

فصل ششم: سازه‌های نامعین

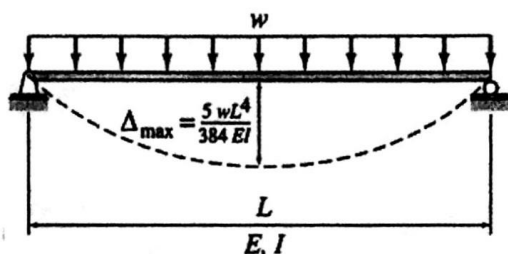
۱-۶ مقدمه

در این فصل به تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی می‌پردازیم. ابتدا به بررسی مزایا و معایب سازه‌های نامعین پرداخته می‌شود.

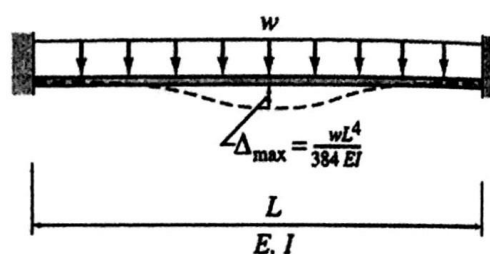
مزایای سازه‌های نامعین استاتیکی نسبت به سازه‌های معین استاتیکی عبارت‌اند از:

۱. تنش‌های کوچک‌تر

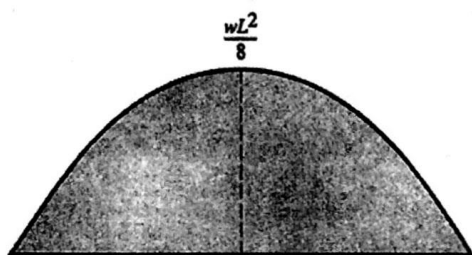
۲. سختی بزرگ‌تر



تیر معین استاتیکی

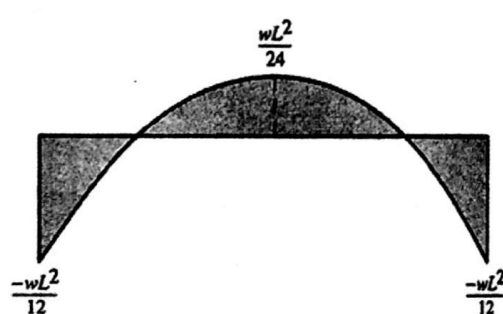


تیر نامعین استاتیکی



نمودار گشتاور خمشی

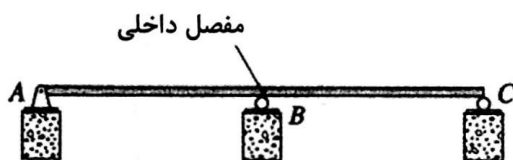
(الف)



نمودار گشتاور خمشی

(ب)

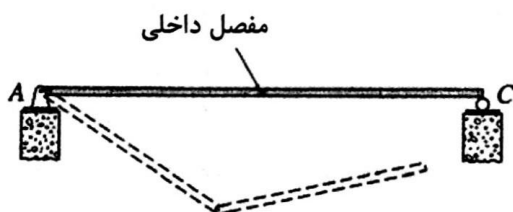
۳. مجهول‌های اضافی



تیر معین استاتیکی

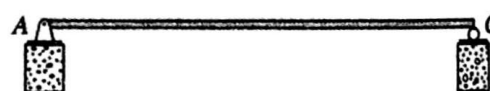


تیر نامعین استاتیکی



ناپایدار استاتیکی

(الف)

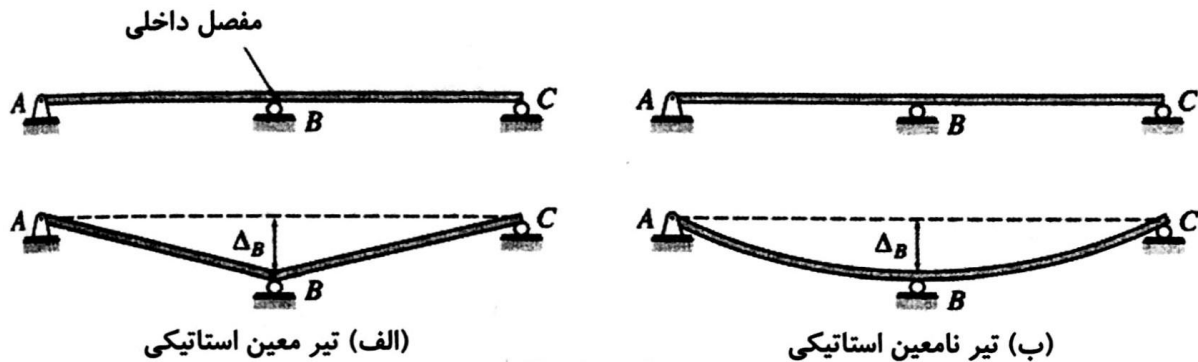


پایدار استاتیکی

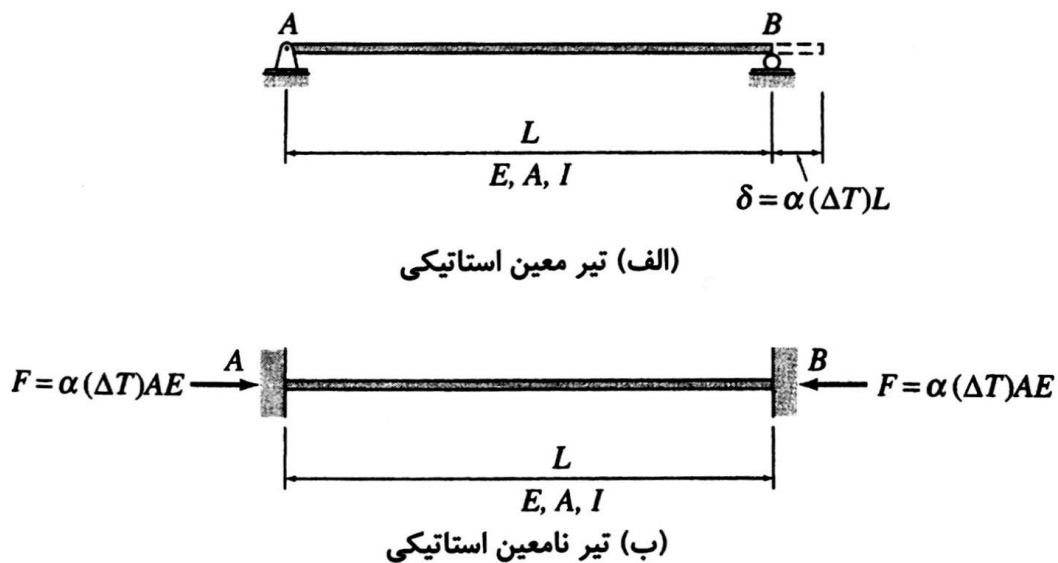
(ب)

معایب سازه‌های نامعین استاتیکی نسبت به سازه‌های معین استاتیکی عبارت‌اند از:

۱. تنش‌های ناشی از نشست‌های تکیه گاهی



۲. تنش‌های ناشی از تغییر دما و خطاهای ساخت



۲-۶ تحلیل سازه‌های نامعین

تحلیل سازه‌ها نیازمند استفاده از سه نوع رابطه پایه‌ای است:

معادلات تعادل، شرایط سازگاری و روابط نیروی عضو - تغییر شکل.

در تحلیل سازه‌های نامعین، از معادلات تعادل باید در پیوند با شرایط سازگاری بر اساس هندسه تغییر شکل سازه استفاده کرد. ارتباط میان تعادل و شرایط سازگاری از طریق روابط نیروی عضو - تغییر شکل سازه برقرار می‌شود.

روش‌های تحلیل سازه‌های نامعین را می‌توان به دو گروه دسته بندی کرد:

۱. روش‌های نیرو (نرمی)

۲. روش‌های تغییر مکان (سختی).

در این فصل هدف معرفی روش‌های نیرو یا نرمی می‌باشد.

۳-۶ روش سازگاری تغییر شکل‌ها

این روش نیازمند حذف قیدهای کافی از سازه نامعین جهت تبدیل آن به سازه معین استاتیکی است. این سازه معین را سازه اولیه می‌نامند و آن واکنش‌های تکیه گاهی یا نیروهای داخلی مربوط به قیدهای اضافی حذف شده سازه نامعین، مجهول‌های اضافی نامیده می‌شوند.

سپس با وارد کردن این مجهول‌های اضافی به‌عنوان بار مجهول بر روی سازه اولیه، مقدار آن‌ها با حل معادلات سازگاری بر اساس این شرط تعیین می‌شود که تغییر شکل‌های سازه اولیه در مکان (و در جهت) مجهول‌های اضافی در نتیجه اثر مرکب بارگذاری خارجی مفروض و مجهول‌های اضافی باید با تغییر شکل‌های معلوم سازه نامعین اصلی در نقاط متناظر برابر باشند.

پس از تعیین شدن مجهول‌های اضافی، دیگر پاسخ‌های سازه نامعین را می‌توان با در نظر گرفتن تعادل یا برهم نهی پاسخ‌های سازه اولیه در اثر بارگذاری خارجی و هر یک از مجهول‌های اضافی به دست آورد.

۱-۳-۶ سازه‌های با یک درجه نامعینی

تمرین ۱:

واکنش‌های تکیه گاهی تیر نشان داده شده در شکل الف را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید.

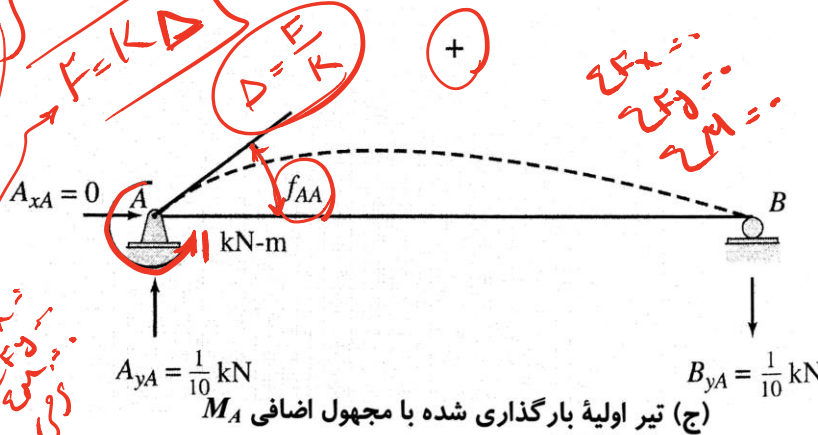
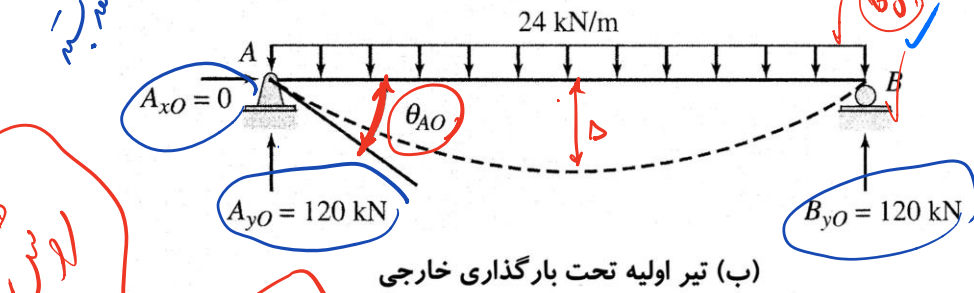
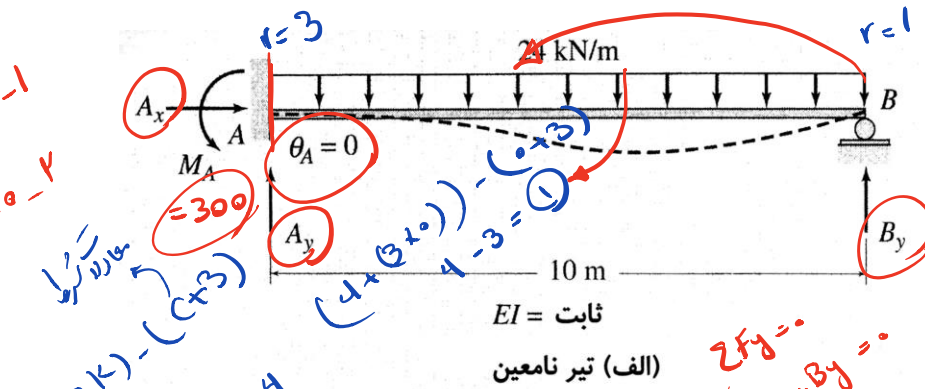
حل:

درجه نامعینی = ۱

تیر اولیه: گشتاور M_A واکنش تکیه گاهی A را به‌عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌کنیم. جهت M_A را پادساعت‌گرد در نظر می‌گیریم (شکل الف). برای به دست آوردن تیر اولیه، قید مانع چرخش انتهای A از تیر را با جایگزین کردن تکیه گاه مفصلی به‌جای تکیه گاه گیردار حذف می‌کنیم (شکل ب). سپس تیر ساده اولیه را به‌صورت جداگانه تحت بارگذاری خارجی و مقدار واحد مجهول اضافی M_A قرار می‌دهیم که به ترتیب در شکل‌های ب و ج نشان داده شده‌اند. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، θ_{AO} نشانگر شیب در گره A تحت اثر بار خارجی و f_{AA} یعنی ضریب نرمی (انعطاف پذیری) نشانگر شیب تیر در نقطه A در اثر مقدار واحد مجهول اضافی M_A است.

تحلیل سازه ها ۱

تحلیل سازه ها ۱



معادله سازگاری: با مساوی قرار دادن جمع جبری شیب‌های تیر اولیه در نقطه A در اثر بارگذاری خارجی و مجهول اضافی M_A با شیب تیر نامعین واقعی در محل تکیه گاه گیردار که خود صفر است، معادله سازگاری به دست می‌آید:

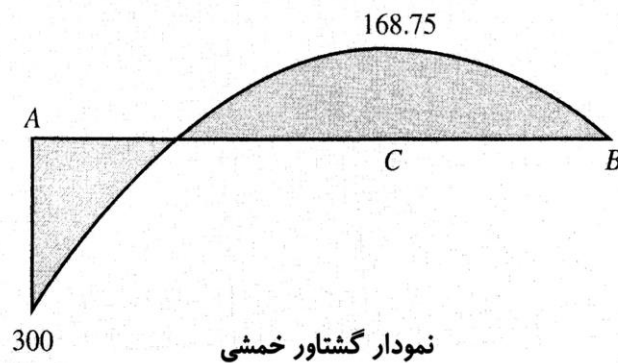
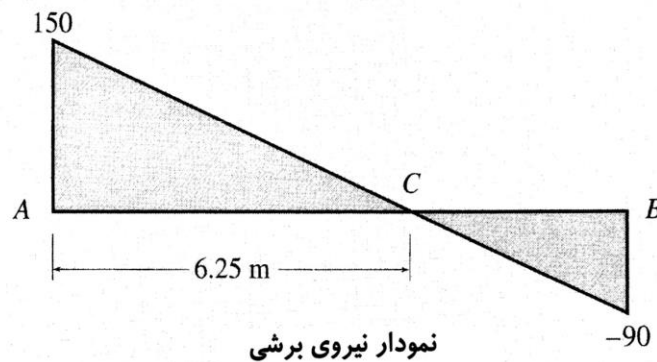
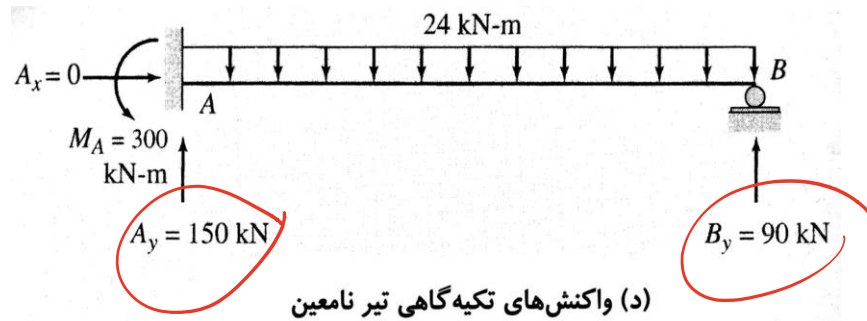
$$\theta_{AO} + f_{AA}(M_A) = 0$$

شیب تیر اولیه: با استفاده از روابط تغییر شکل تیرها (کلیه روش‌های معرفی شده فصل قبل و جدول انتهایی فصل قبل) داریم:

$$\theta_{AO} = -\frac{1000 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

$$f_{AA} = \frac{3.33 \text{ kN.m}^2/\text{kN.m}}{EI}$$

$$-\frac{ML}{3EI} = -\frac{-1 \times 10}{3EI} = \frac{3.33}{EI}$$



(ه) نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر نامعین

مقدار مجهول اضافی: با جایگزین کردن مقادیر بالا در معادله سازگاری نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1000}{EI} + \left(\frac{3.33}{EI}\right)M_A = 0 \Rightarrow \underline{M_A = 300 \text{ kN.m} \odot}$$

واکنش‌های تکیه‌گاهی: برای تعیین دیگر واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر نامعین، از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم (شکل د):

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad \checkmark$$

$$+ \odot \sum M_B = 0 \Rightarrow 300 - A_y(10) + 24(10)(5) = 0 \Rightarrow A_y = 150 \text{ kN} \uparrow \quad \checkmark$$

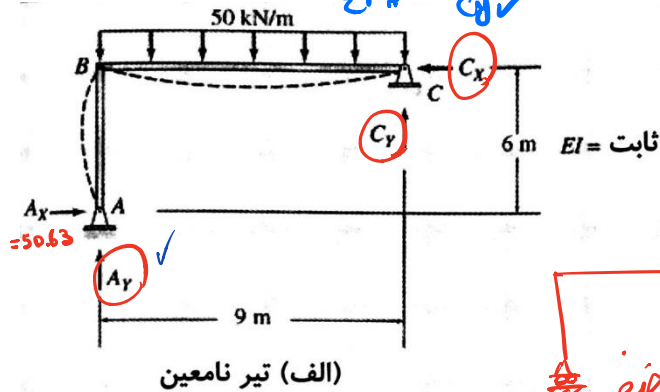
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 150 - 240(10) + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 90 \text{ kN} \uparrow \quad \checkmark$$

نمودارهای نیروی برشی و خمشی نیز در شکل ه نشان داده شده است.

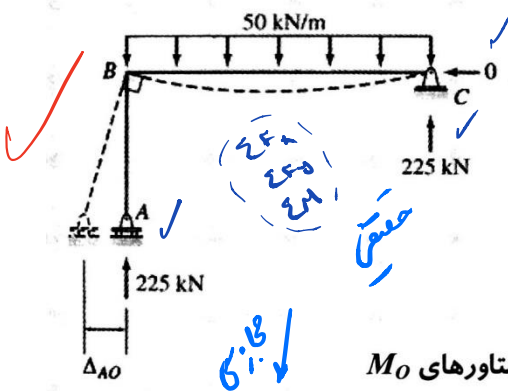
تمرین ۲: واکنش‌های تکیه گاهی قاب نشان داده شده در شکل الف را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید. DSI $r = 4$ $c = 0$ $K = 0$ $4 - 3 = 1$ (ب) (ب) یعنی $M = 225x - \frac{50x^2}{2}$ $M - 225x + 50 \times \frac{x}{2}$

واکنش‌های تکیه گاهی قاب نشان داده شده در شکل الف را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید.

A_x
 A_y
 C_x
 C_y



A_x حذف

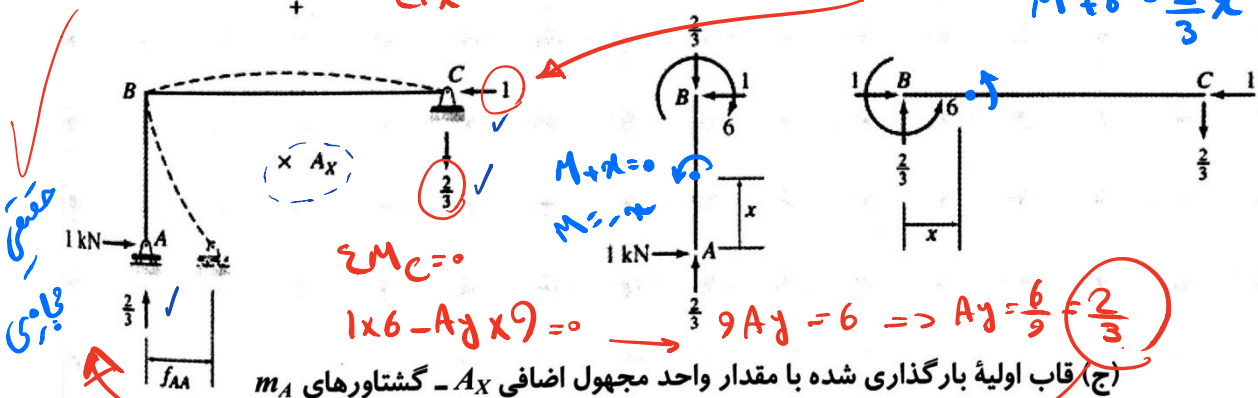


(ب) قاب اولیه تحت بارگذاری خارجی - گشتاورهای M_o

$$\sum F_x = 0 \quad -C_x + 1 = 0 \Rightarrow C_x = 1$$

$$M = \frac{2x}{3} - 6$$

$$M + 6 - \frac{2}{3}x$$



(ج) قاب اولیه بارگذاری شده با مقدار واحد مجهول اضافی A_x - گشتاورهای m_A

حل:

درجه نامعینی = ۱

قاب اولیه: واکنش افقی A_x تکیه گاه مفصلی A به عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌شود. قاب اولیه با حذف قید مانع تغییر مکان افقی گره A و با جایگزین کردن تکیه گاه غلتکی به جای تکیه گاه مفصلی به دست می‌آید (شکل ب). سپس قاب اولیه را به صورت جداگانه تحت بارگذاری خارجی و مقدار واحد مجهول اضافی نامعلوم A_x قرار می‌دهیم که به ترتیب در شکل‌های ب و ج نشان داده شده‌اند.

$$\Delta_{AO} + f_{AA} A_x \neq 0$$

معادله سازگاری: با توجه به شکل های الف ب ج مشاهده می شود که:

تغییر شکل های قاب اولیه: تغییر شکل های Δ_{AO} و f_{AA} قاب اولیه با استفاده از روش کار مجازی فصل قبل ارزیابی می شود. عبارت کار مجازی مربوط به Δ_{AO} که نشانگر تغییر شکل افقی قاب اولیه در محل گره A در اثر بارگذاری خارجی است را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta_{AO} = \sum \int \frac{M_O m_A}{EI} dx$$

که در اینجا M_O نشانگر لنگرهای خمشی ناشی از بارگذاری خارجی (واقعی) (شکل ب) و m_A نشانگر لنگرهای خمشی ناشی از بار واحد (مجازی) در محل مجهول اضافی و هم جهت با آن می باشد (شکل ج).

بخش	مختص x		M_O	m_A
	مبدأ	محدوده (m)	(kN.m)	(kN.m/kN)
AB	A	0-6	0	-x
BC	B	0-9	$225x - \frac{50}{2}x^2$	$-6 + \frac{2}{3}x$

$$\Delta_{AO} = \frac{1}{EI} \int_0^9 \left(225x - \frac{50}{2}x^2 \right) \left(-6 + \frac{2}{3}x \right) dx = -\frac{9112.5 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

برای محاسبه ضریب انعطاف پذیری f_{AA} ، هر دو سیستم واقعی و مجازی شامل مقدار واحد واکنش تکیه گاهی اضافی A_x به صورت نشان داده شده در شکل ج بر روی قاب اولیه وارد می شوند (بدون ضریب A_x)، بدین ترتیب عبارت کار مجازی برای f_{AA} به صورت زیر بیان می شود:

$$f_{AA} = \sum \int \frac{m_A^2}{EI} dx$$

در نتیجه:

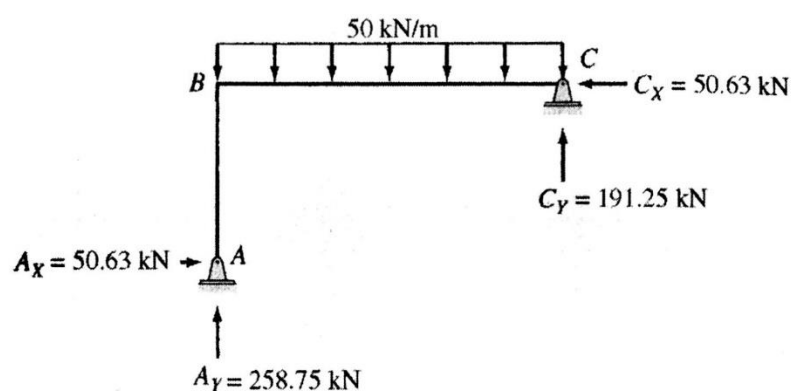
$$f_{AA} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^6 (-x)^2 dx + \int_0^9 \left(-6 + \frac{2}{3}x \right)^2 dx \right] = \frac{180 \text{ m}^3}{EI}$$

مقدار مجهول اضافی: با جایگزین کردن مقادیر بالا در معادله سازگاری نتیجه می شود:

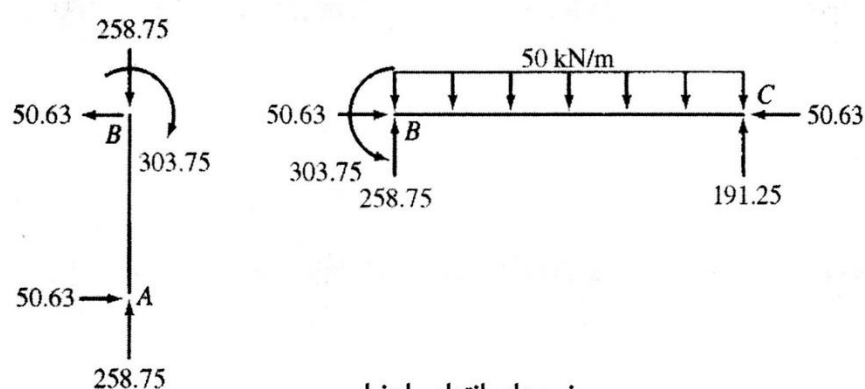
$$-\frac{9112.5}{EI} + \left(\frac{180}{EI} \right) A_x = 0 \Rightarrow A_x = 50.63 \text{ kN} \rightarrow$$

واکنش های تکیه گاهی: برای تعیین دیگر واکنش های تکیه گاهی تیر نامعین، از معادلات تعادل استفاده می کنیم (شکل د):

نمودارهای نیروی برشی و خمشی نیز در شکل ه نشان داده شده است.

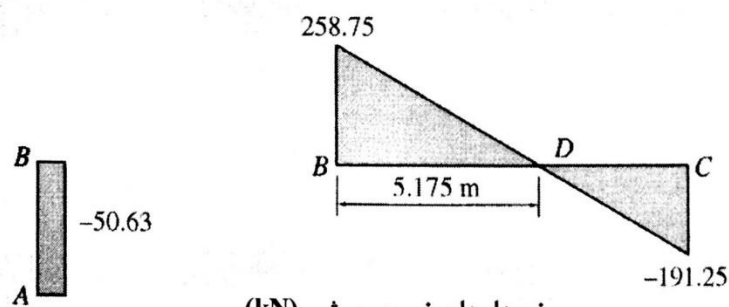


واکنش‌های تکیه‌گاهی

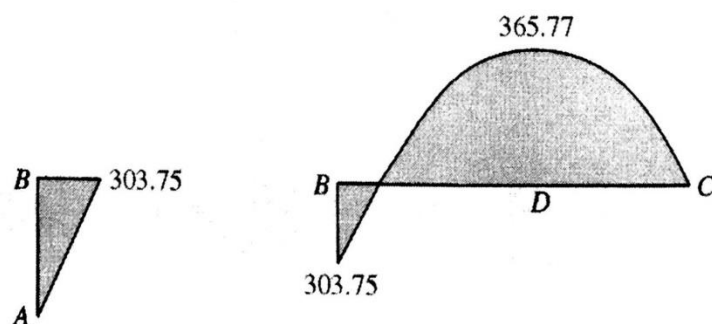


نیروهای انتهایی اعضا

(د) واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروهای انتهایی اعضای قاب نامعین



نمودارهای نیروی برشی (kN)

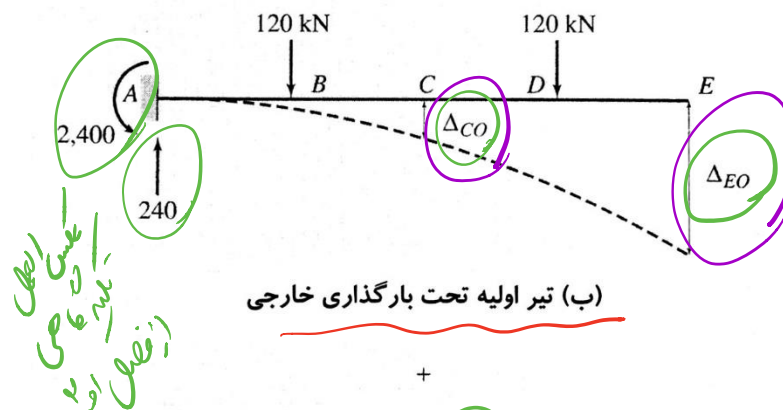
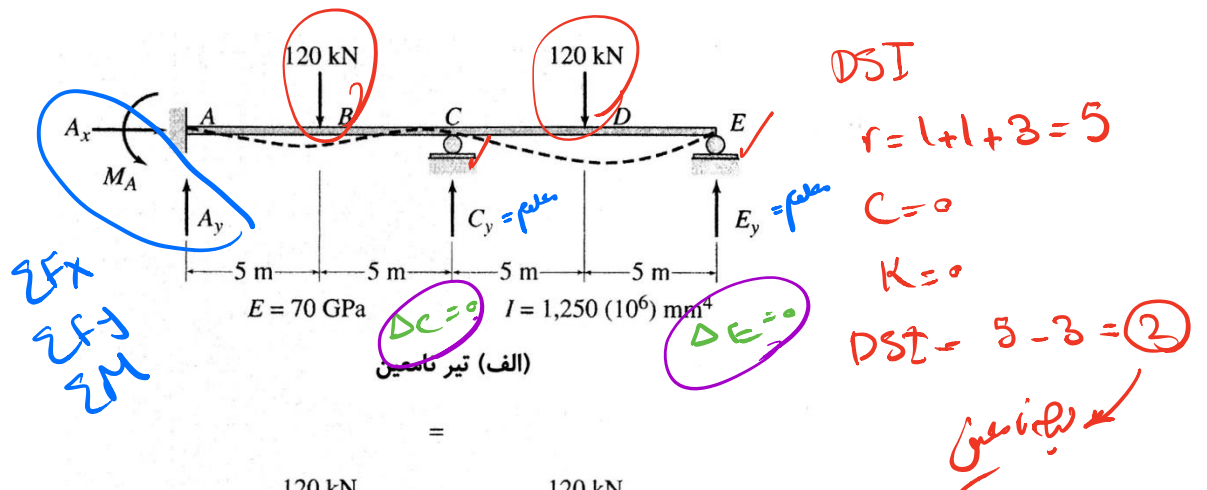


نمودارهای گشتاور خمشی (kN.m)

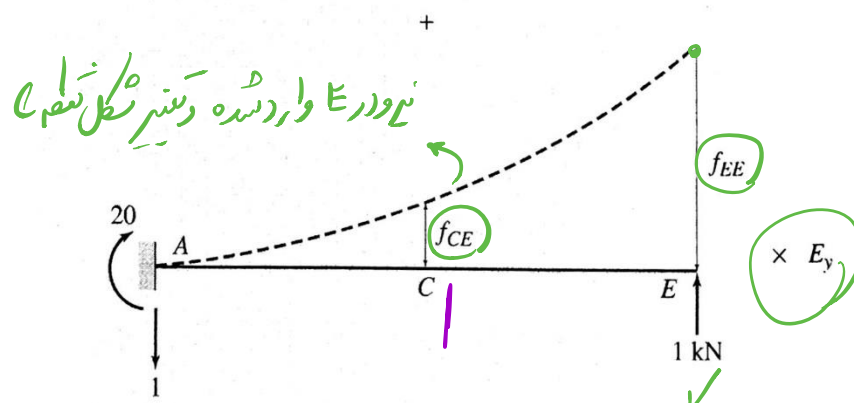
(ه) نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی قاب نامعین

۶-۳-۲ سازه‌های با چند درجه نامعینی

تمرین ۳: واکنش‌های تکیه گاهی تیر نشان داده شده در شکل الف را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید.



(ج) تیر اولیه بارگذاری شده با مجهول اضافی C_y



(د) تیر اولیهٔ یارگذاری شده با مجهول اضافی E_y

حل:

درجه نامعینی = ۲

تیر اولیه: واکنش‌های قائم C_y و E_y تکیه گاه‌های داخلی C و E را به عنوان مجهول‌های اضافی انتخاب می‌کنیم. سپس با حذف این تکیه گاه‌ها، تیر طره اولیه نشان داده شده در شکل ب را به دست می‌آوریم.

در مرحله بعد تیر اولیه را به صورت جداگانه تحت بارگذاری خارجی و مقدار واحد مجهول‌های اضافی C_y و E_y قرار می‌دهیم که به ترتیب در شکل‌های ب و ج و د نشان داده شده‌اند.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{CO} + f_{CC}C_y + f_{CE}E_y &= 0 \\ \Delta_{EO} + f_{EC}C_y + f_{EE}E_y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

معادلات سازگاری: با توجه به شکل‌های الف تا د داریم:

از $f_{CE} = f_{EC}$ طبق قانون بای و ماکسول

تغییر شکل‌های تیر اولیه: با استفاده از روابط تغییر شکل تیرها (جدول انتهایی فصل قبل) داریم:

$$\begin{aligned} \Delta_{CO} &= -\frac{82500 \text{ kN.m}^3}{EI} & \Delta_{EO} &= -\frac{230000 \text{ kN.m}^3}{EI} \\ f_{CC} &= \frac{333.333 \text{ m}^3}{EI} & f_{EE} &= \frac{2666.667 \text{ m}^3}{EI} \\ f_{EC} &= \frac{833.333 \text{ m}^3}{EI} \end{aligned}$$

رابطه جدول ماکسول

همچنین با استفاده از قانون ماکسول داریم:

$$f_{CE} = f_{EC} = \frac{833.333 \text{ m}^3}{EI}$$

مقدار مجهول‌های اضافی: با جایگزین کردن مقادیر بالا در معادلات سازگاری نتیجه می‌شود:

$$\left. \begin{aligned} -82500 + 333.333C_y + 833.333E_y &= 0 \\ -230000 + 833.333C_y + 2666.667E_y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

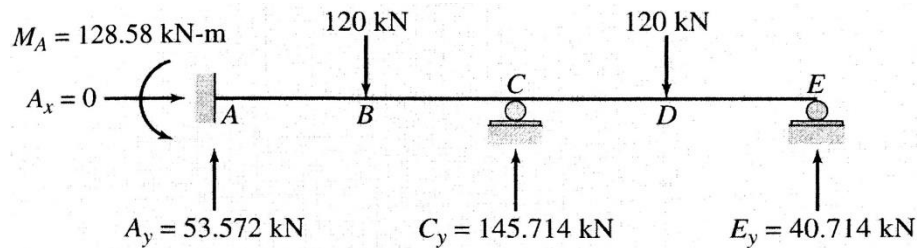
از حل دستگاه فوق نتیجه می‌شود:

$$\left\{ \begin{aligned} C_y &= 145.714 \text{ kN} \uparrow \\ E_y &= 40.714 \text{ kN} \uparrow \end{aligned} \right.$$

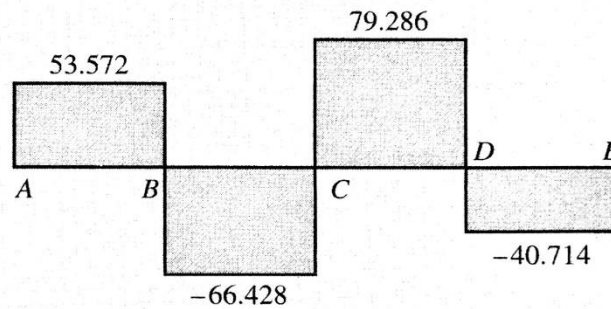
واکنش‌های تکیه گاهی: برای تعیین دیگر واکنش‌های تکیه گاهی تیر نامعین، از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم (شکل ه):

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0 \Rightarrow A_x = 0 \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 \Rightarrow A_y - 120 + 145.714 - 120 + 40.714 = 0 \Rightarrow A_y = 53.572 \text{ kN} \uparrow \\ + \circlearrowleft \sum M_A &= 0 \Rightarrow M_A - 120(5) + 145.714(10) - 120(15) + 40.714(20) = 0 \\ \Rightarrow M_A &= 128.58 \text{ kN.m} \circlearrowleft \end{aligned}$$

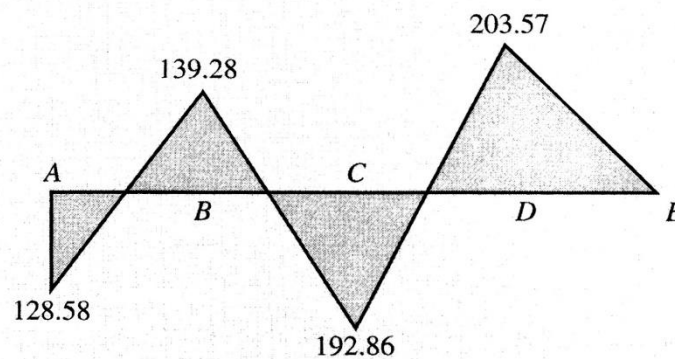
نمودارهای نیروی برشی و خمشی نیز در شکل (و) نشان داده شده است.



(ه) واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر نامعین



نمودار نیروی برشی (kN)



نمودار گشتاور خمشی (kN.m)

(و) نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر نامعین

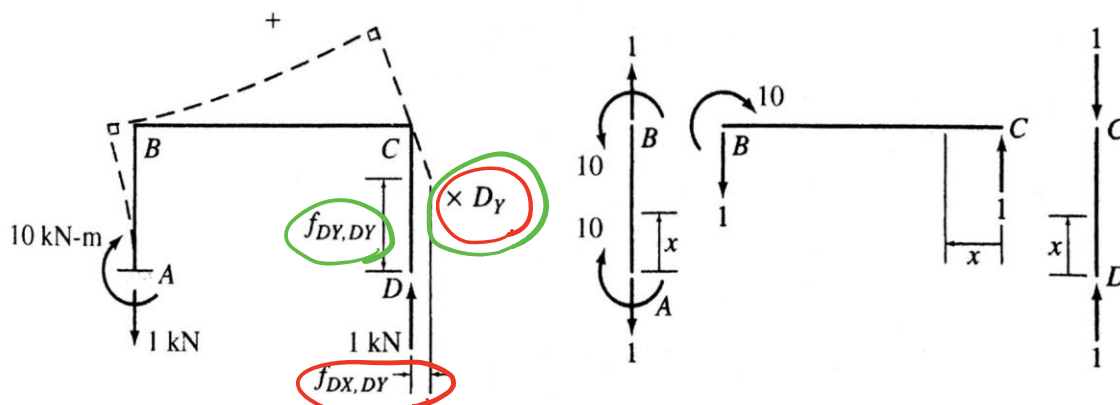
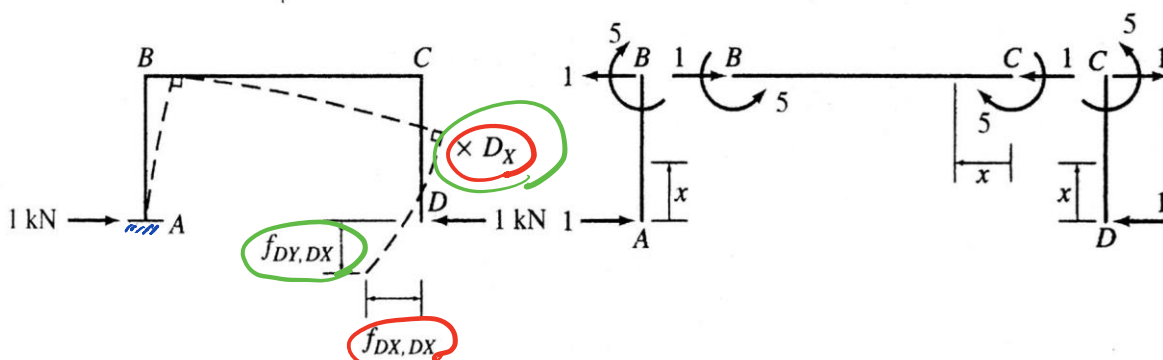
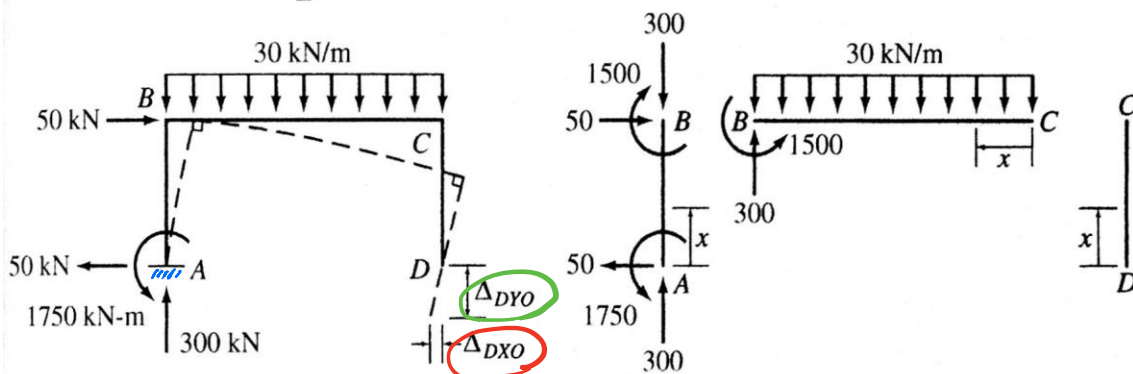
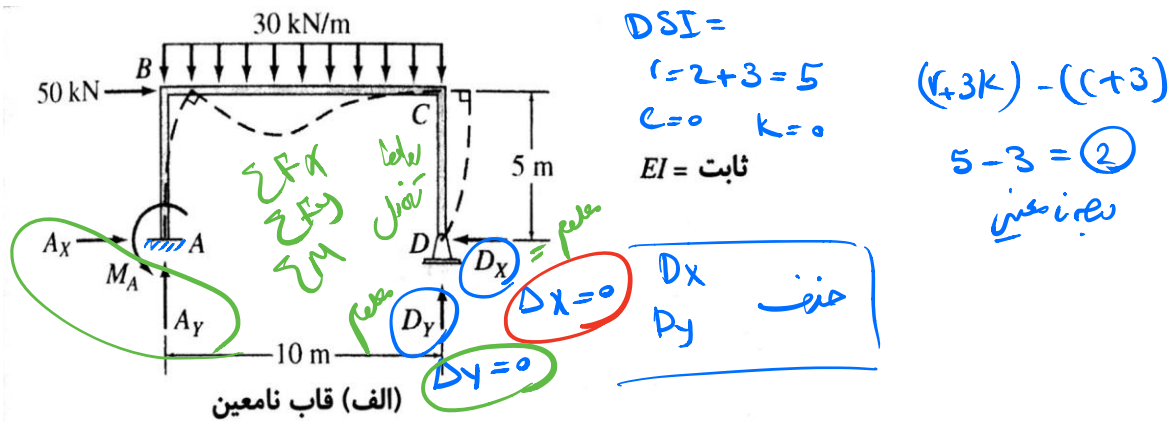
تمرین ۴: واکنش‌های تکیه‌گاهی قاب نشان داده شده در شکل الف را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی قاب را رسم کنید.

۸۷.

حل:

درجه نامعینی = ۲

قاب اولیه: واکنش‌های افقی D_x و D_y تکیه‌گاه مفصلی D به عنوان مجهول‌های اضافی انتخاب می‌شود. سپس با حذف تکیه‌گاه D، قاب اولیه نشان داده شده در شکل ب به دست می‌آید. در مرحله بعد قاب اولیه را به صورت جداگانه تحت بارگذاری خارجی و مقدار واحد مجهول‌های اضافی D_x و D_y قرار می‌دهیم که به ترتیب در شکل‌های ب و ج و د نشان داده شده‌اند.



معادلات سازگاری: با توجه به صفر بودن تغییر شکل های افقی و قائم قاب نامعین واقعی در محل تکیه گاه مفصلی D، معادلات سازگاری به صورت زیر بیان می شود:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{DXO} + f_{DX,DX} D_x + f_{DX,DY} D_y &= 0 \\ \Delta_{DYO} + f_{DY,DX} D_x + f_{DY,DY} D_y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

تغییر شکل های قاب اولیه: معادلات لنگرهای خمشی اعضای قاب در اثر بارگذاری خارجی و مقدار واحد مجهول های اضافی در جدول زیر آورده شده اند:

$f_{DX,DX}$ $f_{DX,DY}$

بخش	مختص x		M_O	m_{DX}	m_{DY}
	مبدأ	محدوده (m)	(kN.m)	(kN.m/kN)	(kN.m/kN)
AB	A	0-5	$-1750 + 50x$	$-x$	10
CD	C	0-10	$-15x^2$	-5	x
DC	D	0-5	0	x	0

با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_{DXO} = \sum \int \frac{M_O m_{DX}}{EI} dx = \frac{44791.7 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{DYO} = \sum \int \frac{M_O m_{DY}}{EI} dx = -\frac{83593.75 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

$$f_{DX,DX} = \sum \int \frac{m_{DX}^2}{EI} dx = \frac{333.33 \text{ m}^3}{EI}$$

$$f_{DY,DY} = \sum \int \frac{m_{DY}^2}{EI} dx = \frac{833.33 \text{ m}^3}{EI}$$

$$f_{DX,DY} = f_{DY,DX} = \sum \int \frac{m_{DX} m_{DY}}{EI} dx = -\frac{375 \text{ m}^3}{EI}$$

مقدار مجهول های اضافی: با جایگزین کردن مقادیر بالا در معادلات سازگاری نتیجه می شود:

$$\left\{ \begin{aligned} 44791.7 + 333.33 D_x - 375 D_y &= 0 \\ -83593.75 - 375 D_x + 833.33 D_y &= 0 \end{aligned} \right.$$

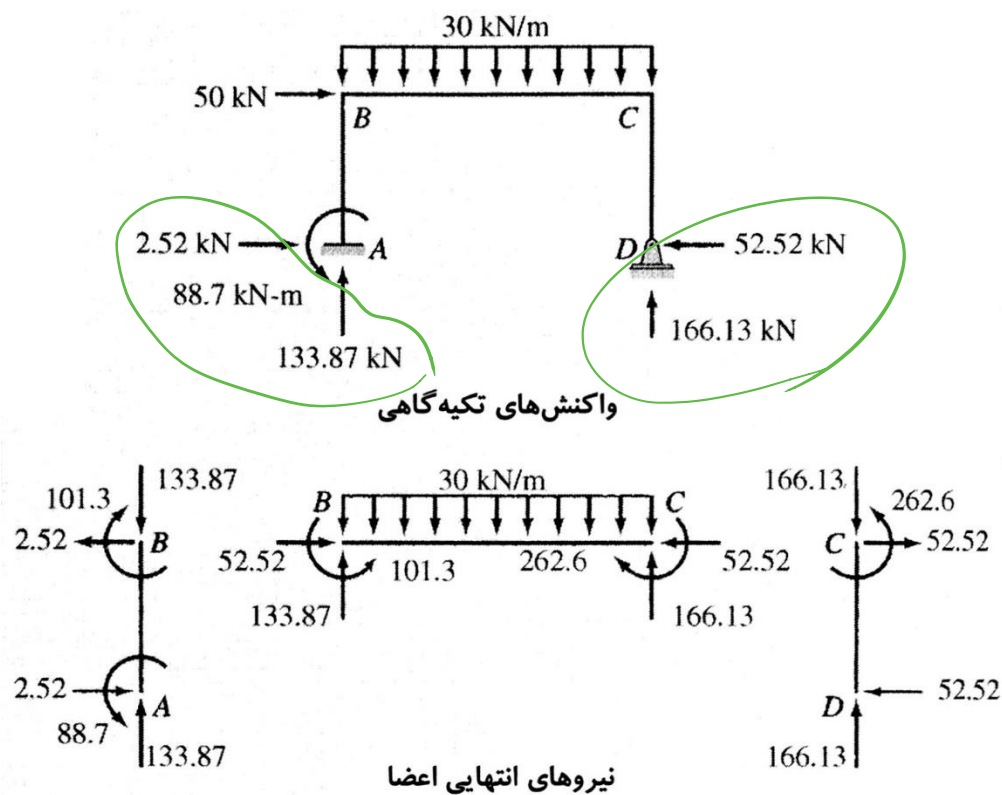
از حل دستگاه فوق نتیجه می شود:

$$D_x = 52.52 \text{ kN} \leftarrow$$

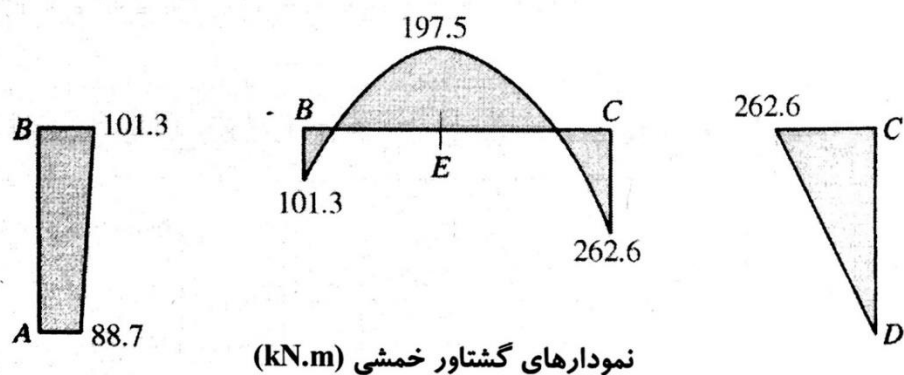
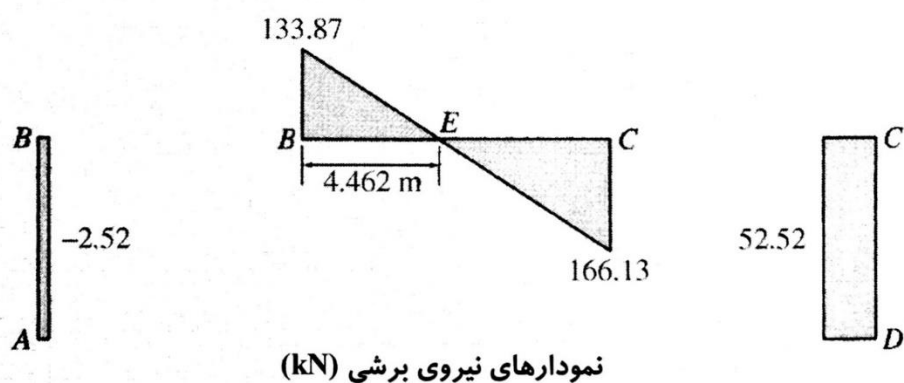
$$D_y = 166.13 \text{ kN} \uparrow$$

واکنش های تکیه گاهی: برای تعیین دیگر واکنش های تکیه گاهی تیر نامعین، از معادلات تعادل استفاده می کنیم، واکنش های تکیه گاهی در شکل (ه) نشان داده شده اند.

نمودارهای نیروی برشی و خمشی نیز در شکل (و) نشان داده شده است.



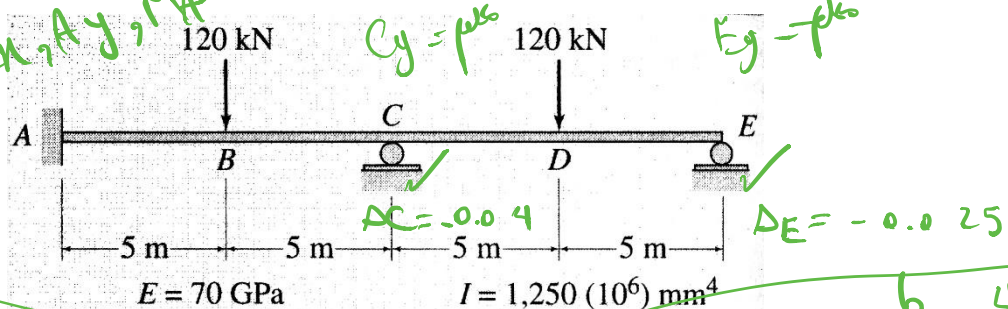
(ه) واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروهای انتهایی اعضای قاب نامعین



(و) نمودارهای نیروی برشی و گشتاورهای خمشی قاب نامعین

۳-۳-۶ نشست‌های تکیه گاهی، تغییرات دما و خطای ساخت

تمرین ۵: واکنش‌های تکیه گاهی تیر نشان داده شده در شکل الف را در اثر بارگذاری نشان داده شده و نشست‌های ۴۰ میلی‌متر در تکیه گاه C و ۲۵ میلی‌متر در تکیه گاه E را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید.



(الف) تیر نامعین

حل:

این تیر در تمرین ۳ مورد بررسی قرار گرفت.

نشست‌های تکیه گاهی: نشست‌های تکیه گاهی مشخص شده در شکل ب رسم شده‌اند.

معادلات سازگاری: با توجه به شکل‌های الف تا د داریم:

$$\Delta_{CO} + f_{CC}C_y + f_{CE}E_y = \Delta_C \quad -0.04 \text{ m}$$

$$\Delta_{EO} + f_{EC}C_y + f_{EE}E_y = \Delta_E \quad -0.025 \text{ m}$$

تغییر شکل‌های تیر اولیه: با استفاده از روابط تغییر شکل تیرها (جدول انتهایی فصل قبل) داریم:

$$\Delta_{CO} = -\frac{82500 \text{ kN.m}^3}{EI} = -0.943 \text{ m}$$

$$\Delta_{EO} = -\frac{230000 \text{ kN.m}^3}{EI} = -2.629 \text{ m}$$

$$f_{CC} = \frac{333.333 \text{ m}^3}{EI} = 0.00381 \text{ m/kN}$$

$$f_{EE} = \frac{2666.667 \text{ m}^3}{EI} = 0.0305 \text{ m/kN}$$

$$f_{EC} = \frac{833.333 \text{ m}^3}{EI} = 0.00952 \text{ m/kN}$$

همچنین با استفاده از قانون ماکسول داریم:

$$f_{CE} = f_{EC} = \frac{833.333 \text{ m}^3}{EI} = 0.00952 \text{ m/kN}$$

مقدار مجهول‌های اضافی: با جایگزین کردن مقادیر بالا در معادلات سازگاری نتیجه می‌شود:

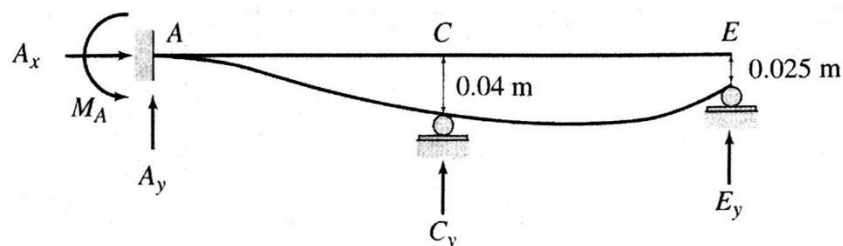
$$\begin{aligned} -0.943 + 0.00381C_y + 0.00952E_y &= -0.04 \\ -2.629 + 0.00952C_y + 0.0305E_y &= -0.025 \end{aligned}$$

از حل دستگاه فوق نتیجه می‌شود:

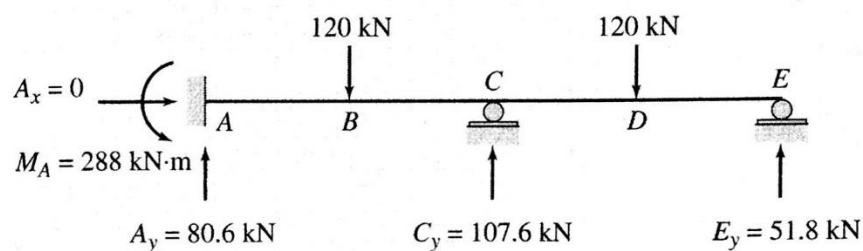
$$\begin{aligned} C_y &= 107.6 \text{ kN} \uparrow \\ E_y &= 51.8 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

واکنش‌های تکیه گاهی: برای تعیین دیگر واکنش‌های تکیه گاهی تیر نامعین، از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم واکنش‌های تکیه گاهی در شکل (ج) نشان داده شده‌اند.

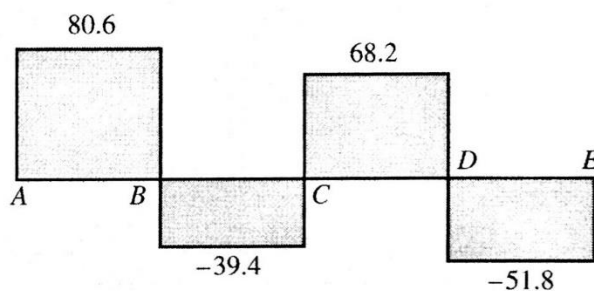
نمودارهای نیروی برشی و خمشی نیز در شکل (ج) نشان داده شده است.



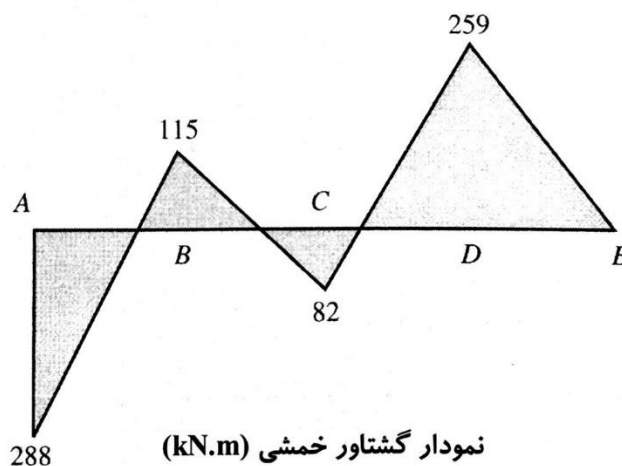
(ب) نشست‌های تکیه گاهی



واکنش‌های تکیه گاهی



نمودار نیروی برشی (kN)



نمودار گشتاور خمشی (kN.m)

(ج) واکنش‌های تکیه گاهی و نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر نامعین

۴-۶ روش سه لنگری

معادله ۳ لنگری در شکل کلی خود این شرط سازگاری را ارائه می کند که شیب منحنی الاستیک باید در محل تکیه گاه های داخلی تیر یکسره پیوسته باشد. در این روش که از آن می توان برای تحلیل تیرهای یکسره تحت بارهای خارجی و نشست های تکیه گاهی استفاده کرد، لنگرهای خمشی محل تکیه گاه های داخلی (هر تکیه گاه گیردار) تیر به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته می شوند. سپس با به کار بردن معادله سه لنگری در محل هر یک از مجهول های اضافی، مجموعه ای از معادلات سازگاری به دست می آید که آن ها را می توان برای تعیین لنگرهای خمشی اضافی حل کرد.

شکل کلی معادله سه لنگری:

$$\frac{M_\ell L_\ell}{I_\ell} + 2M_c \left(\frac{L_\ell}{I_\ell} + \frac{L_r}{I_r} \right) + \frac{M_r L_r}{I_r} = -\sum \frac{P_\ell L_\ell^\gamma k_\ell}{I_\ell} (1 - k_\ell^\gamma) - \sum \frac{P_r L_r^\gamma k_r}{I_r} (1 - k_r^\gamma) - \frac{w_\ell L_\ell^\gamma}{4I_\ell} - \frac{w_r L_r^\gamma}{4I_r} - \epsilon E \left(\frac{\Delta_\ell - \Delta_c}{L_\ell} - \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r} \right)$$

M_c لنگر خمشی در محل تکیه گاه c یعنی همان محل در نظر گرفتن سازگاری

M_L و M_r به ترتیب لنگر خمشی در محل تکیه گاه های مجاور چپ و راست تکیه گاه c

Δ_c نشست تکیه گاه c مورد نظر، Δ_L و Δ_r به ترتیب نشست های مجاور چپ و راست تکیه گاه c

E مدول الاستیسیته

L_L و L_r به ترتیب طول دو دهانه چپ و راست تکیه گاه c

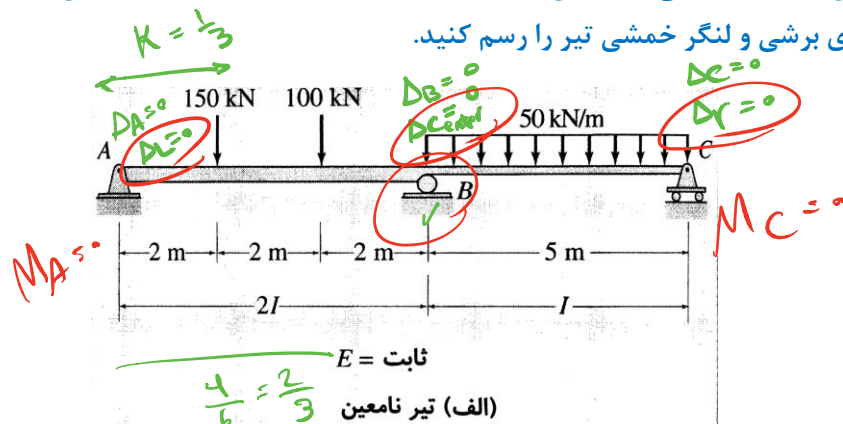
I_L و I_r به ترتیب ممان اینرسی دهانه های چپ و راست تکیه گاه c

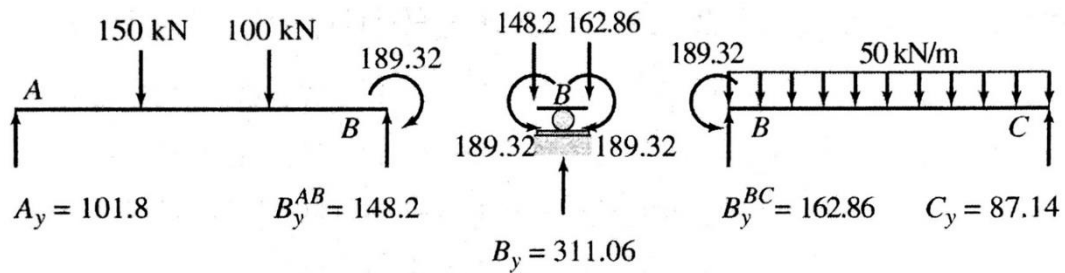
P_L و P_r به ترتیب بارهای متمرکز وارد بر دهانه های چپ و راست تکیه گاه c

k_L (یا k_r) نسبت فاصله P_L (یا P_r) از تکیه گاه سمت چپ (سمت راست) به طول دهانه.

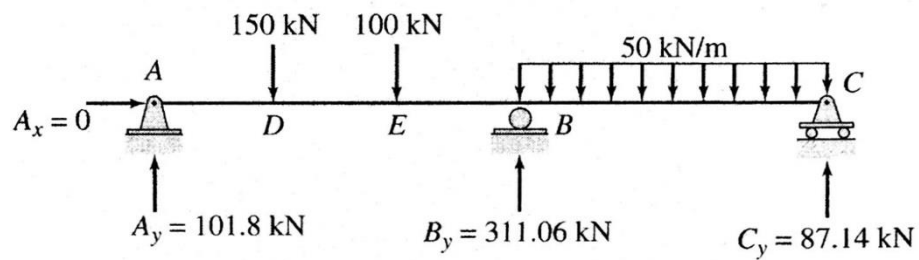
w_L و w_r به ترتیب بارهای گسترده یکنواخت وارد بر دهانه های چپ و راست تکیه گاه c

تمرین ۶: واکنش های تکیه گاهی تیر نشان داده شده در شکل الف را با استفاده از روش ۳ لنگری تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید.

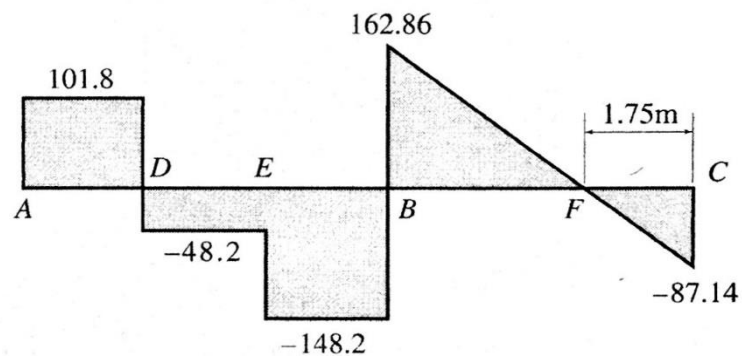




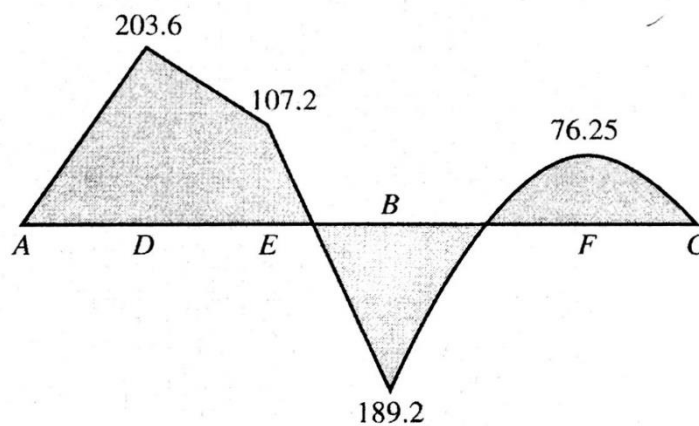
(ب) گشتاورها و نیروهای برشی انتهایی دهانه‌ها



(ج) واکنش‌های تکیه‌گاهی



نمودار نیروی برشی (kN)



نمودار گشتاور خمشی (kN.m)

(د) نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی

حل:

مجهول‌های اضافی: تیر یک درجه نامعین می‌باشد. لنگر خمشی M_B در محل تکیه گاه B مجهول اضافی است.

معادله سه لنگری در گره B: به ترتیب با در نظر گرفتن تکیه گاه‌های A, B, C به‌عنوان L, c, r و با جایگزین کردن مقادیر:

$$L_L = 6m$$

$$L_r = 5m$$

$$I_L = 2I$$

$$I_r = I$$

$$P_{L1} = 150kN$$

$$k_{L1} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

$$P_{L2} = 100kN$$

$$k_{L2} = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

$$w_r = 50kN/m$$

$$P_r = w_L = \Delta_L = \Delta_c = \Delta_r = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_A(6)}{2I} + 2M_B \left(\frac{6}{2I} + \frac{5}{I} \right) + \frac{M_C(5)}{I} = \\ & - \frac{150(6)^2 \left(\frac{1}{3} \right)}{2I} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] - \frac{100(6)^2 \left(\frac{2}{3} \right)}{2I} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] - \frac{50(5)^3}{4I} \end{aligned}$$

با توجه به آن که تکیه گاه‌های A و C تکیه گاه‌های ساده‌اند، ممان در آن‌ها صفر می‌باشد در نتیجه:

$$M_A = M_C = 0$$

بدین ترتیب معادله ۳ لنگری به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$16M_B = -3029.17 \Rightarrow M_B = -189.32kN.m$$

با به کار بردن معادلات تعادل در مورد جسم آزاد دهانه‌های نشان داده شده در شکل ب می‌توان نیروهای برشی و لنگر خمشی را به دست آورد.

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در شکل (د) نشان داده شده‌اند.

E, I

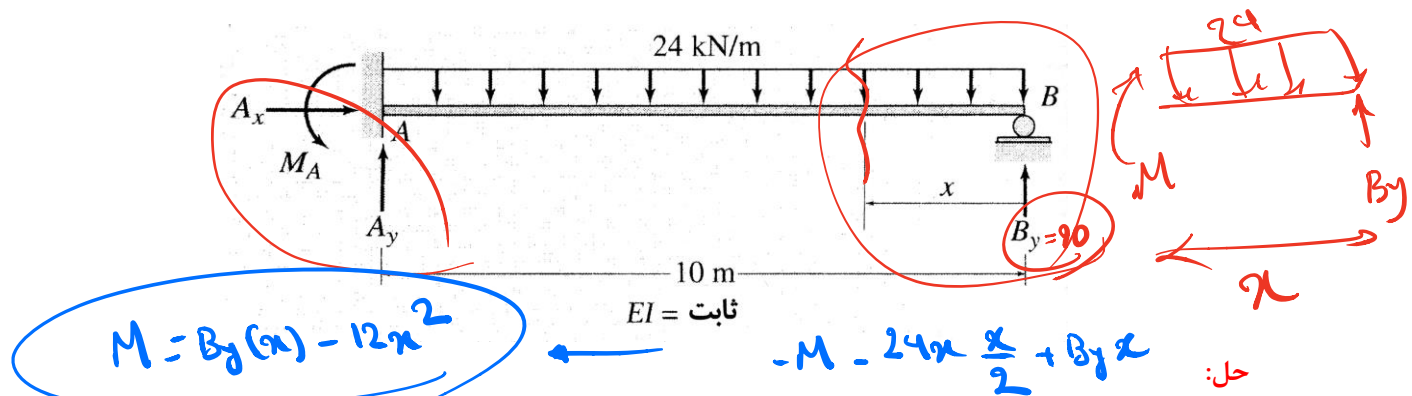
در معادله نتیجه می‌شود:

۵-۶ روش کار حداقل

بر اساس اصل کار حداقل، مقدار مجهول‌های اضافی یک سازه نامعین باید چنان باشد که انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه حداقل باشد. برای تحلیل یک سازه نامعین به روش کار حداقل، نخست انرژی کرنشی سازه بر حسب مجهول‌های اضافی بیان می‌شود. سپس با صفر قرار دادن مشتق‌های جزئی انرژی کرنشی نسبت به هر یک از مجهول‌های اضافی، مجموعه‌ای از معادلات به دست می‌آید که آن‌ها را می‌توان برای تعیین مجهول‌های اضافی حل کرد. از روش کار حداقل نمی‌توان برای تحلیل اثر نشست‌های تکیه گاهی، تغییرات دما و خطاهای ساخت استفاده کرد.

تمرین ۷:

واکنش‌های تکیه گاهی تیر نشان داده شده در شکل الف را با استفاده از روش کار حداقل تعیین کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید.



درجه نامعینی تیر یک است... واکنش قائم B_y تکیه گاه غلتکی B به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته می‌شود. مقدار این مجهول اضافی را با حداقل قرار دادن انرژی کرنشی تیر نسبت به B_y ارزیابی می‌کنیم. همان‌طور در فصل قبل اشاره شد انرژی کرنشی تیر تحت خمش محض به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

بر اساس اصل کار حداقل، مشتق جزئی انرژی کرنشی نسبت به B_y باید صفر باشد؛ بنابراین:

$$\frac{\partial U}{\partial B_y} = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial B_y} \right) \frac{M}{EI} dx$$

با استفاده از مختص x نشان داده شده در شکل الف، معادله لنگر خمشی M بر حسب B_y را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$M = B_y(x) - \frac{24x^2}{2}$$

سپس مشتق جزئی عبارت M نسبت به B_y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial M}{\partial B_y} = x$$

با جایگزین کردن عبارت‌های M و $\frac{\partial M}{\partial B_y}$ در معادله $\frac{\partial U}{\partial B_y} = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial B_y} \right) \frac{M}{EI} dx$ داریم:

$$\frac{1}{EI} \left[\int_0^{10} x (B_y x - 12x^2) dx \right]$$

با انتگرال گیری نتیجه می‌شود:

$$333.33B_y - 30000 = 0 \Rightarrow B_y = 90 \text{ kN} \uparrow$$

حال برای به دست آوردن دیگر واکنش‌های تکیه گاهی تیر نامعین از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 24(10) + 90 = 0 \Rightarrow A_y = 150 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 24(10)(5) + 90(10) = 0 \Rightarrow M_A = 300 \text{ kN.m} \circlearrowleft$$