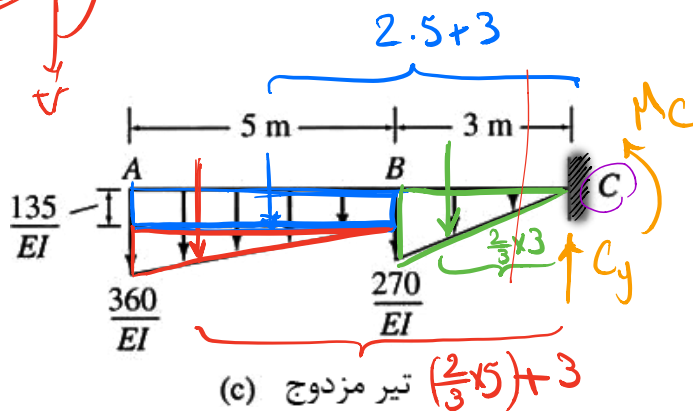
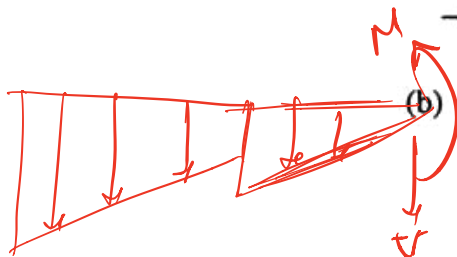
شیب و تغییر مکان نقاط B و C از تیر طره زیر (شکل a) را به روش تیر مزدوج تعیین کنید.



تیر واقعی (a)



(b) نمودار $\frac{M}{EI}$ (و $I = 1.25 \times 10^9 \text{ mm}^4$ و $\frac{\text{kN-m}}{EI}$)



(c) تیر مزدوج $(\frac{2}{3} \times 5) + 3$

واقعی $\rightarrow \theta_B$
مزدوج $\rightarrow \Delta_B$
 $M_B \rightarrow \Delta_B$
 $V_B \rightarrow \theta_B$
 $V_C \rightarrow \theta_C$
 $M_C \rightarrow \Delta_C$
حل:

نمودار $\frac{M}{EI}$: همان طور که در شکل a مشخص شده است، مقدار ممان اینرسی بخش های AB و BC از تیر

متفاوت می باشد، با در نظر گرفتن $I = I_{BC} = 1.25 \times 10^9 \text{ mm}^4$ به عنوان ممان اینرسی مرجع، I_{AB} را بر حسب I به صورت زیر بیان می کنیم:

$$I_{AB} = 2.5 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 2 \times 1.25 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 2I$$

که نشان می دهد برای ترسیم نمودار $\frac{M}{EI}$ بر حسب EI، باید نمودار لنگر خمشی بخش AB از تیر را بر ۲

تقسیم کنیم (شکل b)

تیر مزدوج: در شکل c تیر مزدوج بارگذاری شده با نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر واقعی نشان داده شده است.

بازرسی در انتهای

شیب در نقطه B: شیب در نقطه B از تیر واقعی با نیروی برشی در نقطه B از تیر مزدوج برابر است. با در نظر گرفتن قطعه AB خواهیم داشت:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times \left(\frac{360}{EI} + \frac{135}{EI} \right) \times 5 - V_B = 0 \Rightarrow V_B = -\frac{1237.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

تیر زوج

بنابراین شیب در نقطه B از تیر واقعی برابر است با:

تیر اصلی

$$\theta_B = -\frac{1237.5 \text{ kN.m}^2}{EI} = -\frac{1237.5}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} = -0.0049 \text{ rad}$$

تغییر مکان در نقطه B: تغییر مکان در نقطه B از تیر واقعی با لنگر خمشی در نقطه B از تیر مزدوج برابر است. با در نظر گرفتن قطعه AB خواهیم داشت:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \times \frac{360-135}{EI} \times 5 \times \left(5 \times \frac{2}{3} \right) \right) + \left(\frac{135}{EI} \times 5 \times \left(\frac{5}{2} \right) \right) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = -\frac{3562.5 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

بنابراین تغییر مکان در نقطه B از تیر واقعی برابر است با:

تیر اصلی

$$\Delta_B = -\frac{3562.5 \text{ kN.m}^3}{EI} = -\frac{3562.5}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} = -0.01425 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = -14.25 \text{ mm}$$

شیب در نقطه C: شیب در نقطه C از تیر واقعی با نیروی برشی در نقطه C از تیر مزدوج برابر است. با در نظر گرفتن قطعه AC خواهیم داشت:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{360+135}{EI} \right) \times 5 \right) - \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{270}{EI} \right) \times 3 \right) - V_C = 0 \Rightarrow V_C = -\frac{1642.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

بنابراین شیب در نقطه C از تیر واقعی برابر است با:

تیر اصلی

$$\theta_C = -\frac{1642.5 \text{ kN.m}^2}{EI} = -\frac{1642.5}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} = -0.0067 \text{ rad}$$

تغییر مکان در نقطه C: تغییر مکان در نقطه C از تیر واقعی با لنگر خمشی در نقطه C از تیر مزدوج برابر است. با در نظر گرفتن قطعه AC خواهیم داشت:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{135}{EI} \times 5 \times \left(\frac{5}{2} + 3 \right) \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{360-135}{EI} \times 5 \times \left(5 \times \frac{2}{3} + 3 \right) \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{270}{EI} \times 3 \times \left(3 \times \frac{2}{3} \right) \right) + M_C = 0$$

$$\Rightarrow M_C = -\frac{8085 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

بنابراین تغییر مکان در نقطه C از تیر واقعی برابر است با:

تیر اصلی

$$\Delta_C = -\frac{8085 \text{ kN.m}^3}{EI} = -\frac{8085}{(200 \times 10^6)(1.25 \times 10^{-3})} = -0.032 \text{ m}$$

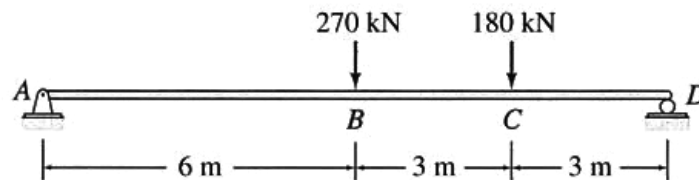
$$\Rightarrow \Delta_C = -32 \text{ mm}$$

$$M_C \quad M_B \quad V_D \quad V_A$$

$$\Delta_C \quad \Delta_B \quad \theta_D \quad \theta_A$$

تمرین ۶:

با استفاده از روش تیر مزدوج شیب دو انتهای A و D و تغییر مکان نقاط B و C از تیر زیر را تعیین کنید.

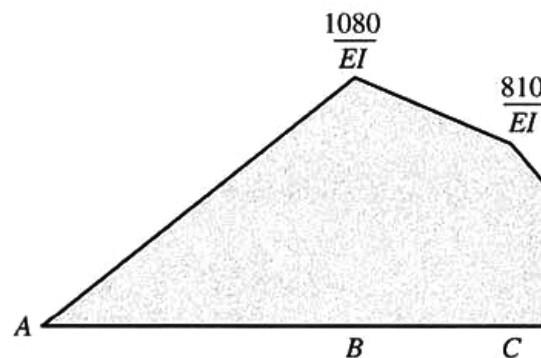


$$EI = \text{constant}$$

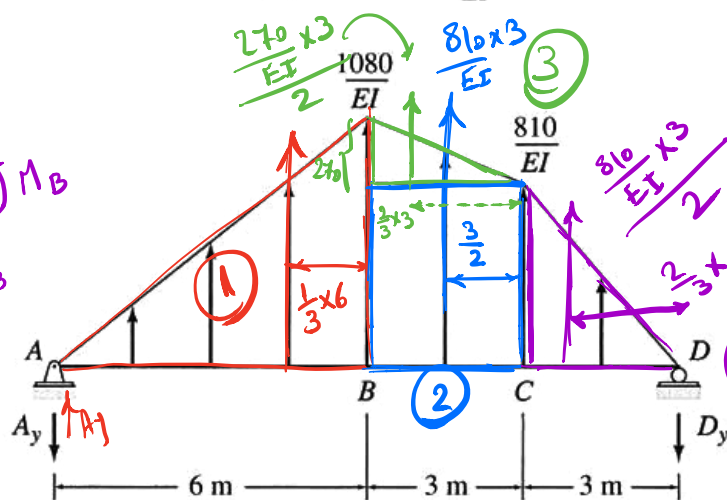
$$E = 12.5 \text{ GPa}$$

$$I = 1.92 \times 10^{10} \text{ mm}^4$$

تیر واقعی (a)



(b) نمودار $\frac{M}{EI}$ ($\frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{EI}$)



تیر مزدوج (c)

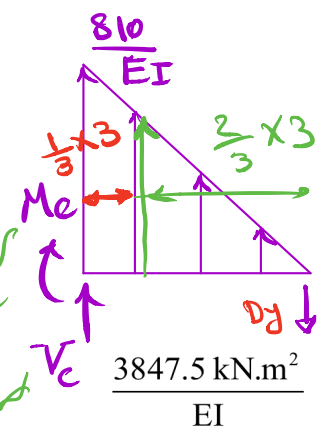
$$\sum F_y = 0$$

$$V - D_y = 0$$

$$-V = D_y$$

$$\Delta_C = ?$$

$$M_C = ?$$



حل:

نمودار $\frac{M}{EI}$: به دلیل ثابت بودن EI در طول تیر، نمودار $\frac{M}{EI}$ همانند نمودار لنگر خمشی می باشد (شکل b).

تیر مزدوج: در شکل c تیر مزدوج بارگذاری شده با نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر واقعی نشان داده شده است.

واکنش های تکیه گاهی تیر مزدوج: با به کار بردن معادلات تعادل در مورد جسم آزاد کل تیر مزدوج داریم:

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \sum M_D = 0 &\Rightarrow -12 \times A_y - \left(\frac{1080}{EI} \times 6 \times \left(\frac{6}{3} + 6 \right) \right) - \left(\frac{810}{EI} \times 3 \times \left(3 + \frac{3}{2} \right) \right) \dots \\
 &- \left(\frac{1080 - 810}{EI} \times 3 \times \left(3 \times \frac{2}{3} + 3 \right) \right) - \left(\frac{810}{EI} \times 3 \times \left(3 \times \frac{2}{3} \right) \right) \\
 &\Rightarrow A_y = \frac{3442.5 \text{ kN.m}^2}{EI} \downarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow -\frac{6885}{2EI} + \left(\frac{1080}{EI} \times 6 \right) + \left(\frac{1080 + 810}{EI} \times 3 \right) + \left(\frac{810}{EI} \times 3 \right) + D_y \\
 &\Rightarrow D_y = \frac{3847.5 \text{ kN.m}^2}{EI} \downarrow
 \end{aligned}$$

شیب در نقطه A: شیب در نقطه A از تیر واقعی با نیروی برشی درست در سمت راست نقطه A از تیر مزدوج برابر است:

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -A_y - V_{A,R} = 0 \Rightarrow V_{A,R} = -A_y \Rightarrow V_{A,R} = -\frac{3442.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

بنابراین شیب در نقطه A از تیر واقعی برابر است با:

$$\theta_A = -\frac{3442.5 \text{ kN.m}^2}{EI} = -\frac{3442.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = -0.014 \text{ rad}$$

شیب در نقطه D: شیب در نقطه D از تیر واقعی با نیروی برشی درست در سمت چپ نقطه D از تیر مزدوج برابر است:

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -D_y + V_{D,L} = 0 \Rightarrow V_{D,L} = D_y \Rightarrow V_{D,L} = \frac{3847.5 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

بنابراین شیب در نقطه D از تیر واقعی برابر است با:

$$\theta_D = \frac{3847.5 \text{ kN.m}^2}{EI} = \frac{3847.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 0.016 \text{ rad}$$

تغییر مکان در نقطه B: تغییر مکان در نقطه B از تیر واقعی با لنگر خمشی در نقطه B از تیر مزدوج برابر است. با در نظر گرفتن قطعه AB خواهیم داشت:

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{3442.5}{EI} \times 6 - \frac{1}{2} \times \frac{1080}{EI} \times 6 \times \frac{6}{3} + M_B = 0 \Rightarrow M_B = -\frac{14175 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

بنابراین تغییر مکان در نقطه B از تیر واقعی برابر است با:

$$\Delta_B = -\frac{14175 \text{ kN.m}^3}{EI} = -\frac{14175}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = -0.059 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = -59 \text{ mm}$$

تغییر مکان در نقطه C: تغییر مکان در نقطه C از تیر واقعی با لنگر خمشی در نقطه C از تیر مزدوج برابر است. با در نظر گرفتن قطعه CD خواهیم داشت:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow -\frac{3847.5}{EI} \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{810}{EI} \times 3 \times \frac{3}{3} + M_C = 0 \Rightarrow M_C = -\frac{10327.5 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

بنابراین تغییر مکان در نقطه C از تیر واقعی برابر است با:

$$\Delta_C = -\frac{10327.5 \text{ kN.m}^3}{EI} = -\frac{10327.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = -0.043 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta_C = -43 \text{ mm}$$

قسمت دوم: روش‌های کار و انرژی

۵-۶ کار

کار انجام شده توسط نیروی وارد بر سازه به‌طور ساده به‌صورت حاصل ضرب نیرو در تغییر مکان نقطه اثر آن در امتداد نیرو تعریف می‌شود. کار انجام شده توسط نیرو P ضمن تغییر شکل یافتن سازه تحت تأثیر مجموعه‌ای از نیروها (شامل نیروی P) را در نظر بگیرید (شکل الف). کار dW انجام شده نیروی P در ضمن جابجا شدن نقطه اثر آن به فاصله بی‌نهایت کوچک $d\Delta$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$dW = P(d\Delta) \quad (۵-۱۸)$$

کل کار انجام شده توسط نیروی P در کل فاصله Δ را می‌توان با انتگرال‌گیری از عبارت dW به‌صورت زیر به دست آورد:

$$W = \int_0^{\Delta} P(d\Delta) \quad (۵-۱۹)$$

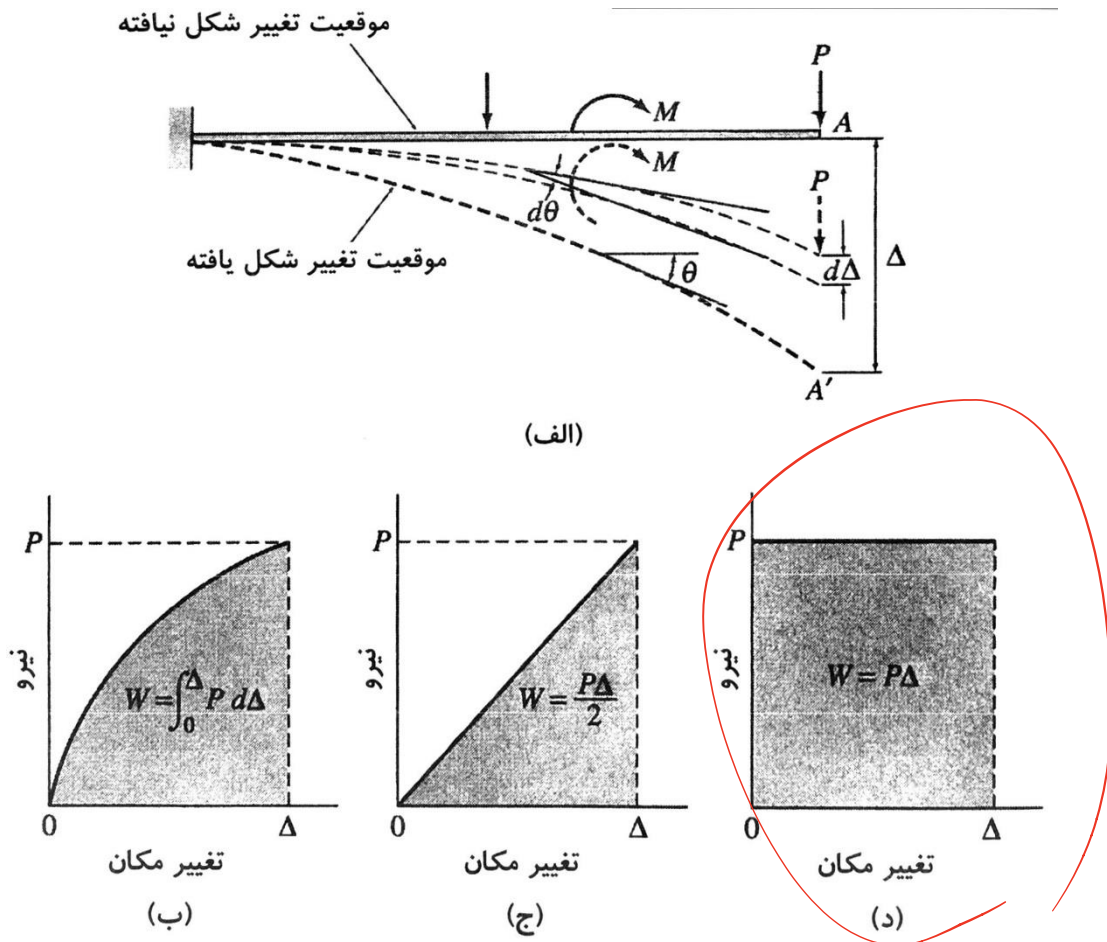
همان‌طور که معادله (۵-۱۹) نشان می‌دهد، کار برابر است با سطح زیر نمودار نیرو-تغییر مکان نشان داده شده در شکل ب. توجه خود را به تحلیل سازه‌های الاستیک خطی متمرکز می‌کنیم، به همین دلیل کار در حالت ویژه‌ای مورد نظر است که نیرو همواره با تغییر مکان به‌صورت خطی از صفر تا مقدار نهایی خود تغییر می‌کند (شکل ج). در چنین حالتی کار با سطح مثلثی زیر نمودار نیرو-تغییر مکان برابر است و:

$$W = \frac{1}{2} P\Delta \quad (۵-۲۰)$$

یکی دیگر از حالت‌های ویژه مورد نظر در شکل د نشان داده شده است. در این حالت مقدار نیروی P در ضمن تغییر مکان Δ نقطه اثر آن به دلیل عامل دیگری مستقل از نیروی P ثابت باقی می‌ماند در این حالت کار انجام شده توسط نیروی P برابر است با سطح مستطیلی زیر نمودار نیرو-تغییر مکان که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$W = P\Delta$$

(۲۱-۵)



در حالتی که نیرو به صورت خطی همراه با تغییر مکان تغییر می کند در عبارت کار ضریب $\frac{1}{2}$ پدیدار می شود، در صورتی که در حالت ثابت بودن نیرو چنین ضریبی در عبارت کار وجود ندارد.

کار انجام شده توسط کوپل وارد بر سازه به صورت حاصل ضرب لنگر در زاویه چرخش تعریف می شود. کار dW کوپلی با لنگر M در ضمن چرخش بی نهایت کوچک $d\theta$ به صورت زیر بیان می شود:

$$dW = M(d\theta) \quad (۲۲-۵)$$

بنابراین کار کل W را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta \quad (۲۳-۵)$$

۵-۷ اصل کار مجازی

اصل کار مجازی در سال ۱۷۱۷ توسط John Bernoulli بیان شد که ابزار تحلیلی توانمندی را برای بسیاری از مسائل مکانیک سازه معرفی می نماید.

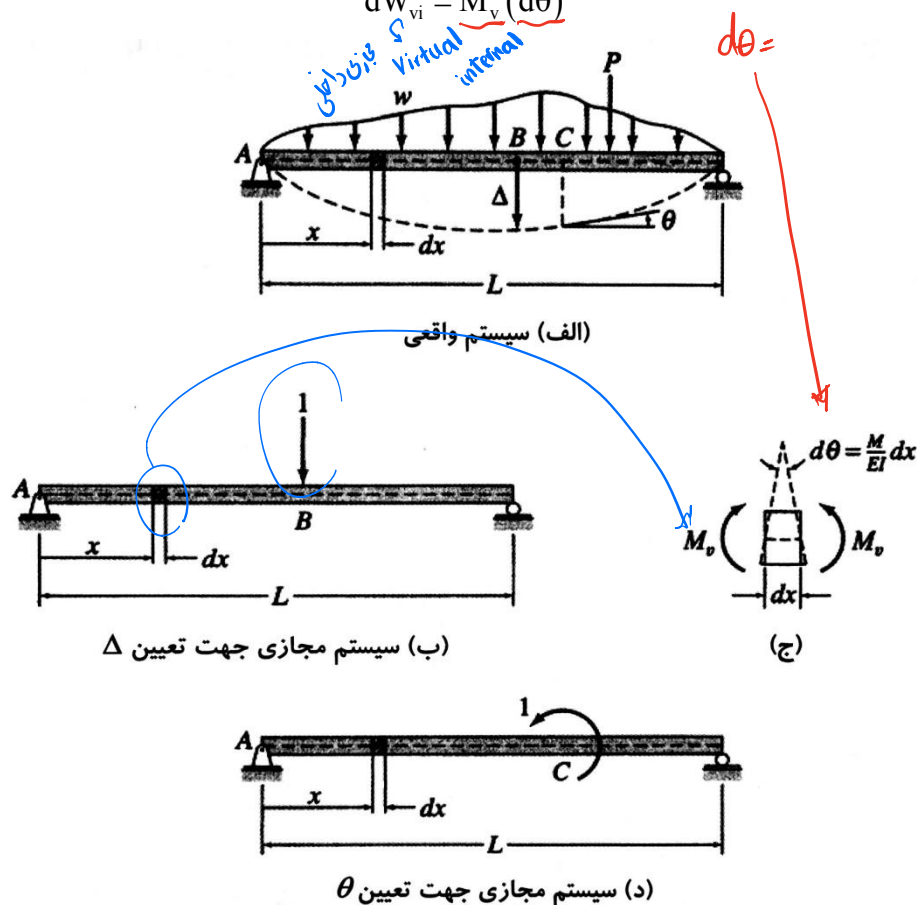
۵-۷-۱ تغییر شکل خمشی تیرها به روش کار مجازی

برای به دست آوردن رابطه روش کار مجازی جهت تعیین تغییر شکل خمشی تیرها، تیر نشان داده شده در شکل الف را با بارگذاری دلخواه در نظر بگیرید. فرض کنید که تعیین تغییر مکان قائم Δ نقطه B از تیر مورد نظر است. جهت تعیین این تغییر مکان، سیستمی مجازی متشکل از بار واحد وارد بر آن نقطه را در امتداد تغییر مکان مورد نظر انتخاب می‌کنیم (شکل ب). حال چنانچه این تیر را همراه با بار واحد مجازی وارد بر آن تحت تأثیر تغییر شکل ناشی از بار واقعی قرار دهیم، کار مجازی خارجی انجام شده توسط بار واحد مجازی در

ضمن تغییر شکل واقعی Δ برابر است با: $W_{ve} = 1(\Delta)$ *Virtual External* برای به دست آوردن کار مجازی، توجه خود را به جزء بی‌نهایت کوچک dx از تیر در فاصله x از تکیه‌گاه A در سمت چپ متمرکز می‌کنیم (شکل الف و ب). از آنجاکه تیر با بار مجازی (شکل ب) تحت تأثیر تغییر شکل ناشی از بارگذاری واقعی (شکل الف) قرار دارد، همان‌طور که در شکل ج نشان داده شده است، لنگر خمشی مجازی داخلی M_v وارد بر جزء dx در ضمن چرخش واقعی $d\theta$ کار مجازی داخلی انجام می‌دهد؛ بنابراین کار مجازی داخلی انجام شده بر روی جزء dx به صورت زیر بیان می‌شود:

$$dW_{vi} = M_v (d\theta)$$

(۲۴-۵)



توجه داشته باشید که به دلیل ثابت ماندن لنگر مجازی M_v در ضمن چرخش واقعی $d\theta$ ، در معادله (۲۴-۵) ضرب $\frac{1}{2}$ وارد نمی‌شود. از معادله (۱۳-۵) یادآور می‌شود $d\theta = \frac{M}{EI} dx$ که در اینجا M لنگر خمشی ناشی از

حل:

سیستم‌های واقعی و مجازی به ترتیب در شکل‌های ب و ج نشان داده شده‌اند. برای به دست آوردن معادلات لنگر خمشی، مختص x را با مبدأ منطبق بر B از تیر انتخاب می‌کنیم. با توجه به شکل ب مشاهده می‌شود که معادله M بر حسب مختص x عبارت است از:

$$0 < x < 5\text{m} \quad M = -60x$$

به شکلی مشابه با استفاده از شکل ج، معادله M_v به صورت زیر به دست می‌آید:

$$0 < x < 5\text{m} \quad M = -1$$

شیب در نقطه B را می‌توان به صورت زیر با به کار بردن رابطه کار مجازی ارائه شده در معادله (۵-۲۸) محاسبه کرد:

$$W_{ve} = W_{vi} \Rightarrow 1(\theta_B) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$1(\theta_B) = \frac{1}{EI} \int_0^5 -1 \times (-60x) dx \Rightarrow (1 \text{ kN.m}) \theta_B = \frac{750 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

بنابراین:

$$\theta_B = \frac{750 \text{ kN.m}^2}{EI} = \frac{750}{(70 \times 10^6)(600 \times 10^{-6})} = 0.0179 \text{ rad}$$

پاسخ مثبت نشان دهنده آن است که چرخش نقطه B هم‌جهت با لنگر واحد می‌باشد! پس چرخش نقطه B ساعت‌گرد می‌باشد.

تمرین ۸:

تغییر مکان خمشی نقطه C از تیر زیر (شکل الف) را به روش کار مجازی تعیین کنید.

ثابت EI
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $I = 800(10^6) \text{ mm}^4$

(الف)

(ب) سیستم واقعی M

(ج) سیستم مجازی M_v

۶۵

علیرضا قربی

حل:

سیستم‌های واقعی و مجازی به ترتیب در شکل‌های ب و ج نشان داده شده‌اند. بارگذاری‌های واقعی و مجازی در نقطه B ناپیوسته‌اند، بنابراین تیر به دو بخش AB و BC تقسیم می‌شود. مختص x مورد استفاده در تعیین معادلات لنگر خمشی در شکل‌های ب و ج نشان داده شده است و معادلات M و M_v برای هر دو بخش تیر در زیر آورده شده است:

بخش	مختص x		M	M_v
	مبدأ	محدوده (m)	(kN.m)	(kN.m)
AB	A	0-9	$115x - 15x^2$	$-\frac{x}{3}$
CB	C	0-3	$-60x$	$-x$

حال با استفاده از رابطه کار مجازی ارائه شده در معادله (۲۷-۵) می‌توان تغییر مکان خمشی نقطه C را تعیین کرد:

$$W_{ve} = W_{vi} \Rightarrow 1(\Delta_C) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$1(\Delta_C) = \frac{1}{EI} \left[\int_0^9 \left(-\frac{x}{3} \right) (115x - 15x^2) dx + \int_0^3 (-x)(-60x) dx \right] \Rightarrow (1 \text{ kN}) \Delta_C = -\frac{573.75 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

بنابراین:

$$\Delta_C = -\frac{573.75 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = -\frac{573.75}{(200 \times 10^6)(800 \times 10^{-6})} = -0.003586 \text{ m}$$



پاسخ منفی نشان دهنده آن است که جابجایی هم‌جهت با نیروی واحد نیست! پس تغییر مکان نقطه C به مقدار 3.586 میلی‌متر به سمت بالا می‌باشد!

۵-۷-۲ تغییر شکل قاب‌ها به روش کار مجازی

روابط تغییر شکل و چرخش برای قاب با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های محوری:

$$1(\Delta) = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) + \sum \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (۲۹-۵)$$

$$1(\theta) = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) + \sum \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (۳۰-۵)$$

روابط تغییر شکل و چرخش برای قاب با صرف نظر از تغییر شکل‌های محوری (حالت معمول در تحلیل ۱):

کل ۱

$$1(\Delta) = \sum \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (31-5)$$

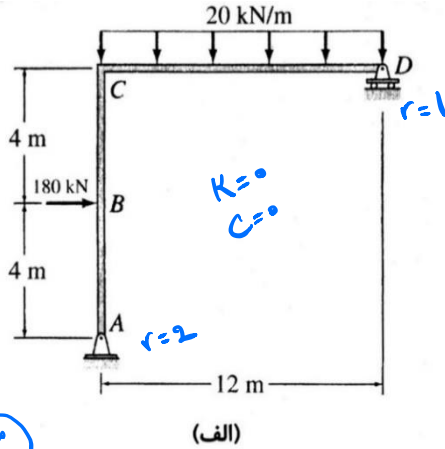
$$1(\theta) = \sum \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (32-5)$$

تمرین ۹:

چرخش گره C قاب شکل الف را به روش کار مجازی تعیین کنید (از تغییر شکل های محوری صرف نظر شود).

جوابی
 $\Delta_C = ?$
 Δ_C

$(1+3K) - (C+3)$
 $(3+3 \times 0) - (0+3) = 3-3=0$
 معنی



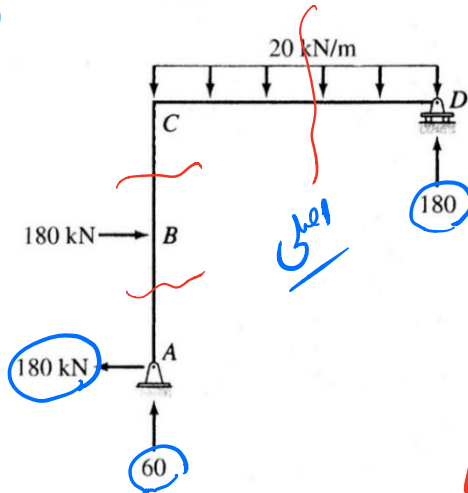
سازه معین

Reaction

از روابط تبدیل

به دست می آوریم (مضامین)

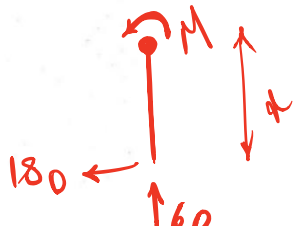
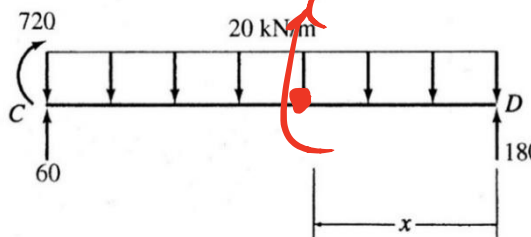
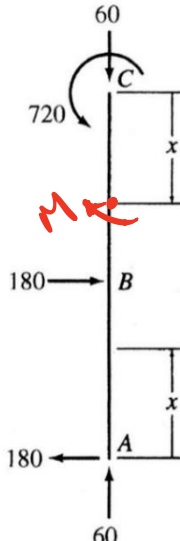
$$\left. \begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ \sum M &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R$$



$$\sum M_o = 0$$

$$-M + 180x = -20 \times \frac{x^2}{2}$$

$$M = -10x^2 + 180x$$

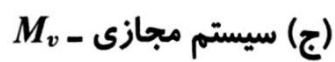


$$\sum M_o = 0$$

$$-180 \times x + M = 0$$

$$M = 180x$$

(ب) سیستم واقعی - M



سیستم‌های واقعی و مجازی به ترتیب در شکل‌های ب و ج نشان داده شده‌اند. مختص x مورد استفاده در تعیین معادلات لنگر خمشی سه بخش قاب یعنی AB ، BC و CD نیز در این شکل‌ها نشان داده شده‌اند.

معادلات M و M_v سه بخش قاب در زیر آورده شده است:

بخش	مختص x		M	M_v
	مبدأ	محدوده (m)	(kN.m)	(kN.m)
AB	A	0-4	$180x$	0
CB	C	0-4	720	0
DC	D	0-12	$180x - 20 \frac{x^2}{2}$	$\frac{x}{12}$

حال با به کار بردن رابطه کار مجازی ارائه شده در معادله (۵-۲۸) می توان چرخش گره C را محاسبه کرد:

$$W_{ve} = W_{vi} \Rightarrow 1(\theta_c) = \sum \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$1(\theta_c) = \frac{1}{EI} \int_0^{12} \left(\frac{x}{12} \right) \times \left(180x - 20 \frac{x^2}{2} \right) dx \Rightarrow (1 \text{ kN.m}) \theta_c = \frac{4320 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

بنابراین:

$$\theta_c = \frac{4320 \text{ kN.m}^2}{EI} = \frac{4320}{(200 \times 10^6)(1000 \times 10^{-6})} = 0.0216 \text{ rad}$$

پاسخ مثبت نشان دهنده آن است که چرخش هم جهت با لنگر واحد می باشد! پس چرخش گره C به مقدار 0.0216 رادیان ساعت گرد می باشد!

۵-۸ اصل پایستاری انرژی

اصل پایستاری انرژی بیان می کند که کار انجام شده توسط نیروهای خارجی استاتیکی وارد بر یک سازه الاستیک در حال تعادل برابر است با کار انجام شده توسط نیروهای داخلی یا انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه. روابط انرژی کرنشی تیر و قاب عبارتند از:

انرژی کرنشی تیر:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (۵-۳۳)$$

انرژی کرنشی قاب:

$$U = \sum \int_0^L \frac{F^2 L}{2AE} dx + \sum \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (۵-۳۴)$$

۵-۹ قضیه دوم کاستلیانو

این روش نخستین بار توسط Alberto Castigliano در سال ۱۸۷۳ مطرح شد و معمولاً به عنوان قضیه دوم کاستلیانو شناخته می شود و تنها می توان در مورد سازه های الاستیک خطی از آن استفاده کرد. قضیه دوم کاستلیانو را می توان به صورت زیر مطرح کرد:

در سازه های الاستیک خطی، مشتق جزئی انرژی کرنشی نسبت به نیرو (کوپل) اعمال شده برابر است با تغییر مکان (چرخش) نیرو (کوپل) در امتداد خط اثر آن:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{M}_i} = \theta_i \quad (۳۵-۵)$$

در اینجا U انرژی کرنشی، Δ_i تغییر مکان نقطه اعمال P_i در جهت P_i و θ_i چرخش نقطه اعمال کوپل \bar{M}_i در جهت \bar{M}_i

۵-۹-۱ کاربرد قضیه دوم کاستلیانو برای تیرها

با جایگزین کردن رابطه (۳۳-۵) در رابطه عمومی قضیه دوم کاستلیانو خواهیم داشت:

- رابطه تغییر شکل (مکان) برای تیرها:

$$\Delta = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (۳۶-۵)$$

- رابطه چرخش برای تیرها:

$$\theta = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (۳۷-۵)$$

۵-۹-۲ کاربرد قضیه دوم کاستلیانو برای قاب ها

با جایگزین کردن رابطه (۳۴-۵) در رابطه عمومی قضیه دوم کاستلیانو خواهیم داشت:

- روابط تغییر شکل و چرخش برای قاب با در نظر گرفتن تغییر شکل های محوری:

$$\Delta = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{FL}{AE} + \sum \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (۳۸-۵)$$

$$\theta = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{M}} \right) \frac{FL}{AE} + \sum \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (۳۹-۵)$$

- روابط تغییر شکل و چرخش برای قاب با صرف نظر از تغییر شکل های محوری (حالت معمول در

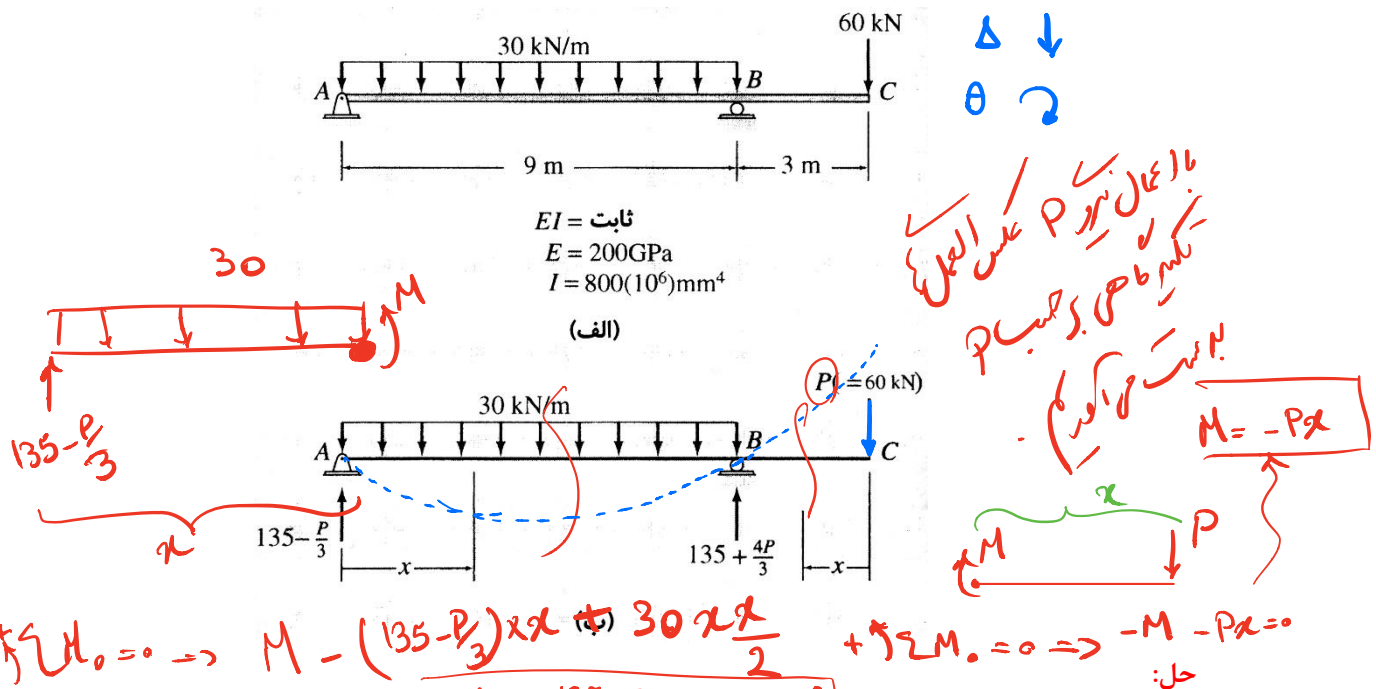
تحلیل ۱):

$$\Delta = \sum \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (۴۰-۵)$$

$$\theta = \sum \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (۴۱-۵)$$

تمرین ۱۰:

تغییر مکان خمشی نقطه C از تیر زیر (شکل الف) را به روش کاستلیانو تعیین کنید.



چون در نقطه C یعنی جایی که تغییر شکل تیر مورد نظر است، یک بار خارجی 60kN وجود دارد، همان طور که در شکل ب مشخص شده است، این بار را به عنوان متغیر P در نظر می گیریم. سپس واکنش های تکیه گاهی تیر را بر حسب P محاسبه می کنیم. این واکنش ها نیز در شکل ب نشان داده شده اند. از آنجا که بارگذاری در B دچار ناپیوستگی است تیر را به دو بخش AB و BC تقسیم می کنیم. مختص x مورد استفاده در تعیین معادلات گشتاور خمشی در این دو بخش تیر در شکل ب نشان داده شده اند. معادلات M (بر حسب P) به دست آمده دو بخش تیر همراه با مشتقات جزئی M نسبت به P در جدول زیر آمده اند.

بخش	مختص x			$\frac{\partial M}{\partial P}$ (kN.m/kN)
	مبدأ	محدوده (m)	M (kN.m)	
AB	A	0-9	$\left(135 - \frac{P}{3}\right)x - 15x^2$	$-\frac{x}{3}$
CB	C	0-3	$-Px$	$-x$

حال می توان تغییر مکان نقطه C را با جایگزین کردن $P=60\text{kN}$ در معادلات M و $\frac{\partial M}{\partial P}$ و با استفاده از رابطه

(۳۶-۵) تعیین کرد:

$$\Delta_C = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^9 \left(-\frac{x}{3} \right) \left(\left(135 - \frac{P}{3} \right) x - 15x^2 \right) dx + \int_0^3 (-x)(-Px) dx \right]$$

از اینجا به بعد P معلوم است
P = 60 kN

$$\Rightarrow P = 60 \text{ kN} \Rightarrow \Delta_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^9 \left(-\frac{x}{3} \right) \left(\left(135 - \frac{60}{3} \right) x - 15x^2 \right) dx + \int_0^3 (-x)(-60x) dx \right]$$

$$\Rightarrow \Delta_C = -\frac{573.75 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

بنابراین:

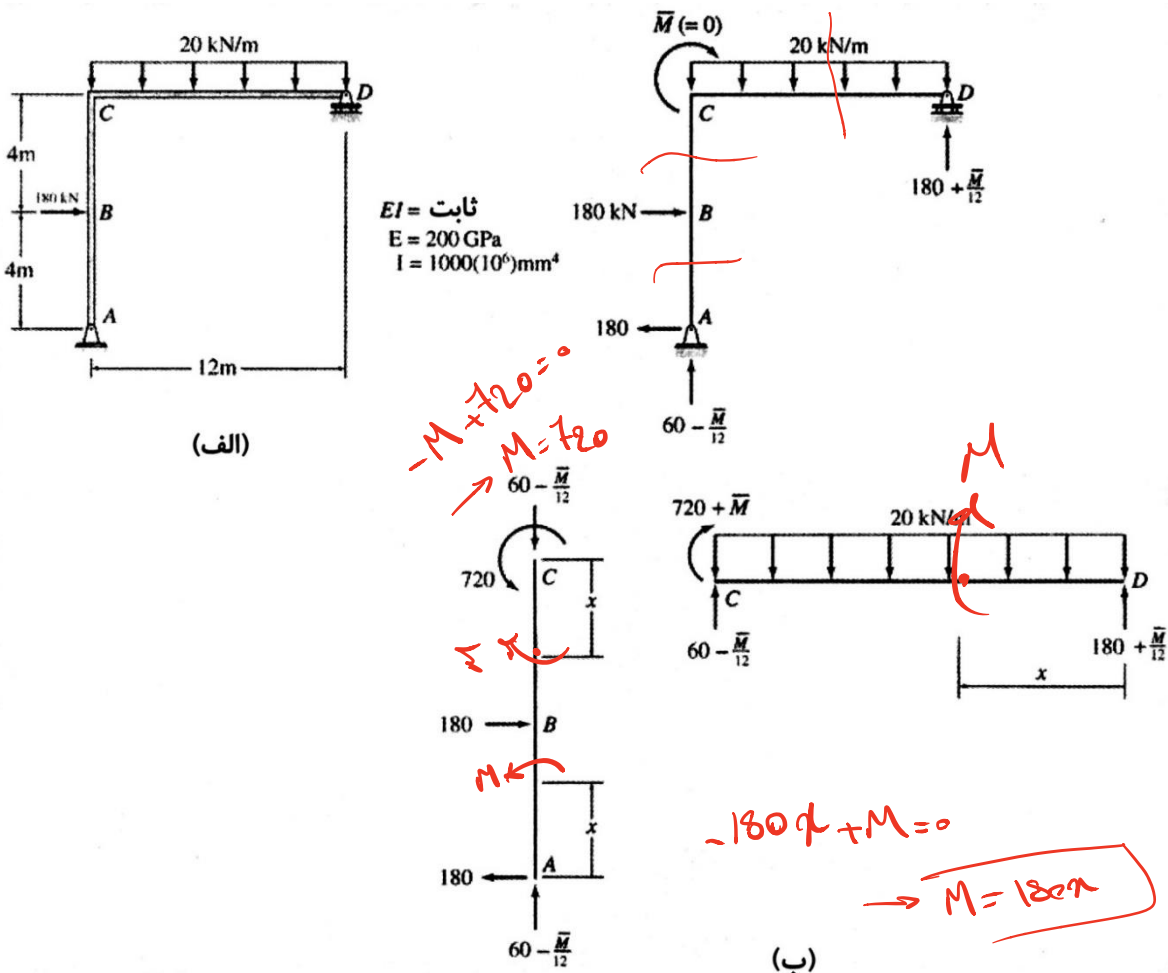
$$\Delta_C = -\frac{573.75 \text{ kN.m}^3}{EI} = -\frac{573.75}{(200 \times 10^6)(800 \times 10^{-6})} = -0.003586 \text{ m}$$

پاسخ منفی نشان دهنده آن است که جابجایی خلاف جهت اعمال نیروی P می باشد! پس تغییر مکان نقطه C به مقدار 3.586 میلی متر به سمت بالا می باشد!



تمرین ۱۱:

چرخش گره C قاب شکل الف را به روش کاستلیانو تعیین کنید (از تغییر شکل های محوری صرف نظر شود).



حل:

در محل گره C یعنی جایی که چرخش مورد نظر است، هیچ لنگر خارجی وجود ندارد، به همین جهت همان طور که در شکل ب نشان داده شده است، لنگر فرضی $\bar{M} = 0$ را در نقطه C وارد می‌کنیم. مختص x مورد استفاده در تعیین معادلات لنگر خمشی سه بخش قاب در شکل ب نشان داده شده است و معادلات M به دست آمده این سه بخش بر حسب \bar{M} و $\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}$ نیز در جدول زیر آمده است.

بخش	مختص x		M	$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}$
	مبدأ	محدوده (m)	(kN.m)	($\frac{kN.m}{kN.m}$)
AB	A	0-4	180x	0
CB	C	0-4	720	0
DC	D	0-12	$\left(180 + \frac{\bar{M}}{12}\right)x - 20\frac{x^2}{2}$	$\frac{x}{12}$

$$180x - 10x^2$$

حال می‌توان چرخش گره C از قاب را با جایگزین کردن $\bar{M} = 0$ در معادلات M و $\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}$ با استفاده از رابطه (۳۷-۵) تعیین کرد:

$$\theta_c = \sum \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{M}{EI} dx = \int_0^{12} \left(\frac{x}{12} \right) \left(180x - 20\frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$\Rightarrow \theta_c = \frac{4320 \text{ kN.m}^2}{EI} = \frac{4320}{(200 \times 10^6)(1000 \times 10^{-6})} = 0.0216 \text{ rad}$$

پاسخ مثبت نشان دهنده آن است که چرخش هم‌جهت با لنگر \bar{M} می‌باشد! پس چرخش گره C به مقدار 0.0216 رادیان ساعت‌گرد می‌باشد!

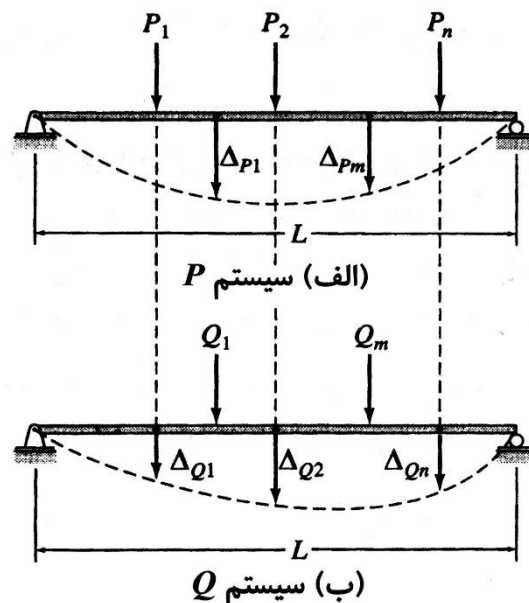
۵-۱۰ قانون بتی و قانون ماکسول (Betti & Maxwell) در مورد تغییر شکل‌های متقابل

قانون Maxwell در مورد تغییر شکل‌های متقابل که نخستین بار توسط James Maxwell در سال ۱۸۶۴ مطرح شد، نقش مهمی را در تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی مطرح شده در فصل بعد بازی می‌کند. قانون ماکسول حالت ویژه‌ای از قانون عمومی‌تر بتی (سال ۱۸۷۲) می‌باشد. قانون بتی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

در سازه الاستیک خطی، کار مجازی انجام شده توسط سیستم P از نیروها و لنگرهای مؤثر در ضمن تغییر

شکل ناشی از سیستم Q از نیروها و لنگرها برابر است با کار مجازی سیستم Q مؤثر در ضمن تغییر شکل ناشی از سیستم P.

تیر شکل زیر را در نظر بگیرید، همان طور که در شکل الف و ب نشان داده شده است، این تیر به ترتیب تحت تأثیر دو سیستم مختلف از نیروها یعنی P و Q قرار دارد.



حال فرض می‌کنیم که تیری که تحت تأثیر بارهای P قرار دارد (شکل الف)، تحت تأثیر سیستم Q از نیروها (شکل ب) دچار تغییر شکل می‌شود. کار مجازی خارجی W_{ve} انجام شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W_{ve} = P_1 \Delta_{Q1} + P_2 \Delta_{Q2} + \dots + P_n \Delta_{Qn} \Rightarrow W_{ve} = \sum_{i=1}^n P_i \Delta_{Qi} \quad (۴۲-۵)$$

با به کار بردن اصل نیروهای مجازی در مورد اجسام تغییر شکل پذیر $W_{ve} = W_{vi}$ و با استفاده از رابطه کار مجازی داخلی تیرها (۲۶-۵) داریم:

$$\sum_{i=1}^n P_i \Delta_{Qi} = \int_0^L \frac{M_P M_Q}{EI} dx \quad (۴۳-۵)$$

سپس فرض می‌کنیم تیر تحت نیروهای Q وارد بر آن (شکل ب) تحت تأثیر تغییر شکل‌های ناشی از نیروهای P (شکل الف) قرار گیرد، در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^m Q_i \Delta_{Pi} = \int_0^L \frac{M_Q M_P}{EI} dx \quad (۴۴-۵)$$

با توجه به یکسان بودن سمت راست معادلات فوق، با مساوی قرار دادن سمت چپ معادلات نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n P_i \Delta_{Qi} = \sum_{i=1}^m Q_i \Delta_{Pi} \quad (۴۵-۵)$$

تغییر شکل ۲ نیرو ۱ → نرمی f
 نیرو ۲ تغییر شکل ۱ → سختی k

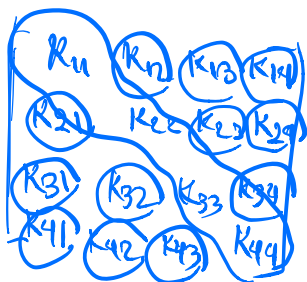
Flexibility نرمی، انعطاف پذیری

معادله فوق نشانگر بیان ریاضی قانون بتی است.

قانون ماکسول در مورد تغییر شکل‌های متقابل بیان می‌کند که در سازه الاستیک خطی، تغییر شکل نقطه i

در اثر بار واحد بر نقطه j برابر است با تغییر شکل نقطه j در اثر بار واحد نقطه i .

همان طور که مشخص است قانون ماکسول را می‌توان حالتی خاص از قانون بتی دانست. برای اثبات قانون



$$\frac{1}{f} = k$$

$$1(f_{ij}) = 1(f_{ji}) \Rightarrow f_{ij} = f_{ji}$$

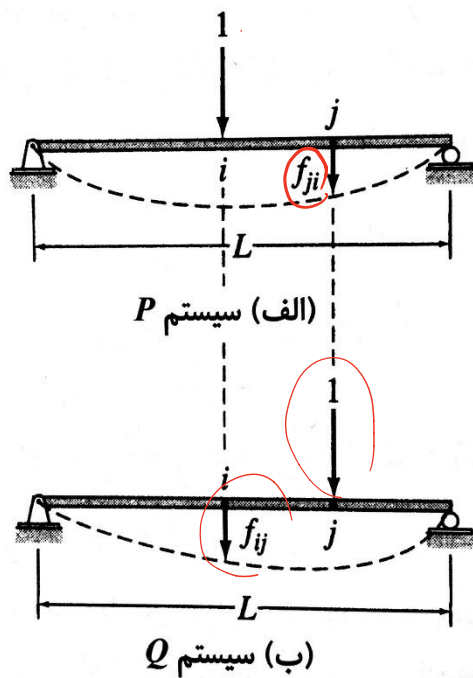
ماکسول در تیر زیر داریم:

$$(46-5) \quad f_{ij} = f_{ji} \quad \text{نرمی، انعطاف پذیری} \quad \text{نرمی} \quad \text{نرمی} \quad \text{نرمی}$$

f_{ij} بیانگر تغییر شکل نقطه i در اثر بار واحد نقطه j

f_{ji} بیانگر تغییر شکل نقطه j در اثر بار واحد در نقطه i

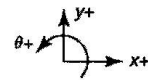
به این تغییر شکل‌های ناشی از بار واحد، ضریب انعطاف پذیری (ضریب نرمی) گفته می‌شود.



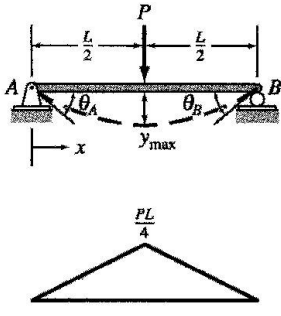
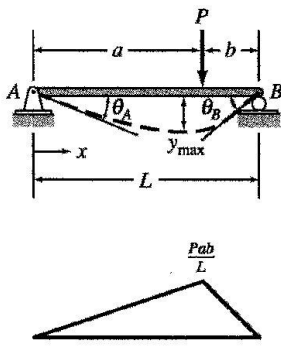
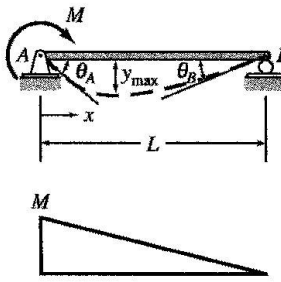
۵-۱۱ جمع آثار قوا

زمانی که تیر تحت تأثیر چندین بار قرار دارد، معمولاً آسان‌تر است که شیب یا تغییر شکل خمشی ناشی از اثر بارها با بر هم نهی (جمع جبری) شیب‌ها یا تغییر شکل‌های خمشی ناشی از بارهای اعمال شده منفرد تعیین شوند. شیب و تغییر شکل ناشی از هر بار منفرد را می‌توان با استفاده از روش‌های مطرح شده در این فصل محاسبه نمود. همچنین در بسیاری از کتاب‌های راهنمای سازه روابط تغییر شکل تیرها برای انواع مختلف بارگذاری و شرایط تکیه گاهی ارائه شده است که از آن‌ها می‌توان برای این منظور استفاده کرد.

لنگر خمشی، شیب و تغییر شکل تیرها تحت شرایط بارگذاری مختلف



تیر، بارگذاری و نمودار لنگر خمشی	معادلات شیب و تغییر شکل خمشی
<div>1</div>	$0 \leq x \leq a :$ $\theta = \frac{P}{2EI}(x^2 - 2ax)$ $y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3ax^2)$ $a \leq x \leq L :$ $\theta = -\frac{Pa^2}{2EI}$ $y = \frac{Pa^2}{6EI}(a - 3x)$ $\theta_B = -\frac{Pa^2}{2EI}; \quad y_B = -\frac{Pa^2}{6EI}(3L - a)$
<div>2</div>	$0 \leq x \leq a :$ $\theta = -\frac{Mx}{EI}$ $y = -\frac{Mx^2}{2EI}$ $a \leq x \leq L :$ $\theta = -\frac{Ma}{EI}$ $y = \frac{Ma}{2EI}(a - 2x)$ $\theta_B = -\frac{Ma}{EI}; \quad y_B = -\frac{Ma}{2EI}(2L - a)$
<div>3</div>	$0 \leq x \leq a :$ $\theta = \frac{w}{6EI}(3ax^2 - 3a^2x - x^3)$ $y = \frac{w}{24EI}(4ax^3 - 6a^2x^2 - x^4)$ $a \leq x \leq L :$ $\theta = -\frac{wa^3}{6EI}$ $y = \frac{wa^3}{24EI}(a - 4x)$ $\theta_B = -\frac{wa^3}{6EI}; \quad y_B = -\frac{wa^3}{24EI}(4L - a)$
<div>4</div>	$0 \leq x \leq a :$ $\theta = \frac{w}{24EIa}(x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x)$ $y = \frac{w}{120EIa}(x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2)$ $a \leq x \leq L :$ $\theta = -\frac{wa^3}{24EI}$ $y = \frac{wa^3}{120EI}(-5x + a)$ $\theta_B = -\frac{wa^3}{24EI}; \quad y_B = -\frac{wa^3}{120EI}(5L - a)$

تیر، بارگذاری و نمودار لنگر خمشی	معادلات شیب و تغییر شکل خمشی
<div style="display: flex; align-items: center;"> 5  </div>	$0 \leq x \leq \frac{L}{2} :$ $\theta = \frac{P}{16EI} (4x^2 - L^2)$ $y = \frac{P}{48EI} (4x^3 - 3L^2x)$ $\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}; \quad \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$ $y_{\max} = -\frac{PL^3}{48EI}$
<div style="display: flex; align-items: center;"> 6  </div>	$0 \leq x \leq a :$ $\theta = \frac{Pb}{6EIL} (3x^2 + b^2 - L^2)$ $y = \frac{Pb}{6EIL} (x^3 + b^2x - L^2x)$ $a \leq x \leq L :$ $\theta = \frac{Pa}{6EIL} [L^2 - a^2 - 3(L - x)^2]$ $y = \frac{Pa(L-x)}{6EIL} (x^2 + a^2 - 2Lx)$ $\theta_A = -\frac{Pb}{6EIL} (L^2 - b^2)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EIL} (L^2 - a^2)$ <p>For $a \geq b :$</p> $y_{\max} = -\frac{Pb}{9\sqrt{3}EIL} (L^2 - b^2)^{3/2}$ $\text{at } x = \left(\frac{L^2 - b^2}{3} \right)^{1/2}$
<div style="display: flex; align-items: center;"> 7  </div>	$\theta = -\frac{M}{6EIL} (3x^2 - 6Lx + 2L^2)$ $y = -\frac{M}{6EIL} (x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$ $\theta_A = -\frac{ML}{3EI}; \quad \theta_B = \frac{ML}{6EI}$ $y_{\max} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$ $\text{at } x = L \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

تیر، بارگذاری و نمودار لنگر خمشی	معادلات شیب و تغییر شکل خمشی
<div data-bbox="235 257 487 616"> <p> $0 \leq x \leq a :$ </p> $\theta = \frac{M}{6EI L} (-3x^2 + 6aL - 3a^2 - 2L^2)$ $y = \frac{M}{6EI L} (-x^3 + 6aLx - 3a^2x - 2L^2x)$ $\theta_A = \frac{M}{6EI L} (6aL - 3a^2 - 2L^2)$ $\theta_B = \frac{M}{6EI L} (L^2 - 3a^2)$ </div>	
<div data-bbox="235 660 487 918"> <p> $0 \leq x \leq L :$ </p> $\theta = -\frac{w}{24EI} (4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$ $y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ $\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI} - \frac{24 \times 1000}{24EI}$ $\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$ $y_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI} \text{ at } x = \frac{L}{2}$ </div>	
<div data-bbox="235 963 487 1377"> <p> $0 \leq x \leq a :$ </p> $\theta = -\frac{w}{24EI L} [4Lx^3 - 6a(2L-a)x^2 + a^2(2L-a)^2]$ $y = -\frac{w}{24EI L} [Lx^4 - 2a(2L-a)x^3 + a^2(2L-a)^2x]$ <p> $a \leq x \leq L :$ </p> $\theta = -\frac{wa^2}{24EI L} (6x^2 - 12Lx + a^2 + 4L^2)$ $y = -\frac{wa^2}{24EI L} (L-x)(-2x^2 + 4Lx - a^2)$ $\theta_A = -\frac{wa^2}{24EI L} (2L-a)^2$ $\theta_B = \frac{wa^2}{24EI L} (2L^2 - a^2)$ </div>	
<div data-bbox="235 1433 487 1780"> <p> $0 \leq x \leq L :$ </p> $\theta = -\frac{w}{360EI L} (15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4)$ $y = -\frac{w}{360EI L} (3x^5 - 10L^2x^3 + 7L^4x)$ $\theta_A = -\frac{7wL^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{wL^3}{45EI}$ $y_{\max} = -0.00652 \frac{wL^4}{EI} \text{ at } x = 0.5193L$ </div>	