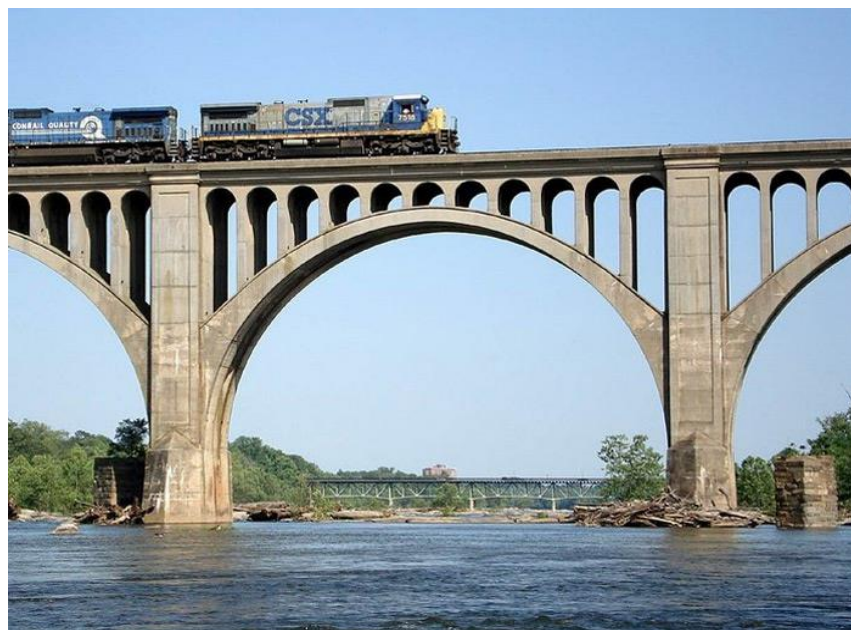


فصل چهارم: خط تأثیر

۴-۱ مقدمه

برای طراحی اعضا یک سازه تحت اثر بارهای ثابت، ابتدا نمودارهای لنگر خمشی، نیروی برشی و ... را رسم کرده و سپس حداکثر مقدار این پارامترها را محاسبه می‌کنیم. در مرحله بعد، طراحی بر مبنای این مقادیر حداکثر انجام می‌شود. برای طراحی سازه‌هایی که اعضا آن تحت اثر بارهای متحرک (مانند وسایل نقلیه عبوری از روی یک پل) قرار دارند، از خطوط تأثیر مربوط به نیروهای داخلی (مانند خمش، برش و ...) برای طراحی استفاده می‌گردد.



۴-۲ آشنایی با مفهوم خط تأثیر

خط تأثیر یک قید در سازه (مانند نیروی برشی و لنگر خمشی در یک نقطه از سازه، عکس‌العمل تکیه‌گاهی و ...) عبارت است از مقدار آن قید وقتی که بار واحد از روی سازه عبور می‌کند.

۴-۲-۱ تفاوت خط تأثیر با نمودارهای برش و خمش

خطوط تأثیر نمایانگر اثر حرکت بار در یک نقطه مشخص از عضو می‌باشد در حالی که نمودارهای برش و خمش نمایانگر اثر بار ثابت در همه نقاط محور عضو می‌باشد.

۴-۲-۲ روند تحلیل

از دو روش زیر می‌توان برای رسم خط تأثیر در نقطه مشخص P برای هر تابع (عکس‌العمل، برش و یا خمش) استفاده کرد. در هر دو روش بار متحرک واحد بدون بعدی را بر روی عضو قرار می‌دهیم.

(۱) مقادیر جدولی

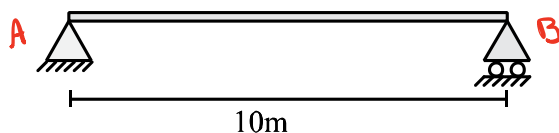
- قرار دادن نیروی واحد در مکان‌های مختلف در طول محور عضو و استفاده از روابط استاتیک برای تعیین مقدار تابع (عکس‌العمل، برش و یا خمش)
- اگر خط تأثیر برای عکس‌العمل قائم در یک نقطه مشخص مورد نیاز باشد، زمانی که عکس‌العمل رو به بالا می‌باشد، عکس‌العمل در آن نقطه را مثبت در نظر بگیرید.
- اگر خط تأثیر برای برش و یا خمش در یک نقطه مشخص مورد نیاز باشد، برش و خمش همانند جهات مشخص شده در بحث نمودارهای برش و خمش (فصل ۲) مثبت در نظر گرفته می‌شود.
- تمامی تیرهای معین استاتیکی از خطوط تأثیر با خطوط صاف قطعه‌قطعه تشکیل می‌شوند.
- برای اجتناب از خطا پیشنهاد می‌شود جدولی را تشکیل دهید و به ازای هر مکان x ، مقدار تابع (عکس‌العمل، برش و یا خمش) را روبرویش یادداشت نمایید و در نهایت می‌توان مقادیر یادداشت شده جدول را روی نمودار ترسیم کرد و خط تأثیر را تشکیل داد.

(۲) معادله خط تأثیر

- خط تأثیر با قرار دادن بار واحد در فاصله متغیر x روی عضو و محاسبه معادله تابع نیز قابل ترسیم است.

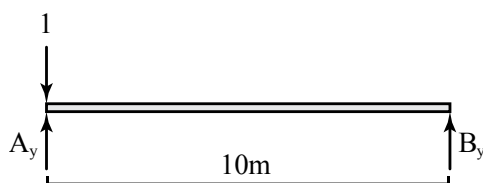
تمرین ۱:

خط تأثیر برای عکس‌العمل قائم A تیر زیر را رسم نمایید:



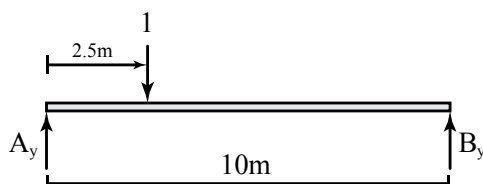
حل - روش مقادیر جدولی:

در نقطه $x=0$:



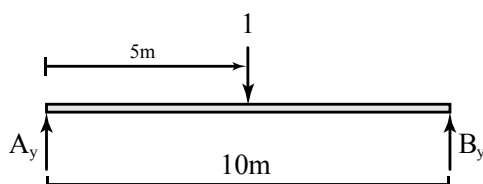
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 10 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 1$$

در نقطه $x=2.5$ ✗

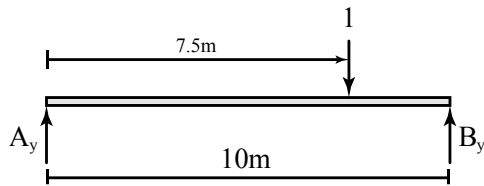


$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 7.5 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0.75$$

در نقطه $x=5$ ✗

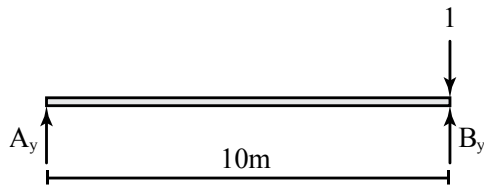


$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 5 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0.5$$



در نقطه $x=7.5$ α

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 2.5 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0.25$$

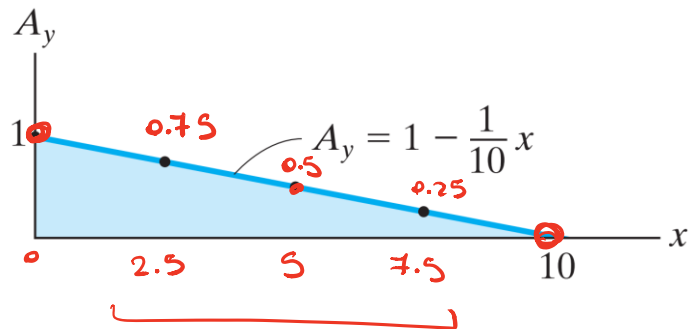


در نقطه $x=10$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow -A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0$$

با توجه به مقادیر به دست آمده نمودار خط تأثیر رسم می‌شود:

x	A_y
0	1
2.5	0.75
5	0.5
7.5	0.25
10	0

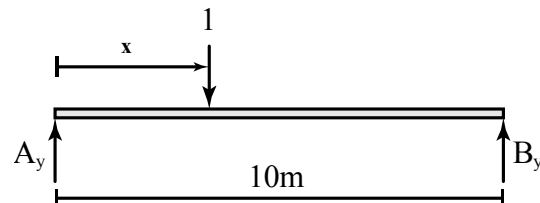


حل - روش معادله خط تأثیر:

وقتی بار واحد در مکان متغیر x از A قرار گیرد، عکس‌العمل A_y از معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow -A_y \times 10 + (1)(10 - x) = 0$$

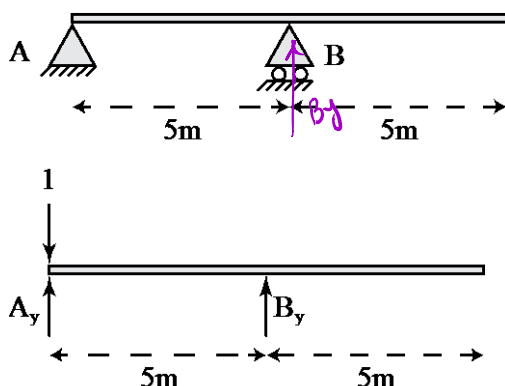
$$\rightarrow A_y = 1 - \frac{1}{10}x$$



با توجه به معادله خط تأثیر همانند شکلی که در بالا نشان داده شد رسم می‌شود.

تمرین ۲:

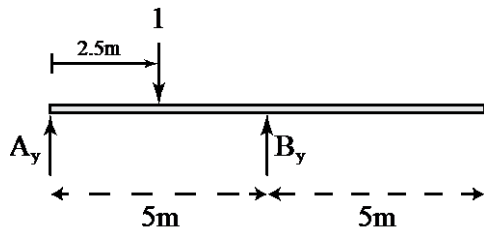
خط تأثیر عکس‌العمل قائم B تیر زیر را رسم نمایید:



حل - روش مقادیر جدولی:

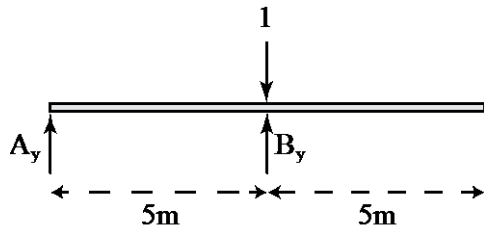
در نقطه $x=0$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow B_y \times 5 = 0 \rightarrow B_y = 0$$



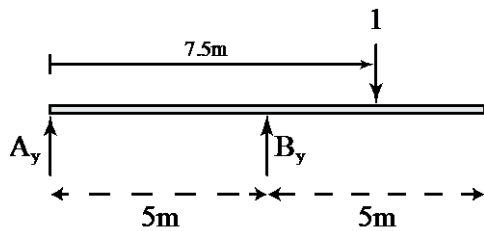
در نقطه $x=2.5$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -1 \times 2.5 + B_y \times 5 = 0 \rightarrow B_y = 0.5$$



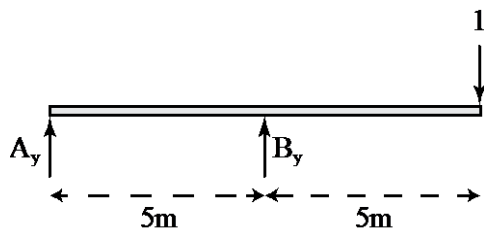
در نقطه $x=5$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -1 \times 5 + B_y \times 5 = 0 \rightarrow B_y = 1$$



در نقطه $x=7.5$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -1 \times 7.5 + B_y \times 5 = 0 \rightarrow B_y = 1.5$$

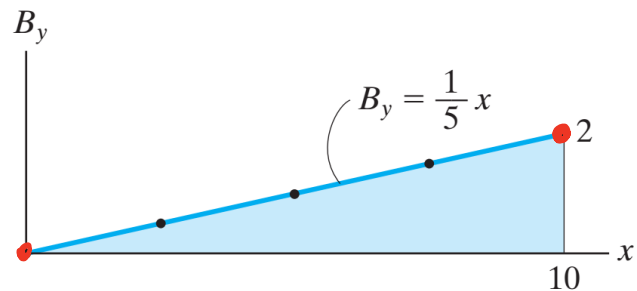


در نقطه $x=10$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -1 \times 10 + B_y \times 5 = 0 \rightarrow B_y = 2$$

با توجه به مقادیر به دست آمده نمودار خط تأثیر رسم می شود:

x	B_y
0	0
2.5	0.5
5	1
7.5	1.5
10	2

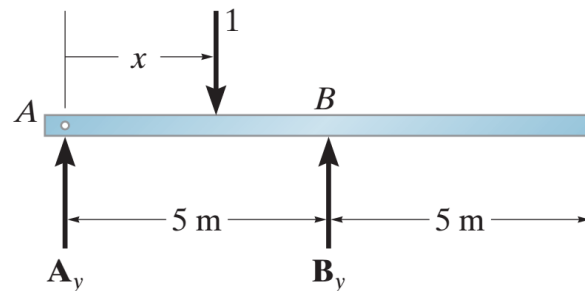


حل - روش معادله خط تأثیر:

وقتی بار واحد در مکان متغیر x از A قرار گیرد، عکس العمل A_y از معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -1(x) + B_y \times 5 = 0$$

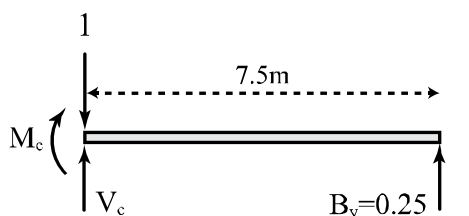
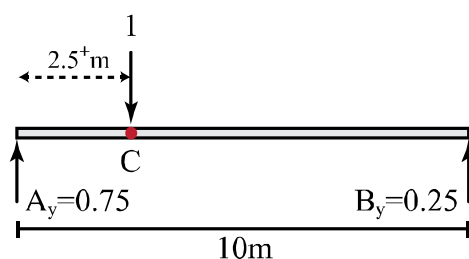
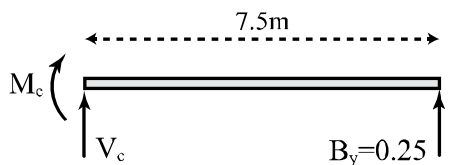
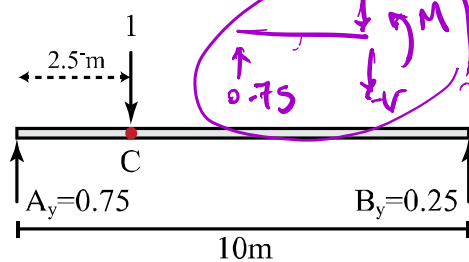
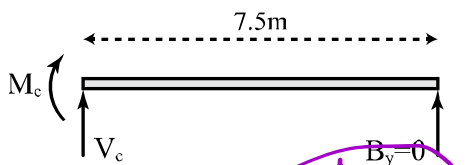
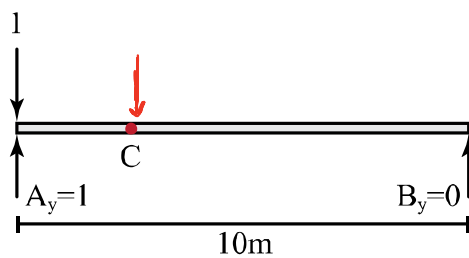
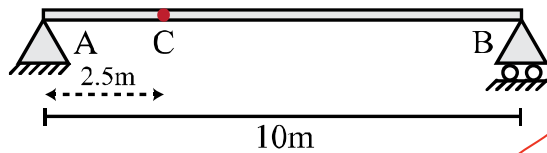
$$\rightarrow B_y = \frac{1}{5}x$$



با توجه به معادله خط تأثیر همانند شکلی که در بالا نشان داده شد رسم می شود.

تمرین ۳:

خط تأثیر برش در نقطه C تیر زیر را رسم نمایید:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_c = 0$$

$$1 - 1 - V_c = 0$$

حل - روش مقادیر جدولی:

در نقطه $x=0$:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 10 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 1$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 1 + B_y - 1 = 0 \rightarrow B_y = 0$$

قطعه سمت راست نقطه C را بیرون می آوریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_c = 0$$

$$\frac{1 \times 2.5}{10} = 0.25$$

در نقطه $x=2.5$ سمت چپ:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 7.5 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0.75$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0.75 + B_y - 1 = 0 \rightarrow B_y = 0.25$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 0.75 - 1 - V = 0 \Rightarrow -0.25 - V = 0$$

قطعه سمت راست نقطه C را بیرون می آوریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_c + 0.25 = 0 \rightarrow V_c = -0.25$$

$$V = -0.25$$

در نقطه $x=2.5$ سمت راست:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 7.5 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0.75$$

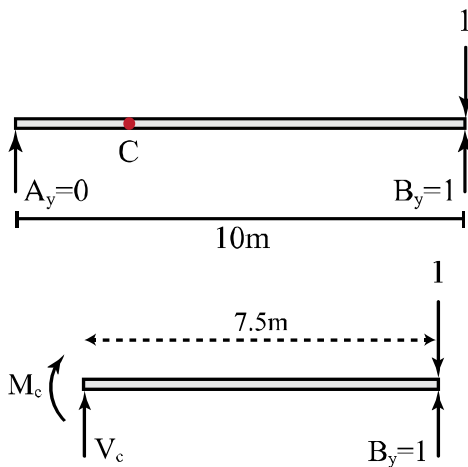
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0.75 + B_y - 1 = 0 \rightarrow B_y = 0.25$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 0.75 - V = 0 \Rightarrow V = 0.75$$

قطعه سمت راست نقطه C را بیرون می آوریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_c - 1 + 0.25 = 0 \rightarrow V_c = 0.75$$

به همین صورت برای $x=5$ و $x=7.5$ محاسبات را انجام می دهیم.



در نقطه $x=10$:

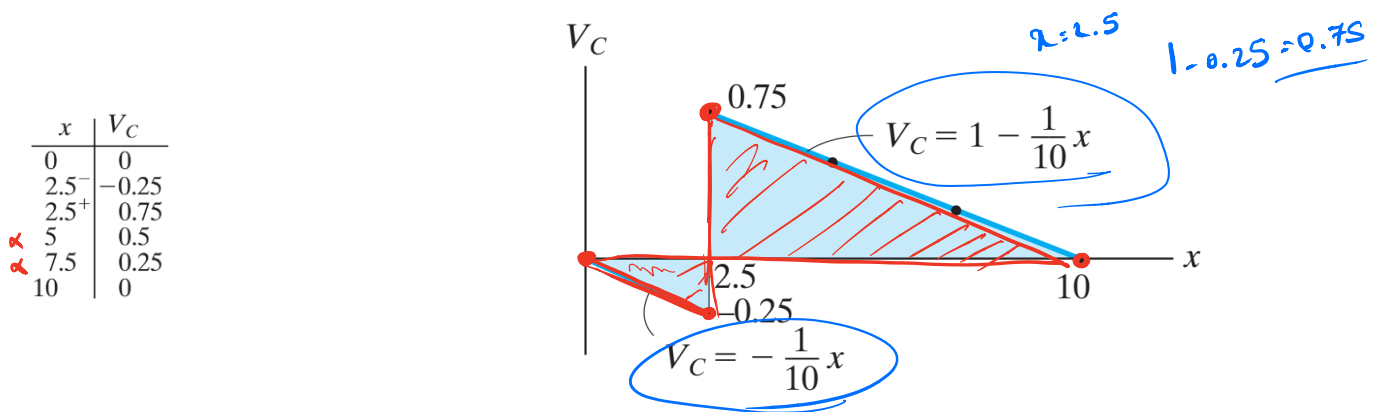
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow -A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0 + B_y - 1 = 0 \rightarrow B_y = 1$$

قطعه سمت راست نقطه C را بیرون می آوریم:

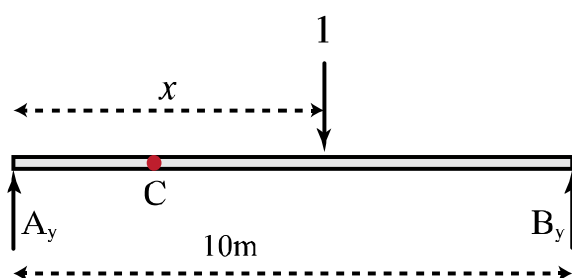
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_c + 1 - 1 = 0 \rightarrow V_c = 0$$

با توجه به مقادیر به دست آمده نمودار خط تأثیر رسم می شود:



حل - روش معادله خط تأثیر:

بار واحد متحرک را در فاصله x از A قرار می دهیم. با توجه به ناپیوستگی برش در نقطه C باید دو معادله به دست آوریم:



با در نظر گرفتن کل سازه داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow -A_y \times 10 + (1)(10 - x) = 0$$

$$\rightarrow 10A_y = 10 - x \rightarrow A_y = 1 - \frac{1}{10}x$$

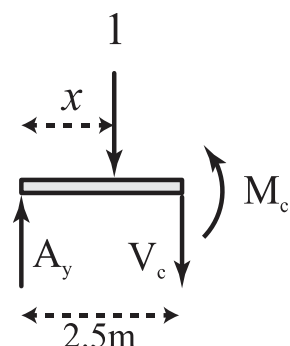
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{10}x$$

$$0 \leq x \leq 2.5m$$

با استفاده از تعادل در قطعه سمت چپ تیر خواهیم داشت:

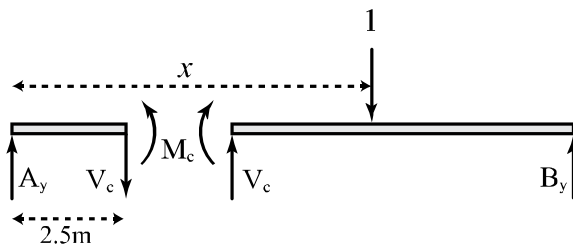
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 1 - \frac{1}{10}x - V_c - 1 = 0$$

$$\rightarrow V_c = -\frac{1}{10}x$$



$$2.5m \leq x \leq 10m$$

با استفاده از تعادل در قطعه سمت راست تیر خواهیم داشت:



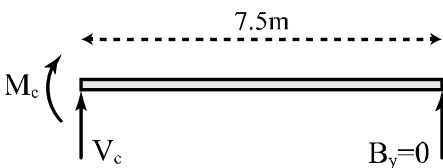
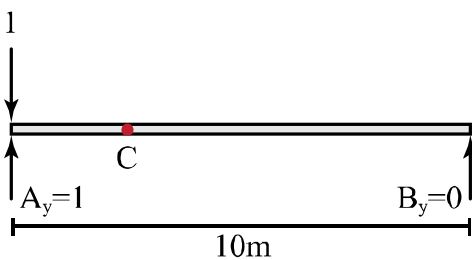
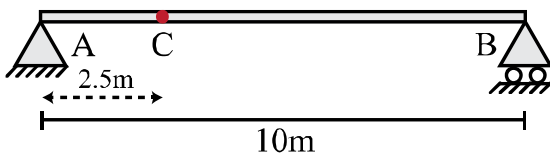
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_c - 1 + \frac{1}{10}x = 0$$

$$\rightarrow V_c = 1 - \frac{1}{10}x$$

با توجه به معادلات به دست آمده، خطوط تأثیر همانند شکلی که در بالا نشان داده شد رسم می‌شوند.

تمرین ۴:

خط تأثیر خمش در نقطه C تیر زیر را رسم نمایید:



حل - روش مقادیر جدولی:

در نقطه $x=0$:

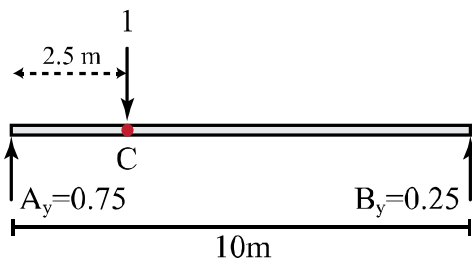
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 10 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 1$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 1 + B_y - 1 = 0 \rightarrow B_y = 0$$

قطعه سمت راست نقطه C را بیرون می‌آوریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow M_C = 0$$

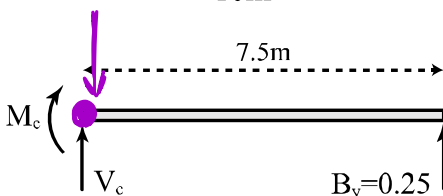
در نقطه $x=2.5$:



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow 1 \times 7.5 - A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0.75$$

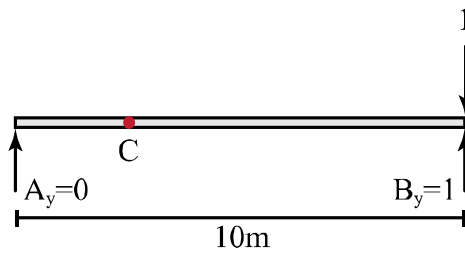
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0.75 + B_y - 1 = 0 \rightarrow B_y = 0.25$$

قطعه سمت راست نقطه C را بیرون می‌آوریم:



$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow -M_C + 0.25 \times 7.5 = 0 \rightarrow M_C = 1.875$$

به همین صورت برای $x=5$ و $x=7.5$ نیز محاسبات را انجام می‌دهیم.

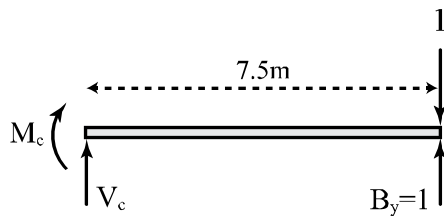


در نقطه $x=10$:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow -A_y \times 10 = 0 \rightarrow A_y = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0 + B_y - 1 = 0 \rightarrow B_y = 1$$

قطعه سمت راست نقطه C را بیرون می آوریم:

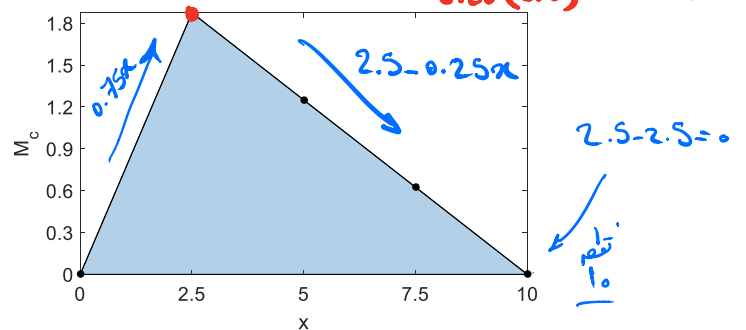


$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow -M_C + 1 \times 7.5 - (1 \times 7.5) = 0 \rightarrow M_C = 0$$

$$0.75 \times 2.5 = 1.875$$

با توجه به مقادیر به دست آمده نمودار خط تأثیر رسم می شود:

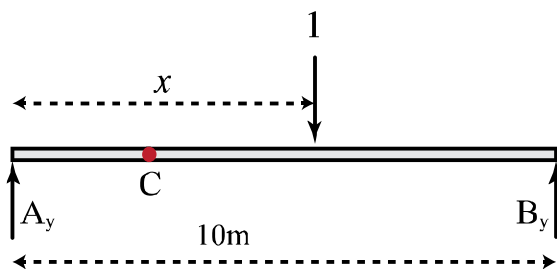
$$2.5 - 0.25(2.5) = 1.875$$



x	Mc
0	0
2.5	1.875
5	1.25
7.5	0.625
10	0

حل - روش معادله خط تأثیر:

بار واحد متحرک را در فاصله x از A قرار می دهیم. باید دو معادله به دست آوریم:



با در نظر گرفتن کل سازه داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow -A_y \times 10 + (1)(10 - x) = 0$$

$$\rightarrow 10A_y = 10 - x \rightarrow A_y = 1 - \frac{1}{10}x$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{10}x$$

$$0 \leq x \leq 2.5\text{m}$$

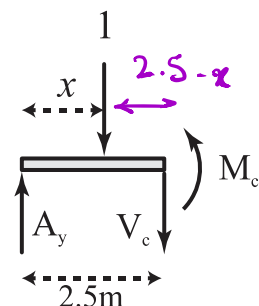
با استفاده از تعادل در قطعه سمت چپ تیر خواهیم

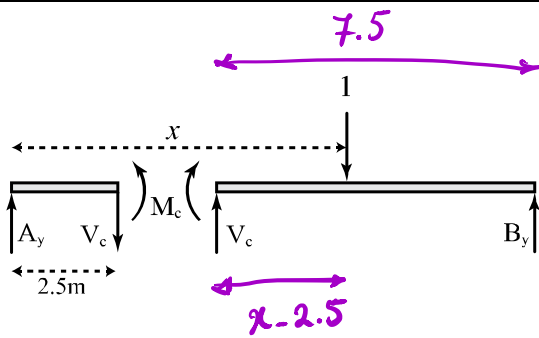
داشت:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow$$

$$M_C + (1)(2.5 - x) - (1 - \frac{1}{10}x) \times 2.5 = 0$$

$$\rightarrow M_C = 0.75x$$





$$2.5m \leq x \leq 10m$$

با استفاده از تعادل در قطعه راست تیر خواهیم داشت:

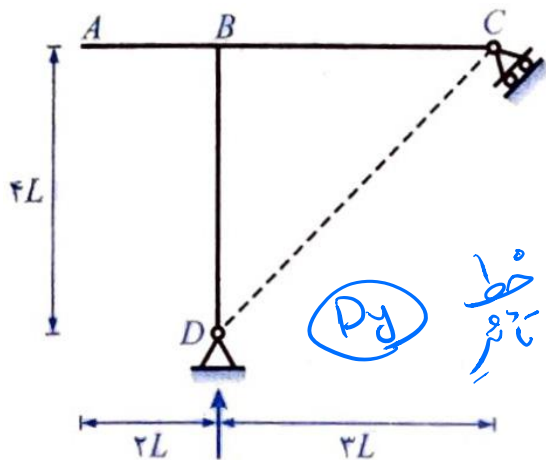
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow -M_C - 1(x - 2.5) + \frac{1}{10}x(7.5) = 0$$

$$\rightarrow M_C = 2.5 - 0.25x$$

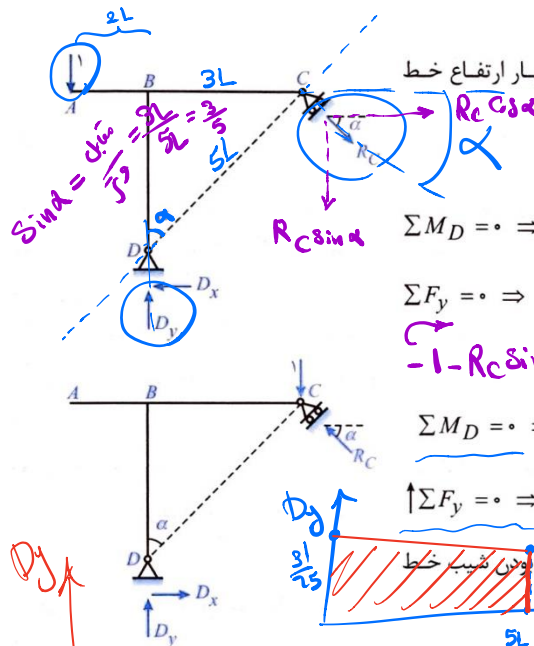
با توجه به معادلات به دست آمده، خطوط تأثیر همانند شکلی که در بالا نشان داده شد رسم می‌شوند.

تمرین ۵:

خط تأثیر عکس‌العمل قائم در تکیه گاه D را رسم کنید.



$$1 \times 2L - R_C \times 5L = 0$$



● حل: برای بررسی این تمرین، کافی است با استفاده از روش اعمال بار ارتفاع خط تأثیر D_y را در نقاط A و C به دست آوریم تا خط تأثیر آن رسم شود.

محاسبه ارتفاع خط تأثیر D_y در نقطه A:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 1 \times 2L = R_C \times 5L \Rightarrow R_C = \frac{2}{5}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y = 1 + R_C \sin \alpha = 1 + \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow D_y = \frac{31}{25}$$

محاسبه ارتفاع خط تأثیر D_y در نقطه C:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 1 \times 3L = R_C \times 5L \Rightarrow R_C = \frac{3}{5}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y = 1 - R_C \sin \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow D_y = \frac{16}{25}$$

پس از محاسبه ارتفاع خط تأثیر در نقاط A و C و با توجه به خطی بودن و ثابت بودن شیب خط تأثیر در قسمت پیوسته ABC، شکل خط تأثیر مطابق شکل مقابل است

تذکره: نیازی به قرار دادن بار واحد در نقطه B نمی‌باشد زیرا قطعه ABC پیوسته است و خط تأثیر روی آن تغییر شیب نمی‌دهد، بنابراین برای رسم خط تأثیر تنها مختصات دو نقطه را باید بدانیم.

۳-۴ خطوط تأثیر برای تیرها

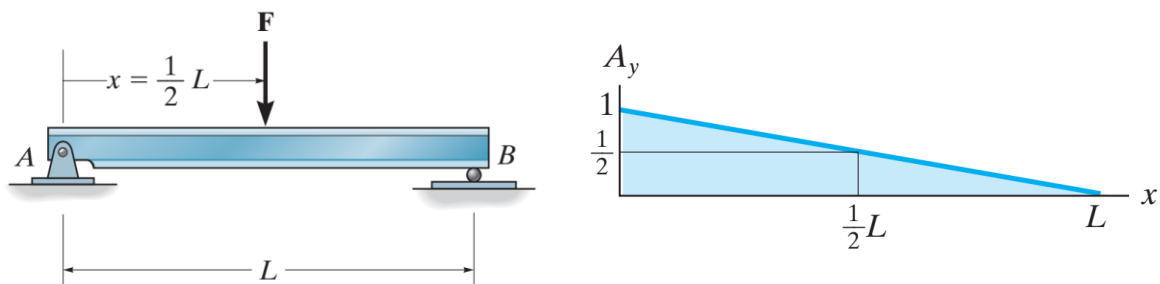
از آنجاکه تیرها و شاه تیرها اعضای باربر اصلی سیستم کف و یا عرشه پل را تشکیل می‌دهند، توانایی رسم خطوط تأثیر برای عکس‌العمل‌ها، برش و یا خمش در هر نقطه خاص از تیر امری مهم می‌باشد.

۱-۳-۴ بارگذاری

زمانی که خط تأثیر برای یک تابع رسم شد، امکان قرار دادن بارهای زنده که سبب به وجود آمدن بیشینه مقدار تابع روی تیر می‌شود را خواهیم داشت. دو نوع بارگذاری موجود بررسی می‌شوند.

۱-۱-۳-۴ نیروی متمرکز

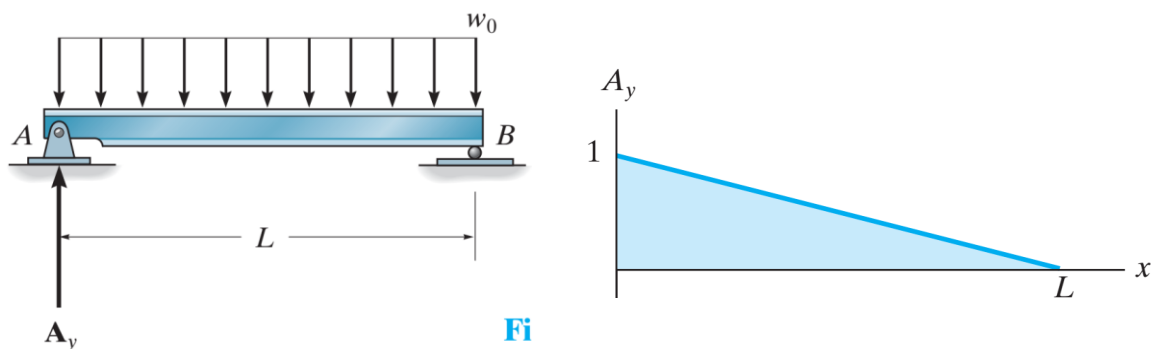
برای مقدار بار متمرکز F که روی تیر در مکان x قرار دارد، مقدار تابع (عکس‌العمل، برش و یا خمش) از ضرب بعد قائم خط تأثیر در بزرگی F به دست می‌آید. مثال:



$$x = \frac{1}{2}L \rightarrow A_y = \frac{1}{2} \times F$$

۲-۱-۳-۴ بار گسترده یکنواخت

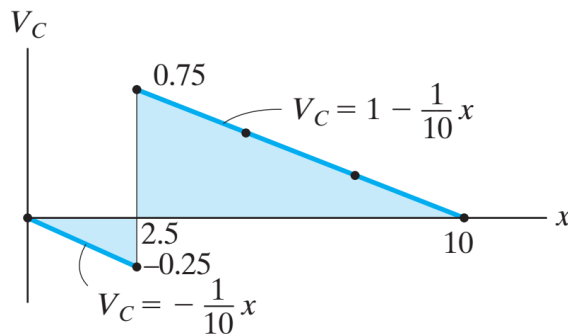
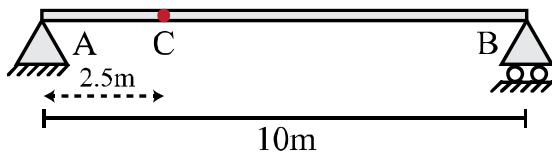
مقدار تابعی که از بار گسترده ناشی می‌شود برابر است با سطح زیر نمودار خط تأثیر در شدت بار گسترده یکنواخت. مثال:



$$A_y = (\text{area}) \times w_0 = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times L \right) \times w_0 = \frac{w_0 L}{2}$$

تمرین ۶:

مطلوب است تعیین بیشینه مثبت برشی که می‌تواند در نقطه C توسط بار متحرک متمرکز ۴۰۰۰ کیلو نیوتن و بار گسترده یکنواخت ۲۰۰۰ کیلو نیوتن بر متر ایجاد شود:



حل:

خط تأثیر برای برش نقطه

C در تمرین ۳ مطابق

شکل رسم شد:

ماکزیمم مثبت برش در C زمانی روی می‌دهد که بار 4000KN در

$x = 2.5^+ \text{ m}$ قرار داشته باشد؛ بنابراین داریم:

بار متمرکز:

$$V_C = 0.75 \times 4000 = 3000 \text{ KN}$$

بار متحرک گسترده یکنواخت زمانی ایجاد ماکزیمم مثبت برش در نقطه C

می‌کند که بار در بازه $x = 2.5^+ \text{ m}$ و $x = 10 \text{ m}$ قرار داشته باشد به دلیل آنکه

در این بازه خط تأثیر مثبت است؛ بنابراین داریم:

بار گسترده یکنواخت:

$$V_C = \left(\frac{1}{2} (10\text{m} - 2.5\text{m}) (0.75) \right) \times 2000 \text{ KN/m} = 5625 \text{ KN}$$

$$(V_C)_{\max} = 3000 \text{ KN} + 5625 \text{ KN} = 8625 \text{ KN}$$

ماکزیمم برش در C:

۴-۴ خط تأثیر کیفی (روش مولر-برسلاو)

در سال ۱۸۸۶ مولر-برسلاو تکنیکی را برای ترسیم سریع خط تأثیر معرفی کرد. اصل مولر-برسلاو بیان می‌کند که خط تأثیر برای یک تابع (عکس‌العمل، برش، خمش) به همان مقیاس تغییر شکل سازه است زمانی که تیر تحت همان تابع قرار گیرد.

۱. جهت رسم خط تأثیر باید قید مورد نظر از تیر حذف شود تا تیر زمان اعمال تابع تغییر شکل دهد.

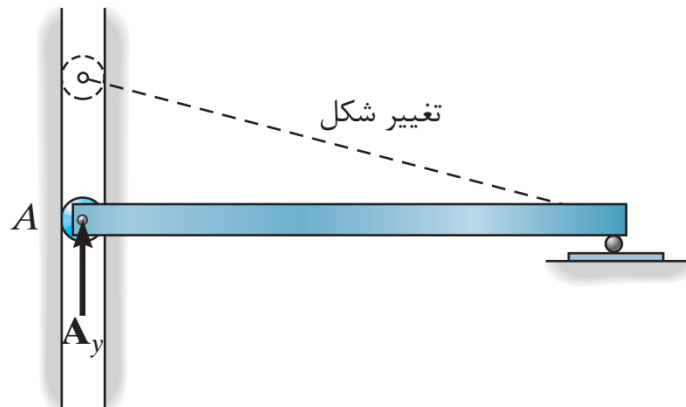
برای مثال در شکل a اگر خط تأثیر عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A خواسته شده باشد، ابتدا قید تکیه‌گاه

در جهت قائم را حذف می‌کنیم (تکیه‌گاه مفصلی به تکیه‌گاه غلتکی تبدیل می‌شود)، حال اگر بار

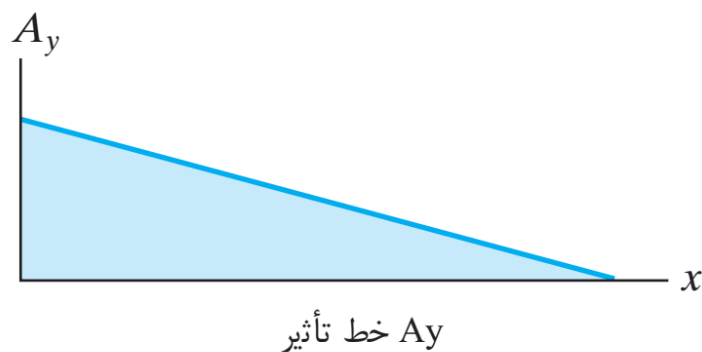
مثبت قائم A_y به نقطه A وارد شود (شکل b)، تیر همانند خط چین تغییر شکل می دهد که نمایانگر خط تأثیر عکس العمل قائم A می باشد (شکل c).



(a)



(b)

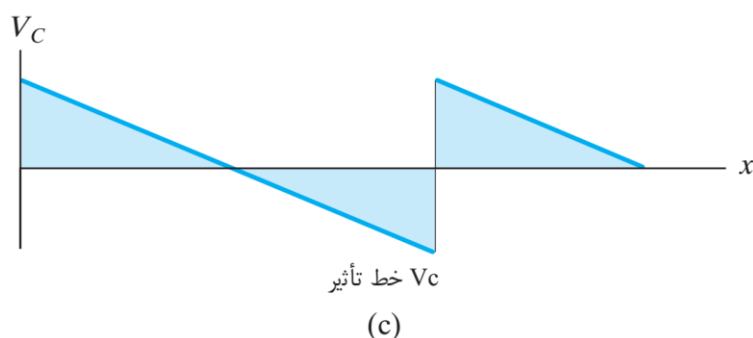
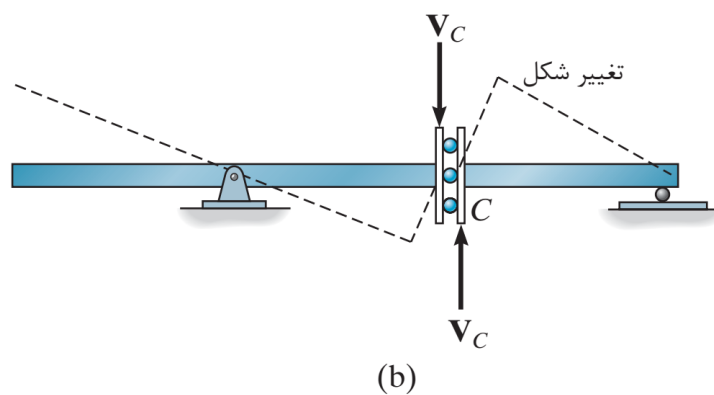


(c)

۲. حال اگر خط تأثیر برای برش در نقطه C در شکل زیر (a) خواسته شده باشد، اتصال نقطه C را می توان به صورت مفصل برشی در نظر گرفت (شکل b) (مفصل برشی، ممان و نیروی محوری را تحمل می کند ولی نیروی برشی را تحمل نمی کند). حال اگر برش مثبت V_C به نقطه C اعمال شود، تیر تغییر شکلی همانند خط چین خواهد داشت. در نتیجه خط تأثیر برش در نقطه C همانند شکل c می باشد:



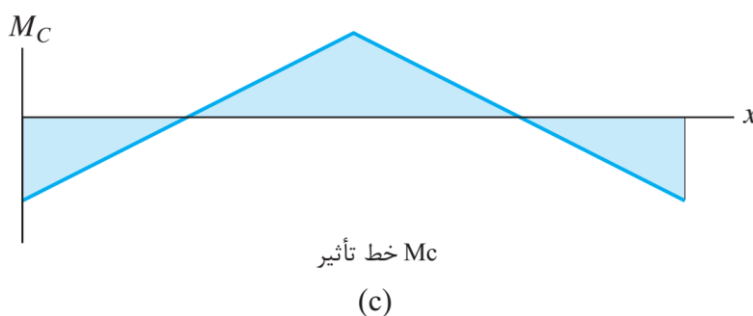
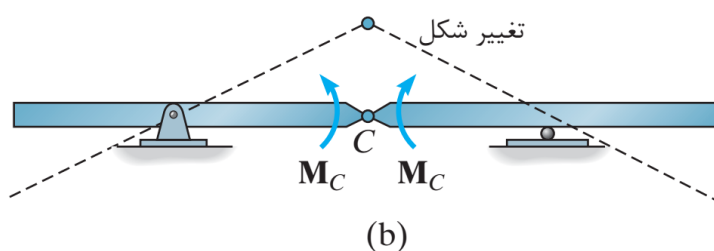
(a)



۳. در آخر اگر خط تأثیر خمش در نقطه C در شکل زیر (a) خواسته شده باشد، اتصال نقطه C را می‌توان به صورت مفصل خمشی در نظر گرفت (شکل b) (مفصل خمشی نیروی محوری و برشی را تحمل می‌کند ولی ممان را تحمل نمی‌کند). حال اگر ممان مثبت M_C به نقطه C اعمال شود، تیر تغییر شکلی همانند خط‌چین خواهد داشت. در نتیجه خط تأثیر خمش در نقطه C همانند شکل c می‌باشد:

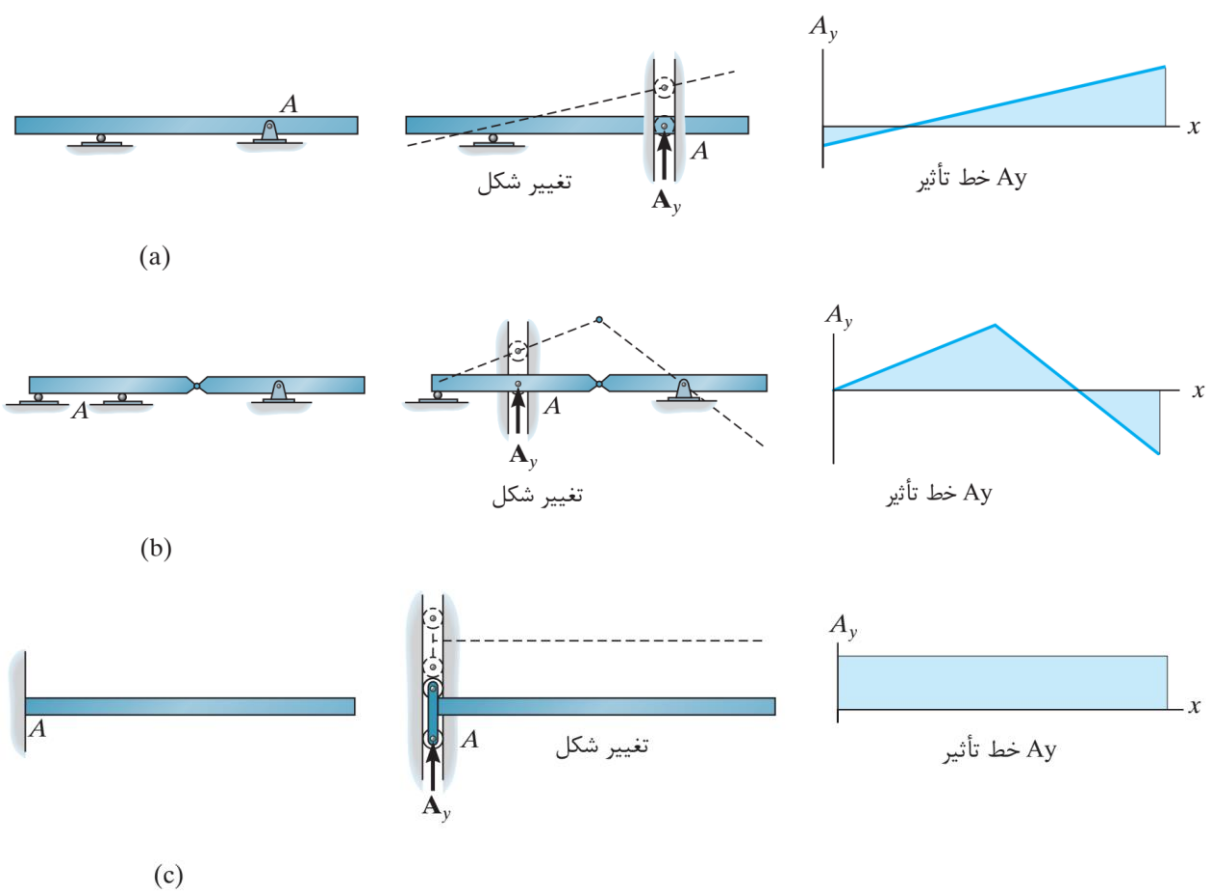


(a)



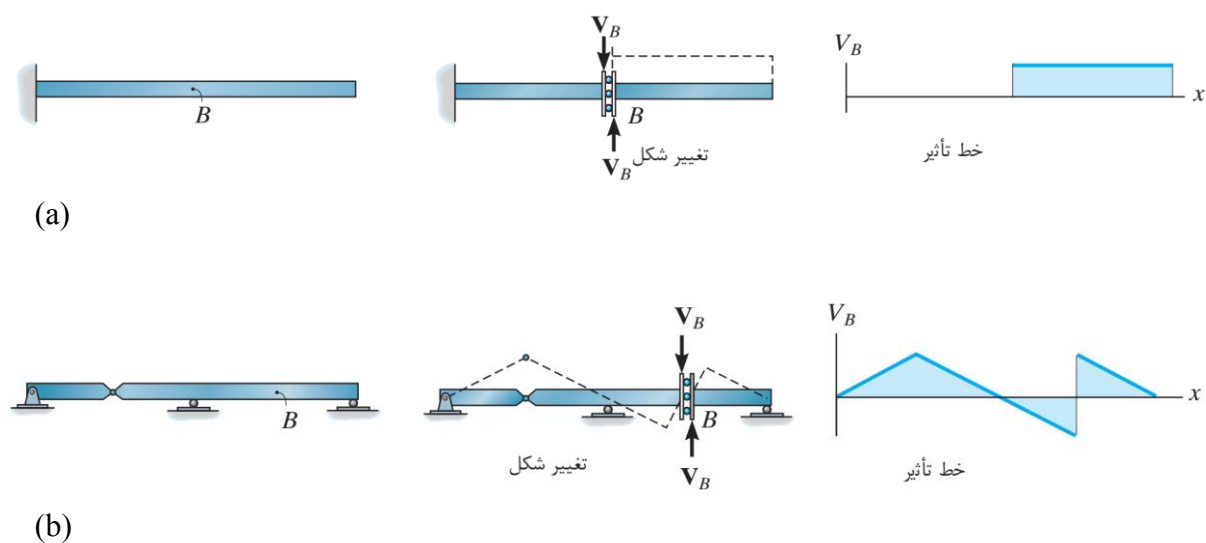
تمرین ۷:

مطلوب است تعیین خط تأثیر عکس‌العمل قائم A در شکل‌های a و b و c:



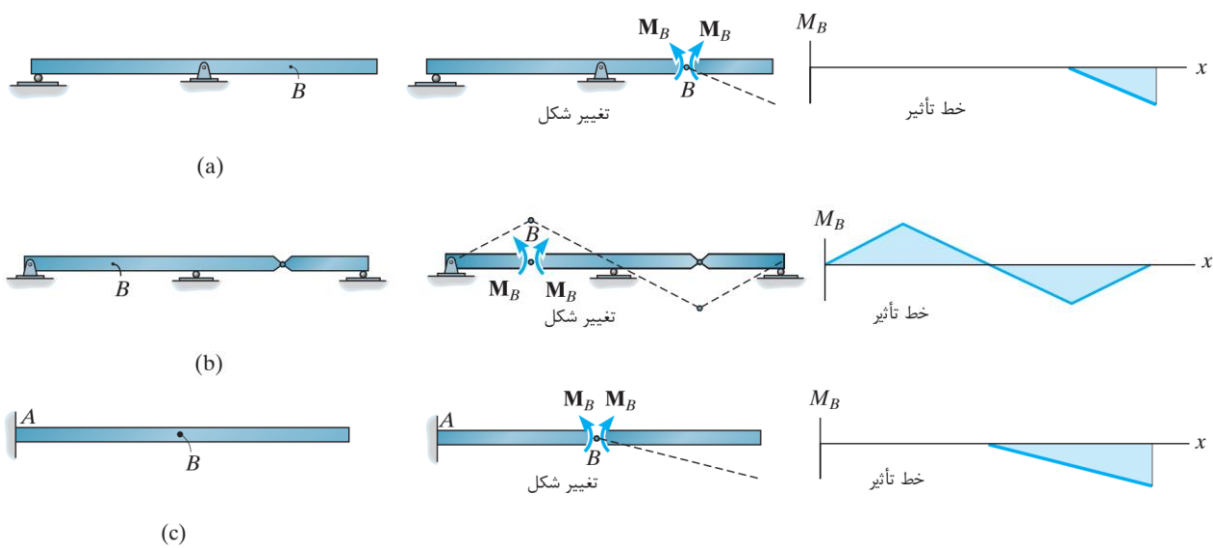
تمرین ۸:

مطلوب است تعیین خط تأثیر برش نقطه B در شکل‌های a و b:



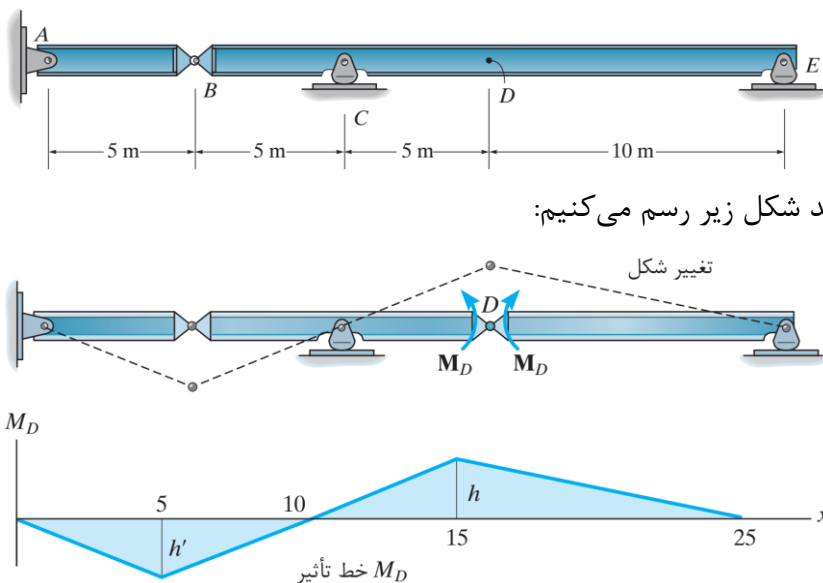
تمرین ۹:

مطلوب است تعیین خط تأثیر خمش نقطه B در شکل‌های a و b و c:



تمرین ۱۰:

بیشینه لنگر مثبت در نقطه D تیر نشان داده شده که تحت اثر بار متمرکز متحرک ۴۰۰۰ کیلو نیوتن و بار گسترده یکنواخت ۳۰۰ کیلو نیوتن بر متر و وزن تیر ۲۰۰ کیلو نیوتن بر متر به وجود می‌آید را تعیین کنید (برای رسم خط تأثیر می‌خواهیم از روش مولر-برسلو یا همان خط تأثیر کیفی استفاده کنیم):



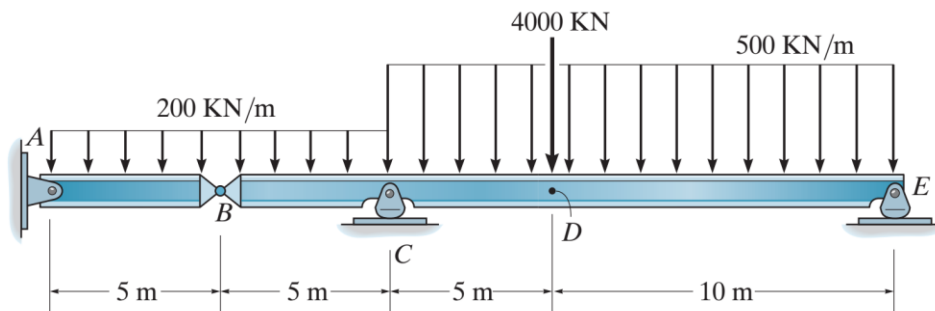
حل: خط تأثیر کیفی را همانند شکل زیر رسم می‌کنیم:

از روی نمودار خط تأثیر می‌توان فهمید که بیشینه لنگر مثبت زمانی اتفاق می‌افتد که بار متمرکز 4000 KN روی نقطه D قرار بگیرد (Max نمودار خط تأثیر). همچنین بار گسترده یکنواخت باید در فاصله C تا E قرار بگیرد تا در ناحیه مثبت نمودار خط تأثیر باشد و

همچنین مساحت بیشتری از زیر نمودار را در بگیرید.

از طرفی وزن تیر بر روی کل طول سازه اثر می کند!

پس بارگذاری توضیح داده شده را بر روی تیر قرار می دهیم:



حال با دانستن نحوه بارگذاری با استفاده از روابط استاتیک می توانیم لنگر بیشینه در D را به دست آوریم:

تبدیل بارهای گسترده به گره ای:

$$200 \times 5 = 1000 \text{ kN}$$

$$500 \times 15 = 7500 \text{ kN}$$

محاسبه عکس العمل تکیه گاهی:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times 5 + 1000 \times 2.5 = 0 \Rightarrow A_y = 500 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1000 - B_y = 0 \Rightarrow B_y = -500 \text{ kN} \Rightarrow B_y = 500 \text{ kN} \uparrow$$

قطعه اول:

$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \Rightarrow$$

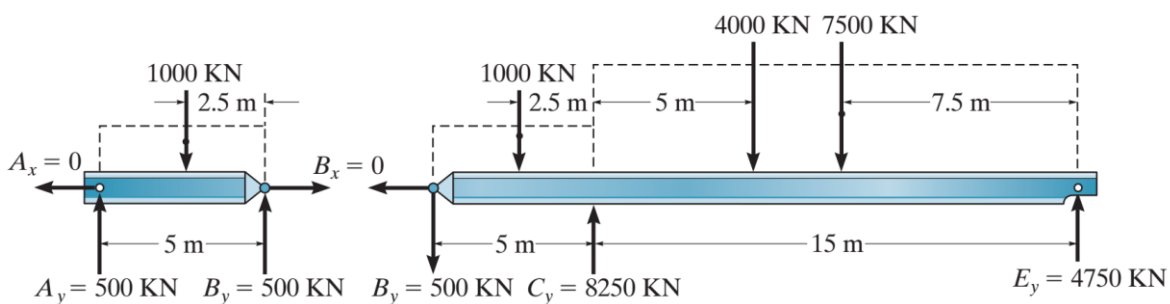
$$(500 \times 20) + \left(1000 \times \left(15 + \frac{5}{2}\right)\right) + (4000 \times 10) + \left(7500 \times \frac{15}{2}\right) - (C_y \times 15) = 0$$

$$\Rightarrow C_y = 8250 \text{ kN} \uparrow$$

قطعه دوم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -500 + 8250 + E_y - 4000 - 1000 - 7500 = 0$$

$$\Rightarrow E_y = 4750 \text{ kN} \uparrow$$

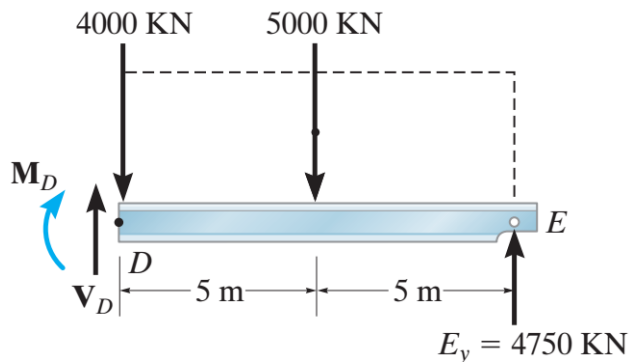


(قطعه اول)

(قطعه دوم)

حال با به دست آمدن عکس العمل های تکیه گاهی تحت بارهای مشخص شده می توانیم لنگر در نقطه D را به

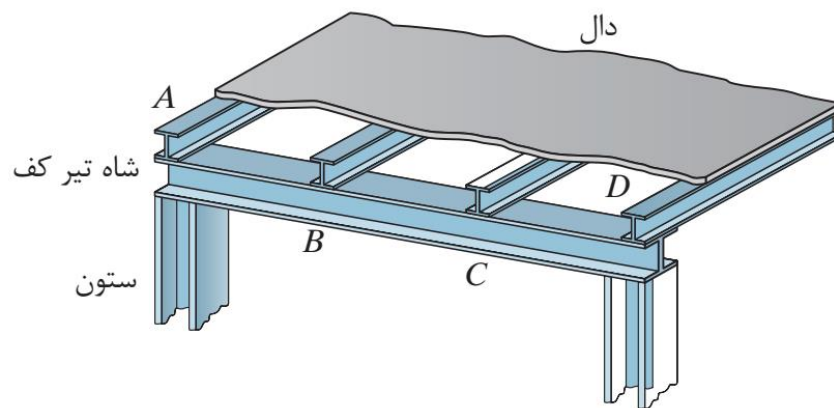
دست آوریم:



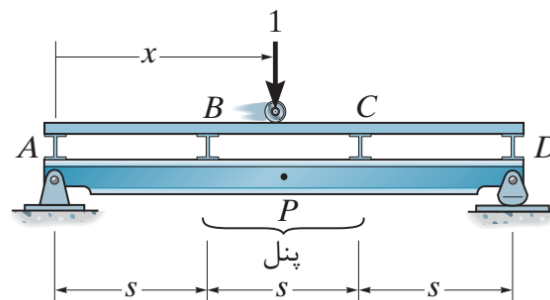
$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \sum M_D &= 0 \Rightarrow \\
 (4750 \times 10) - (5000 \times 5) - M_D &= 0 \\
 \Rightarrow M_D &= 22500 \text{ KN.m} = 22.5 \text{ Ton.m}
 \end{aligned}$$

۴-۵ خط تأثیر برای تیرهای اصلی (شاه تیرها)

در بعضی موارد سیستم کف ساختمان همانند شکل زیر به نحوی ساخته می‌شوند که بارهای کف از طریق دال به تیرهای کف و سپس به شاه تیرهای کناری و در آخر به ستون‌ها منتقل می‌شوند.

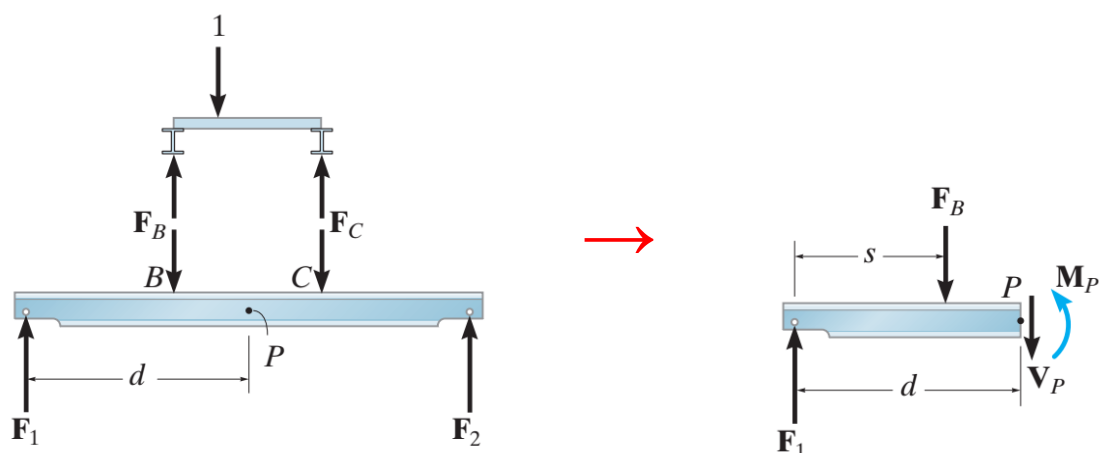


نوع ایده آل سازی شده دو بعدی این سیستم در شکل زیر نشان داده شده است:



از آنجاکه تیرهای اصلی (شاه تیرها) اعضای باربر اصلی در سیستم می‌باشند، نیاز به ترسیم نمودار خط تأثیر برش و خمش آن‌ها داریم، به خصوص زمانی که با ساختمان‌های صنعتی تحت بارهای متمرکز سنگین روبرو هستیم.

توجه داشته باشید که بار واحد روی دال کف تنها در نقاطی به تیر اصلی منتقل می‌شود که با تیر اصلی در تماس است. برای مثال نقاط A و B و C و D که این نقاط را نقاط پانل و فضای بین این نقاط مانند BC را پانل نام‌گذاری می‌کنیم.

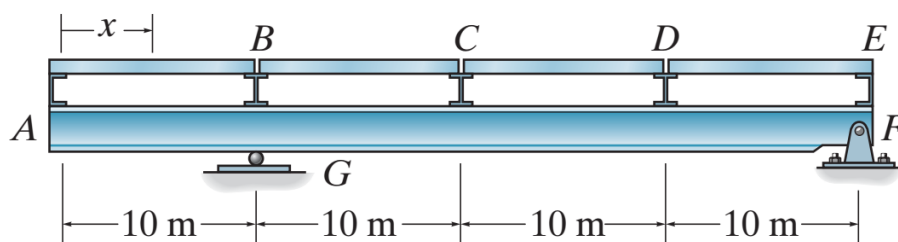


نمونه‌ای از سیستم کف یک انبار که بارها به تیرها و شاه تیرها منتقل می‌شود:



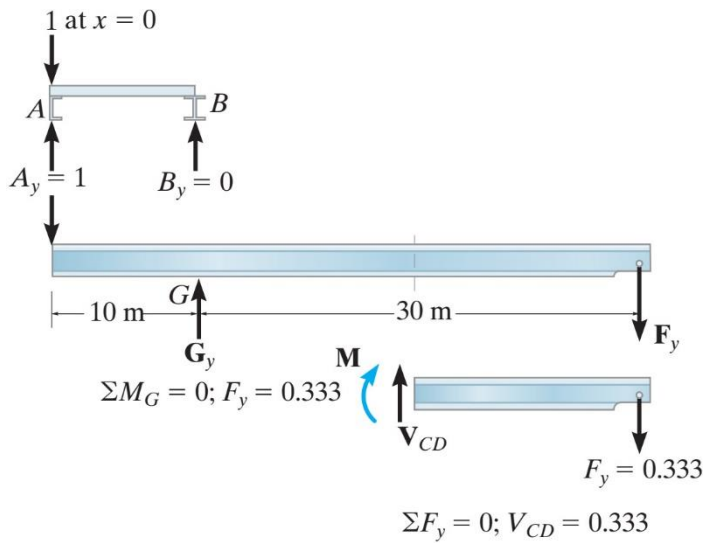
تمرین ۱۱:

نمودار خط تأثیر برش را برای پانل CD از شاه تیر نشان داده شده را رسم نمایید:



حل:

بار واحد روی دال در نقاط پانلی A, B, C, D, E قرار می‌گیرد، برای نمونه سازه را برای دو حالتی که بار روی A و C قرار گیرد نشان می‌دهیم و بقیه حالت‌ها را به صورت خلاصه بررسی می‌کنیم:

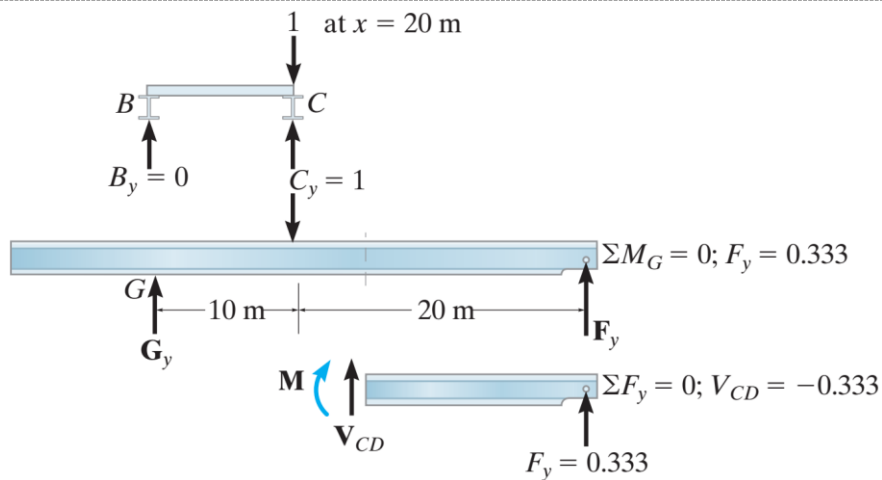


در نقطه $x=0$:

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow 1 \times 10 - A_y \times 10 \Rightarrow A_y = 1 \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow 1 - 1 + B_y \Rightarrow B_y = 0 \\
 + \circlearrowleft \Sigma M_G = 0 &\Rightarrow 1 \times 10 + F_y \times 30 = 0 \Rightarrow F_y = -\frac{1}{3} \Rightarrow F_y = 0.333 \downarrow \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow V_{CD} - 0.333 = 0 \Rightarrow V_{CD} = 0.333
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \Sigma M_A = 0 &\Rightarrow -1 \times 10 + B_y \times 10 \Rightarrow B_y = 1 \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow A_y = 0 \\
 + \circlearrowleft \Sigma M_G = 0 &\Rightarrow F_y = 0 \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow V_{CD} = 0
 \end{aligned}$$

در نقطه $x=10$:



در نقطه $x=20$:

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow C_y = 1 \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow B_y = 0 \\
 + \circlearrowleft \Sigma M_G = 0 &\Rightarrow -1 \times 10 + F_y \times 30 = 0 \Rightarrow F_y = \frac{1}{3} \Rightarrow F_y = 0.333 \uparrow \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow V_{CD} + 0.333 = 0 \Rightarrow V_{CD} = -0.333
 \end{aligned}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow D_y = 1$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \Rightarrow -1 \times 20 + F_y \times 30 = 0 \Rightarrow F_y = \frac{2}{3} \Rightarrow F_y = 0.6667 \uparrow \quad \text{در نقطه } x=30$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD} + \frac{2}{3} - 1 = 0 \Rightarrow V_{CD} = 0.333$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow E_y = 1$$

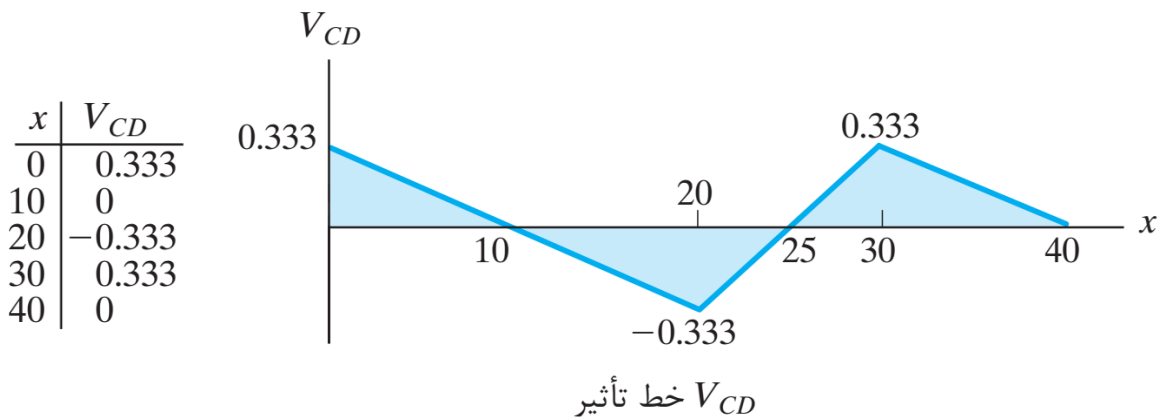
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow D_y = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \Rightarrow F_y = 1 \uparrow$$

در نقطه $x=40$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD} + 1 - 1 = 0 \Rightarrow V_{CD} = 0$$

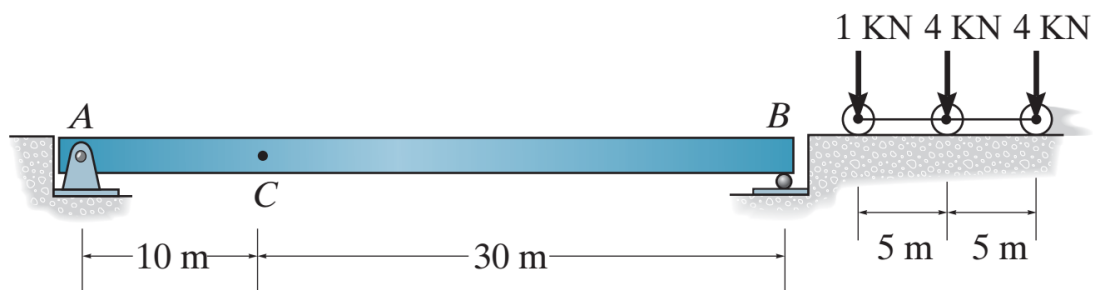
با توجه به مقادیر به دست آمده نمودار خط تأثیر رسم می شود:



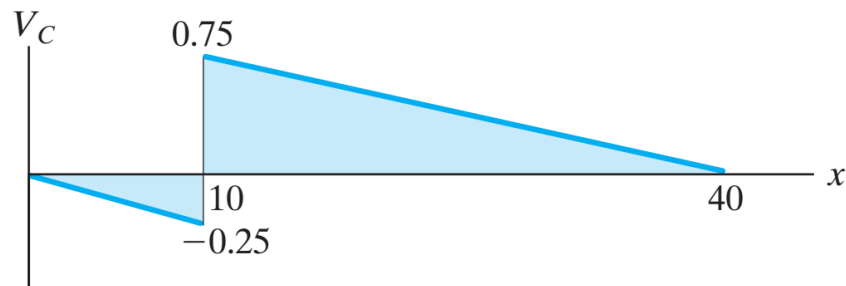
۶-۴ بیشینه خط تأثیر در یک نقطه تحت اثر حرکت چند بار متمرکز

در بعضی مواقع چند بار متمرکز روی سازه قرار می گیرد، همانند عبور چرخ های یک کامیون یا قطار. برای تعیین حداکثر تأثیر در این حالت یا باید از روش صحیح خطا استفاده کنیم و یا روش تغییرات تابع مورد نظر.

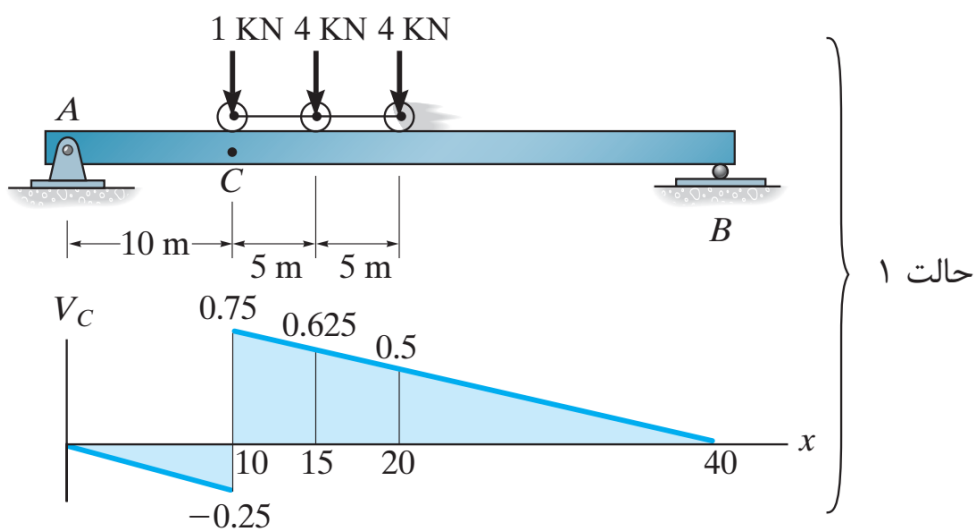
به عنوان مثال در تیر دو سر مفصل زیر می خواهیم حداکثر برش در نقطه C تحت اثر حرکت چند بار متمرکز را به دست آوریم:



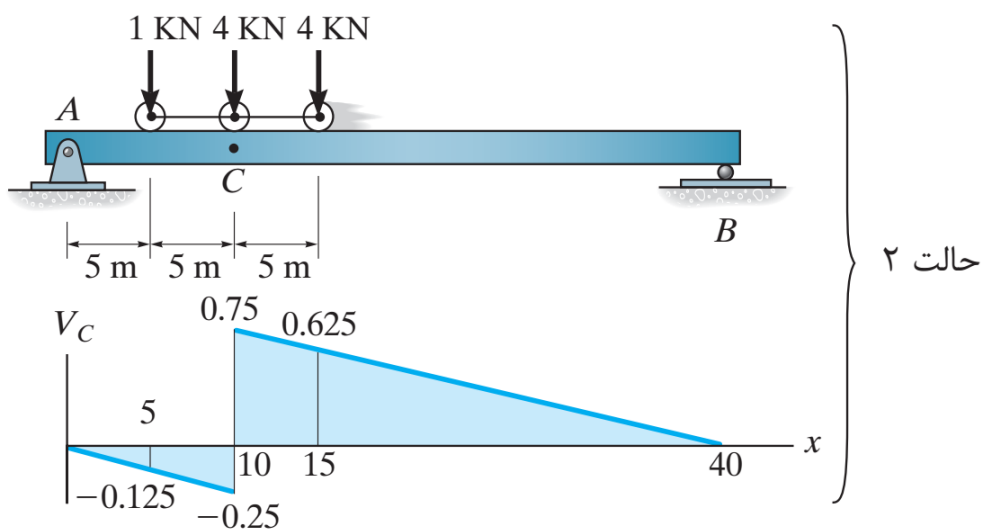
نمودار خط تأثیر برش در نقطه C تیر بالا در تمرین‌های گذشته به دست آمد که به شکل زیر است:



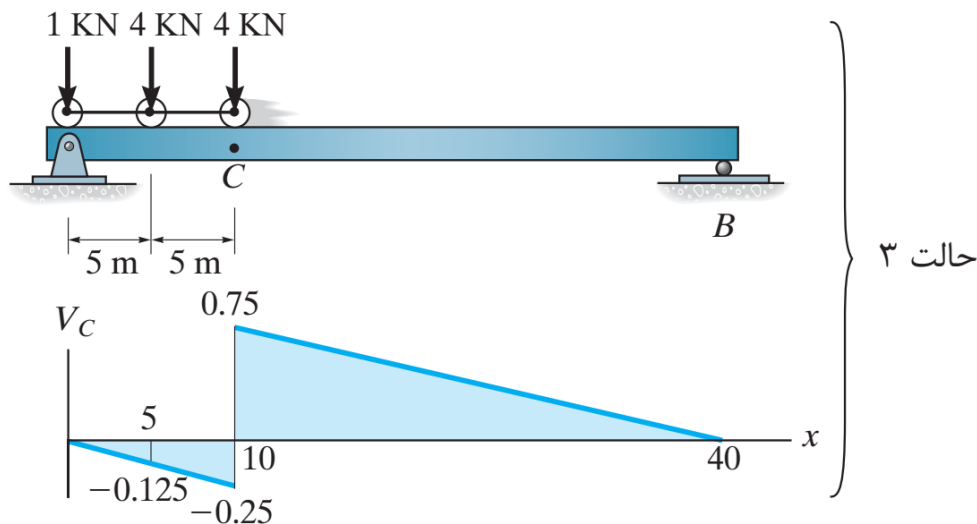
حداکثر برش زمانی می‌تواند روی دهد که بارگذاری سمت راست نقطه C باشد. پس حالت ۳ زیر می‌تواند روی دهد:



$$(V_C)_1 = 1(0.75) + 4(0.625) + 4(0.5) = 5.25 \text{ kN}$$



$$(V_C)_2 = 1(-0.125) + 4(0.75) + 4(0.625) = 5.375 \text{ kN}$$



$$(V_C)_3 = 1(0) + 4(-0.125) + 4(0.75) = 2.5 \text{ kN}$$

همان طور که مشاهده می شود حالت ۲ بیشینه برش در نقطه C را تولید می کند.

۴-۶-۱ تغییرات تابع - برش

حال اگر تعداد بارهای متمرکز زیاد باشد، استفاده از روش صحیح خطا بسیار طولانی و خسته کننده است. در این صورت می توان محل بحرانی بارگذاری را از تغییرات برش ΔV که با حرکت از حالت ۱ به ۲ و سپس از حالت ۲ به ۳ روی می دهد، به دست آورد. تا زمانی که ΔV مثبت است، بارگذاری جدید برش بیشتری را نسبت به بارگذاری قبل تولید می کند. زمانی که ΔV منفی شود، نشان می دهد که بارگذاری قبل برش بیشتری را تولید می کند.

تغییرات برش ΔV برای بار P که از محل x_1 به x_2 بر روی تیر حرکت می کند از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta V = P \times s \times (x_2 - x_1)$$

در رابطه بالا s شیب نمودار خط تأثیر در فاصله x_1 تا x_2 می باشد.

اگر بار از نقطه ای رد شود که در نمودار خط تأثیر ناپیوستگی یا به عبارتی پرش وجود داشته باشد، در این صورت تغییرات برش از رابطه زیر قابل محاسبه می باشد:

$$\Delta V = P \times (y_2 - y_1)$$

با توجه به روابط فوق برای تیر دو سر مفصل ذکر شده با استفاده از روش تغییرات تابع خواهیم داشت:

$$\Delta V_{1-2} = 1(-0.25 - 0.75) + (1 + 4 + 4)\left(\frac{0.75}{40 - 10}\right)(5) = +0.125 \text{ kN}$$

از آنجاکه مقدار ΔV_{1-2} مثبت است در نتیجه می توان فهمید که بارگذاری ۲ برش بیشتری نسبت به ۱ ایجاد می کند. پس سراغ حرکت از حالت ۲ به ۳ می رویم:

$$\Delta V_{2-3} = 4(-0.25 - 0.75) + (1 + 4 + 4)\left(\frac{0.75}{40 - 10}\right)(5) = -2.875 \text{ KN}$$

از آنجاکه مقدار ΔV_{2-3} منفی است در نتیجه می‌توان فهمید که حالت ۳ برش کمتری نسبت به ۲ ایجاد می‌کند؛ بنابراین در حالت ۲ بیشترین مقدار برش را خواهیم داشت.

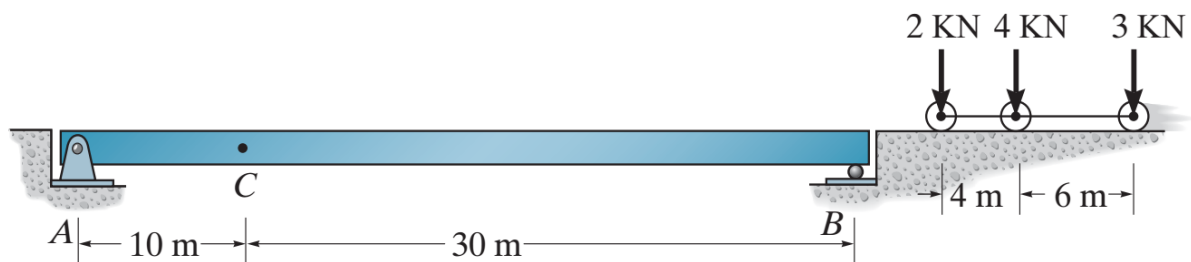
$$(V_C)_2 = 1(-0.125) + 4(0.75) + 4(0.625) = 5.375 \text{ KN}$$

۴-۶-۲ تغییرات تابع - ممان

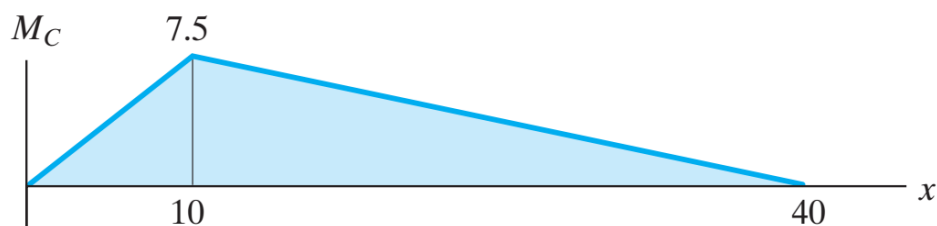
حال اگر نحوه قرارگیری چند بار متمرکز متحرک که بیشینه لنگر را در یک نقطه مشخص از سازه ایجاد می‌کنند مد نظرمان باشد، پس از رسم خط تأثیر لنگر در آن نقطه، همانند روش ذکر شده بالا از رابطه زیر می‌توانیم تغییرات لنگر را محاسبه کنیم:

$$\Delta M = P \times s \times (x_2 - x_1)$$

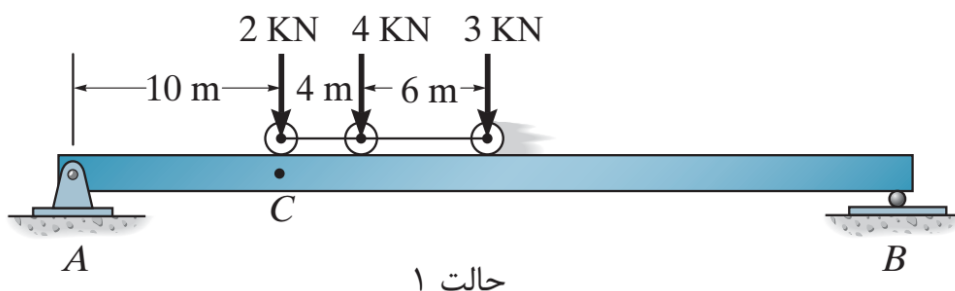
به‌عنوان مثال در تیر دو مفصل زیر می‌خواهیم حداکثر لنگر در نقطه C تحت اثر حرکت چند بار متمرکز را به دست آوریم:



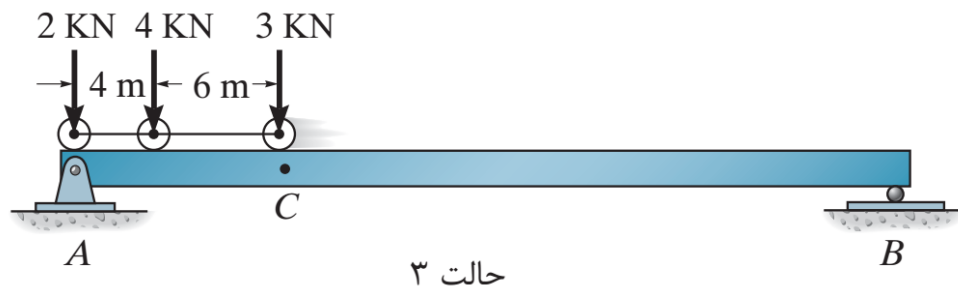
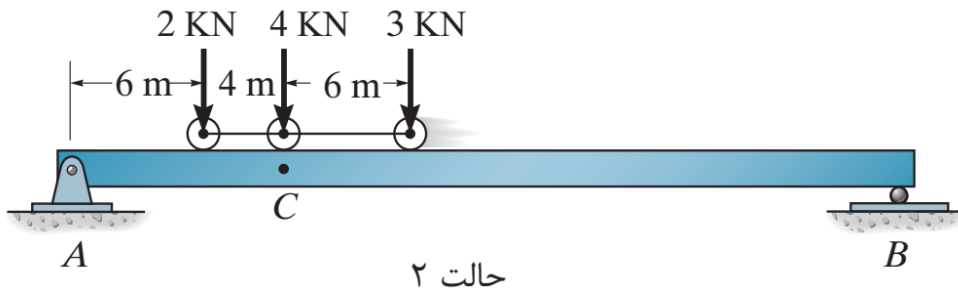
نمودار خط تأثیر لنگر در نقطه C تیر بالا در تمرین‌های گذشته به دست آمد که به شکل زیر است:



حداکثر لنگر زمانی می‌تواند روی دهد که بارگذاری سمت راست نقطه C باشد. پس حالت ۳ زیر می‌تواند روی دهد:



حالت ۱



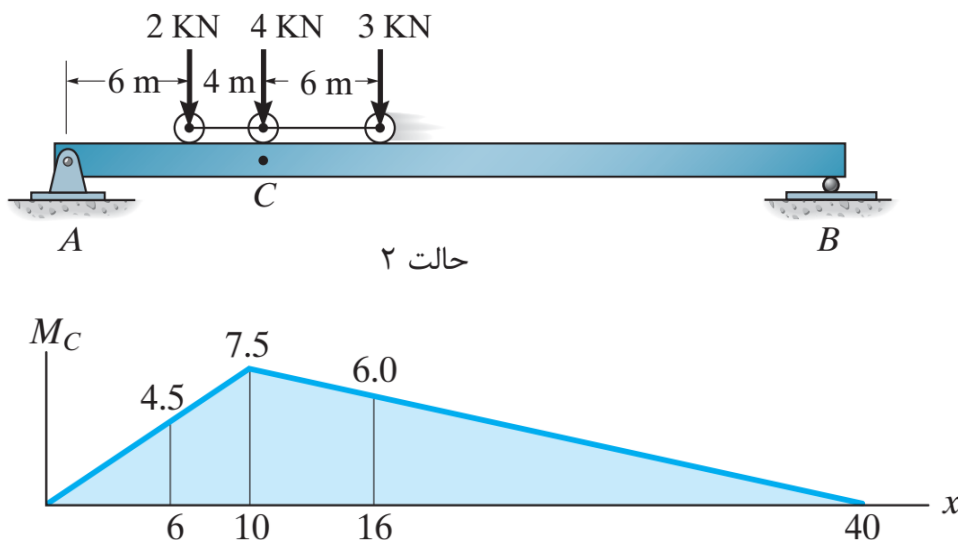
حال بارگذاری را از حالت ۱ به طول ۴ متر ادامه می‌دهیم تا به حالت ۲ برسیم پس خواهیم داشت:

$$\Delta M_{1-2} = 2\left(-\frac{7.5}{10}\right)(4) + (4+3)\left(\frac{7.5}{40-10}\right)(4) = +1\text{KN.m}$$

از آنجاکه ΔM_{1-2} مثبت است به سراغ بارگذاری حالت ۲ به طول ۶ متر تا حالت ۳ می‌رویم:

$$\Delta M_{2-3} = (2+4)\left(-\frac{7.5}{10}\right)(6) + (3)\left(\frac{7.5}{40-10}\right)(6) = -22.5\text{KN.m}$$

از آنجاکه مقدار به دست آمده منفی است می‌توان فهمید که بیشترین لنگر زمانی روی می‌دهد که بارگذاری در حالت ۲ باشد.

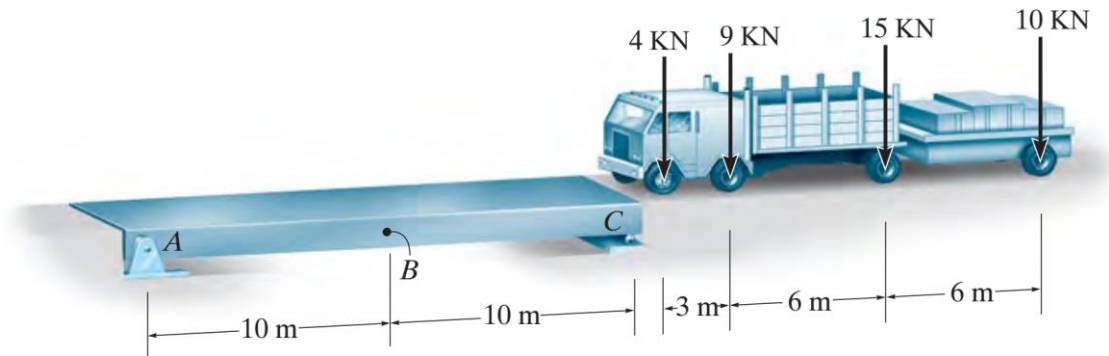


پس بیشینه لنگر برابر است با:

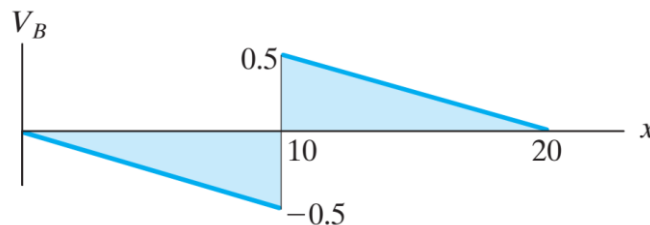
$$(M_C)_2 = 2(4.5) + 4(7.5) + 3(6) = 57\text{KN.m}$$

تمرین ۱۲:

حداکثر مثبت برش در نقطه B از تیر شکل زیر که از حرکت چرخ‌های کامیون به وجود می‌آید را محاسبه نمایید:



نمودار خط تأثیر برش در نقطه B به شکل زیر می‌باشد:



حرکت ۳ متری بار ۴ کیلو نیوتنی:

$$\Delta V_B = 4(-0.5 - 0.5) + (4 + 9 + 15)\left(\frac{0.5}{10}\right)(3) = +0.2 \text{ kN}$$

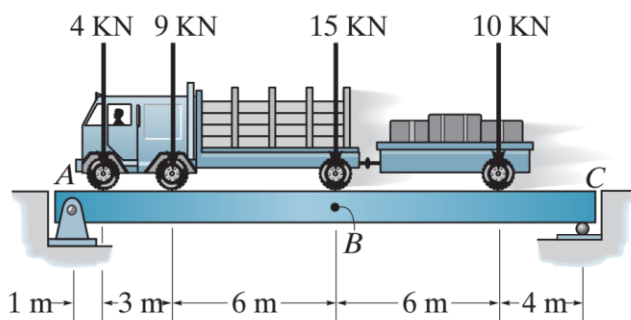
حرکت ۶ متری بار ۹ کیلو نیوتنی:

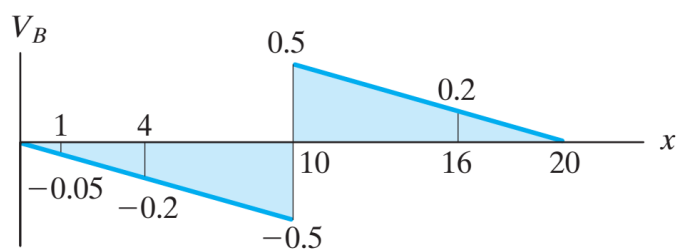
$$\Delta V_B = 9(-0.5 - 0.5) + (4 + 9 + 15)\left(\frac{0.5}{10}\right)(6) + 10\left(\frac{0.5}{10}\right)(4) = +1.4 \text{ kN}$$

حرکت ۶ متری بار ۱۵ کیلو نیوتنی:

$$\Delta V_B = 15(-0.5 - 0.5) + (4)\left(\frac{0.5}{10}\right)(1) + 9\left(\frac{0.5}{10}\right)(4) + (15 + 10)\left(\frac{0.5}{10}\right)(6) = -5.5 \text{ kN}$$

از آنجاکه پاسخ منفی شد در نتیجه حداکثر مثبت برش زمانی اتفاق می‌افتد که بار ۱۵ کیلو نیوتنی سمت راست نقطه B قرار داشته باشد.





در نتیجه:

$$(V_B)_{MAX} = 4(-0.05) + 9(-0.2) + 15(0.5) + 10(0.2) = 7.5 \text{KN}$$